

A. ← ↑ → ROZWIĄZANIE UKŁADU RÓWNAŃ LINIOWYCH ALGEBRAICZNYCH

W literaturze cytuje się wiele metod numerycznego rozwiązywania układów równań liniowych o postaci

$$A \cdot X = B \quad (\text{A.1})$$

Niektóre z nich są szczególnie nakierowane na szybkość operacji, najmniejszą zajętość pamięci, wykorzystują też dodatkowe cechy macierzy współczynników A , takie jak symetria czy pasmowość. Spośród tych wielu dostępnych w literaturze procedur omówimy jedną, tzw. metodę rozkładu trójkątnego macierzy Choleskiego - Banachiewicza. Metoda ta jest z powodzeniem stosowana dla macierzy A symetrycznych i dodatnio określonych, a z takimi właśnie macierzami mamy do czynienia w zadaniach metody elementów skończonych dotyczących liniowej analizy statycznej konstrukcji sprężystych. Macierz A można rozłożyć na dwie macierze w ten sposób, by

$$A = U^T \cdot U, \quad (\text{A.2})$$

gdzie U jest górną macierzą trójkątną. Macierz A można także rozłożyć do postaci

$$A = \bar{U}^T \cdot D \cdot \bar{U} \quad (\text{A.3})$$

zwanej postacią zmodyfikowaną metody Choleskiego. U jest górną macierzą trójkątną z jedynkami na głównej przekątnej. Symbol D reprezentuje macierz diagonalną, zawierającą kwadraty składowych diagonalnych macierzy U . Równania rekurencyjne U_{ij} , i D_{ij} , generowane kolumnami dla $j=2,3,\dots,n$, dają

$$\begin{aligned} \bar{U}_{ij} &= \frac{1}{D_{ii}} \cdot \left(A_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} D_{kk} \bar{U}_{ki} \bar{U}_{kj} \right), \quad (1 < i < j) \\ D_{jj} &= A_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} D_{kk} \bar{U}_{kj}^2 \quad (1 < i = j) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Obydwa te równania zawierają wyrażenie $D_{kk} \cdot U_{kj}$ pod znakiem sumy. Jeżeli podstawimy :

$$\bar{U}_{kj}^* = D_{kk} \bar{U}_{kj}, \quad (\text{A.5})$$

wówczas

$$\bar{U}_{ij}^* = A_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} D_{kk} \bar{U}_{ki} \bar{U}_{kj}^* \quad (1 < i < j) \quad (\text{A.6})$$

$$D_{jj} = A_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} \bar{U}_{kj} \cdot \bar{U}_{kj}^* \quad (1 < i = j) \quad (\text{A.7})$$

gdzie $j=2,3,\dots,n$, oraz

$$\bar{U}_{kj} = \frac{1}{D_{kk}} \bar{U}_{kj}^*,$$

Zatem dla kolumny j osiąga się chwilowy wynik na U_{ij} dla każdej składowej spoza głównej diagonalnej według (A.6). Dalej na podstawie (A.6) oblicza się wyraz diagonalny D_{jj} , i równocześnie końcową wartość każdego składnika poza główną przekątną.

Założmy, że chcemy rozwiązać układ równań liniowych typu

$$A \cdot X = B \quad (\text{A.8})$$

w którym X jest kolumną n niewiadomych, zaś B jest wektorem stałych. Podstawmy (A.3) do (A.8):

$$\overline{U}^T \overline{D} \cdot \overline{U} \cdot X = B, \quad (\text{A.9})$$

a podstawiając

$$\overline{U} \cdot X = Y \quad (\text{A.10})$$

oraz

$$D \cdot Y = Z \quad (\text{A.11})$$

otrzymujemy układ

$$\overline{U}^T \cdot Z = B. \quad (\text{A.12})$$

Teraz wektor niewiadomych X otrzymujemy w trzech krokach :

1. Ponieważ U jest dolną macierzą trójkątną, elementy wektora Z otrzymamy w procesie podstawienia w przód :

$$Z_i = B_i - \sum_{k=1}^{i-1} \overline{U}_{ki} Z_k \quad (i < n). \quad (\text{A.13})$$

2. Macierz D jest diagonalna, więc

$$Y_i = \frac{Z_i}{D_{ii}}, \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (\text{A.14})$$

3. W trzecim kroku znajdujemy wektor X , stosując podstawienie odwrotne (rozpoczynając od ostatniej niewiadomej):

$$X_i = Y_i - \sum_{k=i+1}^n \overline{U}_{ik} X_k \quad (i < n) \quad (\text{A.15})$$

Przykład

Posługując się metodą zmodyfikowaną Choleskiego, spróbujemy rozwiązać następujący układ równań liniowych typu

$$A \cdot X = B$$

$$\begin{bmatrix} 200 & -200 & 0 \\ -200 & 700 & -200 \\ 0 & -200 & 700 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 30 \\ 30 \end{bmatrix}$$

Dokonujemy rozkładu macierzy współczynników A na trzy macierze (A.3), korzystając z zależności (A.4).

Kolejno otrzymujemy :

$$D_{11} = A_{11} = 200.00$$

$$\bar{U}_{11} = 1.00$$

$$\bar{U}_{12} = \frac{1}{D_{11}}(A_{12}) = \frac{1}{200}0 = 0.00$$

$$\bar{U}_{13} = \frac{1}{D_{11}}(A_{13}) = \frac{1}{200}0 = 0.00$$

$$\bar{U}_{22} = 1.00$$

$$D_{22} = A_{22} - D_{11}\bar{U}_{11}^2 = 400 - 200 = 200.00$$

$$\bar{U}_{23} = \frac{1}{D_{22}}(A_{23} - D_{11}\bar{U}_{12}\bar{U}_{13}) = \frac{1}{200}(-200 - 200(-1)(0)) = -1.00$$

$$D_{33} = A_{33} - D_{11}\bar{U}_{13}^2 - D_{22}\bar{U}_{23}^2 = 400 - 200 \cdot 0^2 - 200 \cdot (-1)^2 = 200.00$$

Macierz A można więc przedstawić w postaci :

$$A = \bar{U}^T \cdot D \cdot \bar{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 200 & 0 & 0 \\ 0 & 200 & 0 \\ 0 & 0 & 200 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Teraz już łatwo rozwiążemy układ równań, stosując (A. 13), (A. 14) i (A. 15):

$$Z_1 = B_1 = 15,$$

$$Z_2 = B_2 - \bar{U}_{12}Z_1 = 30 - (-1.0) \cdot 15 = 45,$$

$$Z_3 = B_3 - \bar{U}_{13}Z_1 - \bar{U}_{23}Z_2 = 30 - (0) \cdot 15 - (-1) \cdot 45 = 75,$$

$$Y_1 = \frac{Z_1}{D_{11}} = \frac{15}{200} = 0.075,$$

$$Y_2 = \frac{Z_2}{D_{22}} = \frac{45}{200} = 0.225,$$

$$Y_3 = \frac{Z_3}{D_{33}} = \frac{75}{200} = 0.375,$$

i w końcu

$$X_3 = Y_3 = 0.375,$$

$$X_2 = Y_2 - \bar{U}_{23}X_3 = 0.225 - (-1) \cdot 0.375 = 0.600,$$

$$X_1 = Y_1 - \bar{U}_{12}X_2 - \bar{U}_{13}X_3 = 0.075 - (-1) \cdot 0.600 - (0) \cdot 0.375 = 0.675.$$