

10.



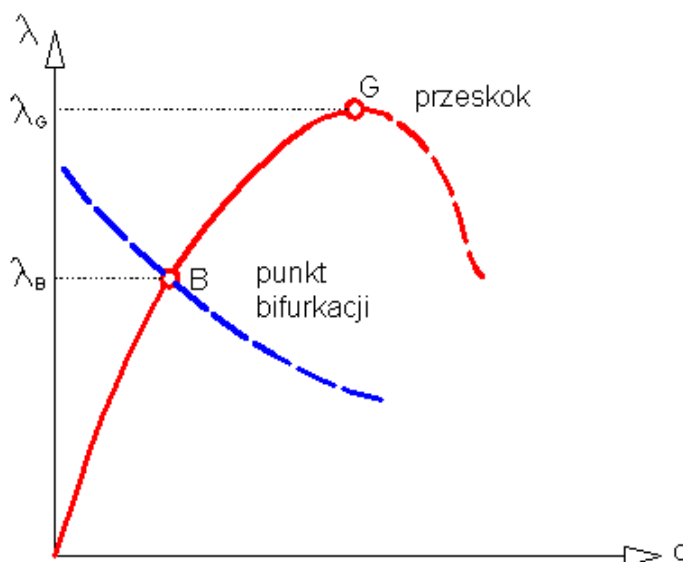
WYBRANE ZAGADNIENIA STATECZNOŚCI KONSTRUKCJI

Zagadnienia stateczności konstrukcji odbiegają w zasadzie od tematyki niniejszego opracowania, które poświęcone jest zastosowaniom metody elementów skończonych w liniowej mechanice konstrukcji. Równania teorii stateczności są bowiem nieliniowe. Dla pewnych zachowań konstrukcji równania te można linearyzować, dochodząc do tzw. liniowej teorii stateczności, którą zajmujemy się w niniejszym rozdziale. Przypomnimy krótko podstawy teorii stateczności konstrukcji oraz podamy na przykładzie konstrukcji prętowych i płytowych sposób analizy liniowej stateczności-metodą elementów skończonych.

10.1 Podstawowe elementy teorii stateczności konstrukcji

Teoria stateczności konstrukcji zajmuje się wyznaczaniem obciążeń i stanów krytycznych konstrukcji, stanów, którym towarzyszą gwałtowne zmiany postaci jej deformacji lub wartości przemieszczeń pewnych jej punktów.

W teorii stateczności wyróżnia się dwa typy utraty stateczności (czyli obciążeń wywołujących te stany): utrata stateczności przez osiągnięcie punktu granicznego (maksimum obciążenia) i utrata stateczności przez wyboczenie bi-furkacyjne. Oba te stany zilustrowano na rysunku 10.1, gdzie w osiach: parametr obciążenia i przemieszczenie reprezentatywnego stopnia swobody pokazano tzw. ścieżki równowagi. W rzeczywistości takie proste zachowanie nie zawsze jest spotykane. Przedstawione krzywe jednak dobrze ilustrują wiele przypadków zachowania się modeli konstrukcji. W celu zanalizowania zjawiska osiągnięcia punktu granicznego (punkt G na rys.10.1) należy badać nieliniowe zachowanie się konstrukcji. W procesie obciążania sztywność konstrukcji maleje (maleje kąt nachylenia stycznej do wykresu A-d). W chwili osiągnięcia punktu granicznego krzywa ta osiąga maksimum. Jeżeli intensywność obciążenia nie zmienia się, to następuje przeskok do nowej konfiguracji i konstrukcja może ulec zniszczeniu na skutek dużych odkształceń. Przypadek ten zachodzi dla mało-wyniosłych łuków i przekryć powłokowych. W punkcie granicznym następuje przeskok do nowej konfiguracji o przeciwnej krzywiznie łuku lub powłoki, w związku z czym używamy również termin: punkt przeskoku.



