

## B.

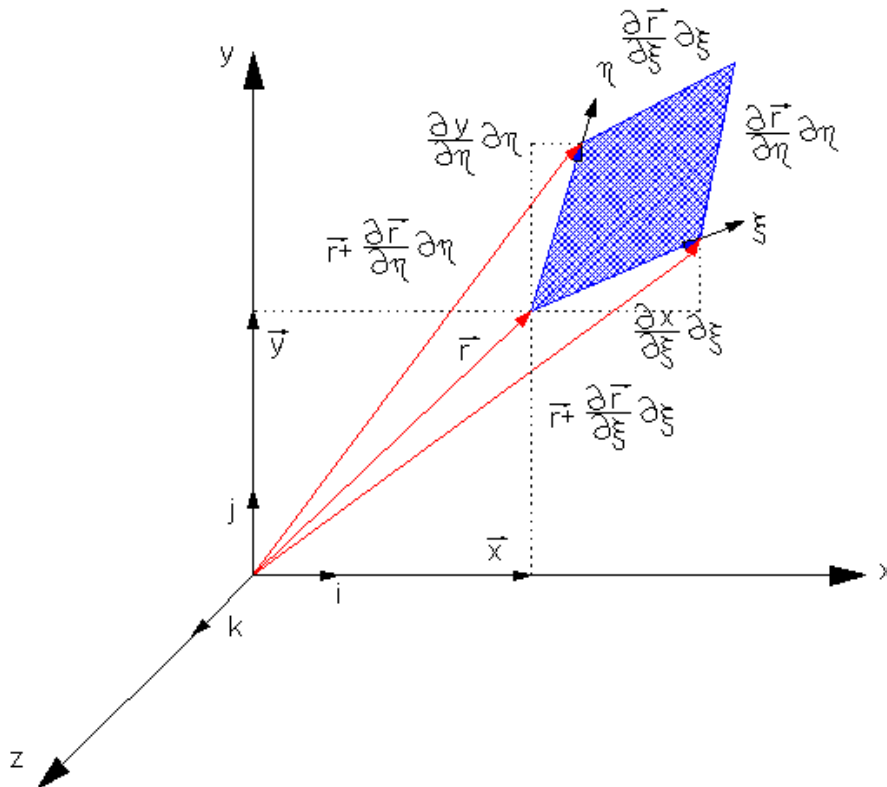


## CAŁKOWANIE NUMERYCZNE W PRZESTRZENI DWUWYMIAROWEJ

Rozwiązania całki  $I = \iint_A f(x,y) dx dy$  można dokonać łatwiej, jeżeli wpierw dokonamy transformacji tego wyrażenia do układu współrzędnych naturalnych  $\xi$  i  $\eta$ . Ponadto granice każdej z całek powinny być równe  $-1$  lub  $+1$ . Pole  $dA = dx dy$  musi być zamienione zmiennymi  $d\xi$  i  $d\eta$ .

Rysunek B.1 przedstawia nieskończenie małe pole  $dA$  w układzie współrzędnych naturalnych  $\xi$  i  $\eta$ . Wektor  $r$  określa położenie punktu  $A$  w układzie współrzędnych kartezjańskich  $x$  i  $y$ :

$$r = x + y = xi + yj, \quad (B.1)$$



Rys. B.1. Elementarne pole  $dA$  w układzie współrzędnych naturalnych

Przyrost tego wektora ze względu na zmienne naturalne wynosi :

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial \xi} &= \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot i + \frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot j, \\ \frac{\partial r}{\partial \eta} &= \frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot i + \frac{\partial y}{\partial \eta} \cdot j. \end{aligned} \quad (B.2)$$

Jeżeli pomnożymy wyrażenia  $(D.Z^1)$  i  $(D.Z^2)$  odpowiednio przez  $d\xi$  i  $d\eta$ , to uformujemy boki czworokąta (rys.B.1) o infinitesimalnym polu  $dA$ . Jego wielkość wyznaczamy na podstawie potrójnego produktu wektorowego :

$$dA = \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} \cdot d\xi \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta} \cdot d\eta \right) \cdot k, \quad (\text{B.3})$$

co po podstawieniach (B.2) prowadzi do

$$dA = \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \cdot d\xi d\eta, \quad (\text{B.4})$$

lub w postaci wyznacznika do

$$dA = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} \cdot d\xi d\eta = |J| \cdot d\xi d\eta, \quad (\text{B.5})$$