Rys. 10.1. Możliwe ścieżki równowagi w zagadnieniach stateczności konstrukcji

Termin wyboczenie bifurkacyjne odnosi się do innego typu zjawiska. W punkcie bifurkacji, czyli rozdzielenia ścieżki równowagi (punkt B na rys.10.1) konstrukcja zaczyna się deformować w nowej formie, która jest całkiem odmienna od postaci deformacji przed wyboczeniem (punktem bifurkacji). W przypadku, gdy nowa forma deformacji charakteryzuje się ujemną styczną do krzywej A-d, to może nastąpić zniszczenie konstrukcji, podobnie jak dla punktu przeskoku. Obszerne omówienie zastosowań MES do analizy statecz-

ności konstrukcji zawiera praca [24]. W kontekście omawianych zagadnień stateczności można metodę elementów skończonych zastosować do analizy przynajmniej czterech przypadków:

- nieliniowego zachowania się przedkrytycznego,
- wyznaczeniu punktów bifurkacji,
- wyznaczeniu punktów granicznych,
- analizy pokrytycznej.

Jak wspomnieliśmy wyżej, zajmiemy się wyznaczaniem punktów krytycznych typu biurkacyjnego, gdyż do analizy punktów granicznych wymagana jest pełna analiza nieliniowa. Stan przedkrytyczny otrzymamy z liniowego zachowania się konstrukcji, pamiętając, że popełniamy w tym miejscu pewien błąd, który w zasadzie trudno a priori określić. Założymy zatem, że w stanie przed wyboczeniowym można aproksymować związki geometryczne tylko ich liniowymi członami. Pokażemy również w jaki sposób można zweryfikować otrzymane wyniki, tj. oszacować ewentualny błąd wynikający z linearyzacji stanu przed- krytycznego.

10.2 Stany krytyczne układów zachowawczych

Do analizy stanu krytycznego układów zachowawczych (tj. takich, dla których praca nie zależy od historii obciążenia) można stosować podejście statyczne, które polega na badaniu sąsiednich położeń równowagi. Podejście statyczne jest na ogół prostsze od podejścia bardziej ogólnego jakim jest podejście dynamiczne, w którym analizuje się drgania swobodne układu. Podejście statyczne wystarcza do analizy stateczności większości konstrukcji inżynierskich. Kryterium statyczne bazuje na twierdzeniu Lagrange'a-Dirichleta, według którego stan równowagi układu zachowawczego jest stateczny wtedy, gdy energia potencjalna jest w tym stanie dodatnio określona (w stanie równowagi występuje minimum energii potencjalnej).

W liniowych układach zachowawczych twierdzenie Lagrange'a-Dirichleta jest koniecznym i wystarczającym warunkiem osiągnięcia stanu równowagi statecznej. Nawiązując do tego twierdzenia można określić stan krytyczny równowagi na podstawie warunków:

$$\delta\Pi = 0 \quad \text{ i } \quad \delta^2\Pi = 0 \quad (10.1)$$

które nazywa się kryterium energetycznym. W bliskim otoczeniu stanu krytycznego przyrost energii potencjalnej można zapisać jako

$$\Delta\Pi = \delta\Pi + \frac{1}{2!}\delta^2\Pi + \frac{1}{3!}\delta^3\Pi + \dots \quad (10.2)$$

Ponieważ w stanie krytycznym pierwsza i druga wariacja są równe zeru, tzn. $\delta\pi = \delta^2\pi = 0$, to o stateczności bądź niestateczności stanu krytycznego decydują wyższe wariacje; wówczas

$$\Delta\Pi = \frac{1}{3!}\delta^3\Pi + \frac{1}{4!}\delta^4\Pi + \dots \quad (10.3)$$

Kryterium energetyczne, do którego ograniczymy się w obliczeniach określa tylko stan krytyczny równowagi bez informacji, jakiego rodzaju jest ten stan (stateczny czy niestateczny).

Bilans energii potencjalnej można w układach odkształcalnych zapisać w postaci:

$$\Pi(d, \lambda) = U(d) - W(d, \lambda), \quad (10.4)$$

gdzie przez U oznaczono energię odkształcenia, a przez W - energię obciążeń zewnętrznych.