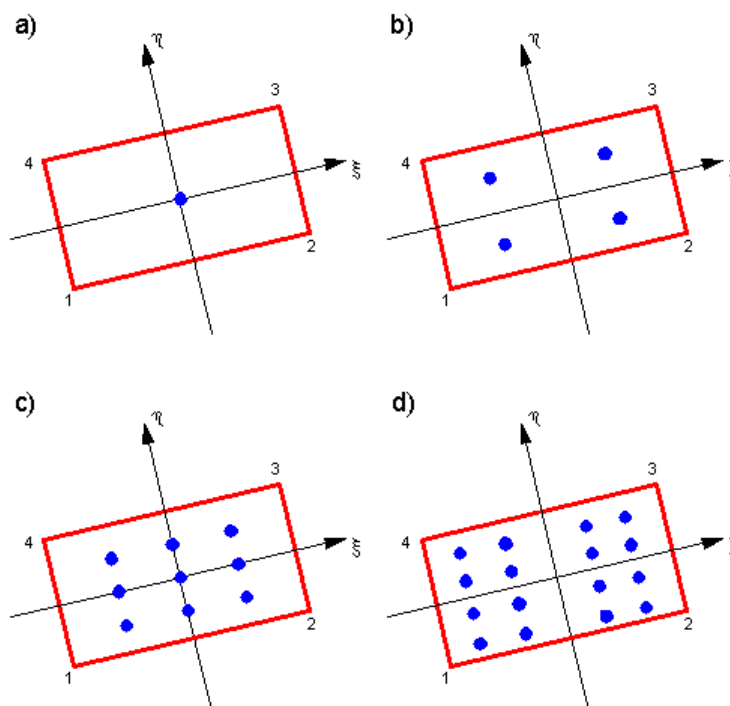
gdzie  $J$  jest macierzą jacobianu. Tak więc nowa postać wyjściowego wyrażenia całkowego jest następująca :

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) \cdot |J| \cdot d\xi d\eta. \quad (\text{B.6})$$

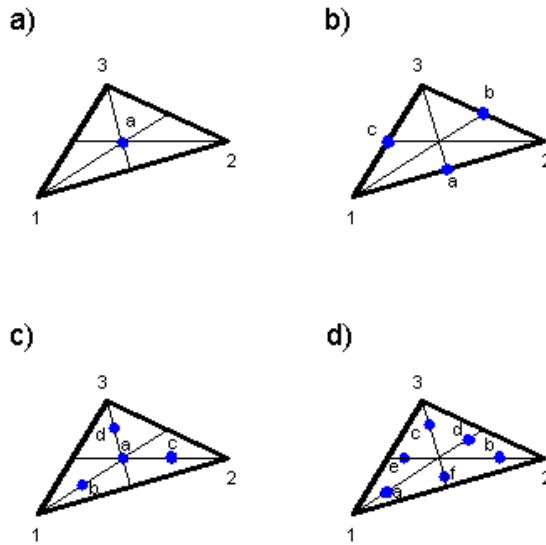
Konsekwentne stosowanie kwadratur Gaussa prowadzi do znalezienia całki w postaci:

$$I = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_j \alpha_k f(\xi_j, \eta_k) \cdot |J(\xi_j, \eta_k)| \quad (\text{B.7})$$

gdzie  $\alpha_j, \alpha_k$  są współczynnikami wag dla punktów o współrzędnych  $(\xi, \eta)$ . Położenie punktów Gaussa dla  $n=1, 2, 3$  i  $4$  pokazano na rysunku B.2.



Rys. B.2. Punkty Gaussa dla elementu czworokątnego



Rys. B.3. Punkty Gaussa dla elementu trójkątnego

### Punkty próbne i wagi dla trójkąta

Dla trójkąta o polu powierzchni  $A$  przy zastosowaniu współrzędnych naturalnych  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  całkowanie numeryczne odbywa się według formuły

$$I = A \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot f(\xi_1 \xi_2 \xi_3)_j \quad (\text{B.8})$$

Rysunek B. 3 przedstawia schematycznie położenie punktów całkowania dla  $n = 1, 3, 4$  i  $6$ , zaś w tablicy B.1 dodatkowo zestawiono współczynniki wag  $\alpha_j$ , odpowiadające tym punktom.

$$\begin{aligned} \delta_1 &= 0.816847, & \delta_2 &= 0.108103, \\ \beta_1 &= 0.091576, & \beta_2 &= 0.44595, \\ \gamma_1 &= -\frac{27}{48}, & \gamma_2 &= \frac{25}{48}, \\ \gamma_3 &= 0.10995174, & \gamma_4 &= 0.2238159. \end{aligned}$$

Tablica B.1 Położenie punktów Gaussa i wartości wag dla różnych rzędów całkowania

n	Rząd	Punkty	$\xi_1, \xi_2, \xi_3$	$\alpha_i$
1	Liniowy	a	1/3, 1/3, 1/3	1
3	kwadratowy	a	1/2, 1/2, 0	1/3
		b	0, 1/2, 1/2	1/3
		c	1/2, 0, 1/2	1/3
		d	1/2, 0, 1/2	1/3
	sześcienny	a	1/3, 1/3, 1/3	$\gamma_1$
		b	0.6, 0.2, 0.2	$\gamma_2$
		c	0.2, 0.6, 0.2	$\gamma_3$
		d	0.2, 0.2, 0.6	$\gamma_4$
	4 stopnia	a	$\delta_1, \beta_1, \beta_1$	$\gamma_3$
		b	$\beta_1, \delta_1, \beta_1$	$\gamma_3$
		c	$\beta_1, \beta_1, \delta_1$	$\gamma_3$
		d	$\delta_2, \beta_2, \beta_2$	$\gamma_4$
		e	$\beta_2, \delta_2, \beta_2$	$\gamma_4$
		f	$\beta_2, \beta_2, \delta_2$	$\gamma_4$