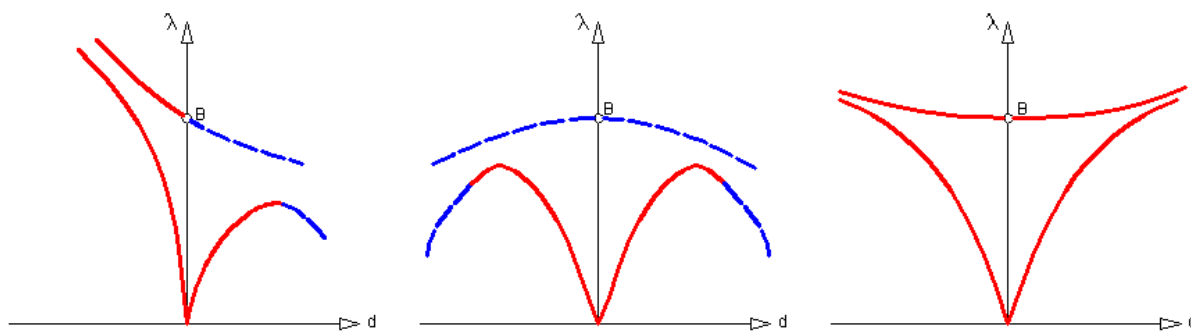
Praca obciążeń zewnętrznych zależy od wektora parametrów obciążenia A . Dla przypadku obciążenia jednoparametrowego, do którego ograniczymy się dalej, określonego skalarnym mnożnikiem A , równanie (10.4) można zapisać w postaci:

$$\Pi(d, \lambda) = U(d) - \lambda W^*(d), \quad (10.5)$$

gdzie W jest porównawczą pracą obciążenia zewnętrznego (obliczoną np. dla $\lambda = 1$). W przypadku zagadnień liniowej stateczności U i W są formami kwadratowymi.

Podkreślmy jeszcze raz, że opis liniowy pozwala obliczyć jedynie obciążenia krytyczne, bowiem do analizy stanu pokrytycznego musielibyśmy stosować sformułowanie nieliniowe. Równania (10.1) zatem wyznaczają tylko punkty krytyczne na ścieżkach równowagi.

W analizie stateczności wyróżnia się - przy podejściu statycznym - trzy typy punktów bifurkacji: niesymetryczny, symetryczny stateczny i symetryczny niestateczny. Punkty te zilustrowano na rysunku 10.2. Klasyfikacja powyższa dotyczy tzw. układów idealnych, tzn. takich, dla których są spełnione pewne założenia o idealności w odniesieniu do geometrii (prostoliniowość prętów, idealnie płaskie płyty), sposobu obciążenia (brak mimośrodów) oraz właściwości materiałów (jednorodność). Odstępstwa od założeń układu idealnego są nazywane imperfekcjami (niedokładnościami). Imperfekcje mogą wpływać na obniżenie, podwyższenie lub nawet brak obciążeń krytycznych, które zostały obliczone dla konstrukcji idealnych. Na rysunku 10.2 przedstawiono również efekt występowania imperfekcji (a) dla układów idealnych. Wykresy te ilustrują zjawisko braku punktów bifurkacji równowagi w układach rzeczywistych (z imperfekcjami). W przypadku bifurkacji niestatecznych zastępowane są one przez punkty graniczne (maksimum obciążenia). Mówimy, że układ jest wrażliwy na imperfekcje, gdy ich narastanie obniża wartość obciążenia krytycznego, obliczonego dla układu idealnego. Widać więc, że układy charakteryzujące się niestatecznymi punktami bifurkacji będą wrażliwe na początkowe imperfekcje.



Rys. 10.2. Klasyfikacja punktów bifurkacji

Wydawać się zatem może, że analiza bifurkacyjna nie ma większego znaczenia praktycznego. Znajomość punktów bifurkacji jest nie tylko bardzo użyteczna w analizie nieliniowej ale daje w wielu przypadkach wyniki zbliżone do rzeczywistego zachowania się konstrukcji. Jest przy tym "tania" w porównaniu z pełną analizą nieliniową i czasem ze względu na ten fakt stanowi jedyną informację o krytycznym zachowaniu się konstrukcji.

Przejdźmy teraz do przedstawienia sposobu wyznaczania obciążeń bifurkacyjnych (krytycznych), czyli do podstawowego zadania liniowej stateczności konstrukcji. Rozwiązanie problemu prześledzimy na przykładzie wyboczenia konstrukcji prętowych i płytowych.

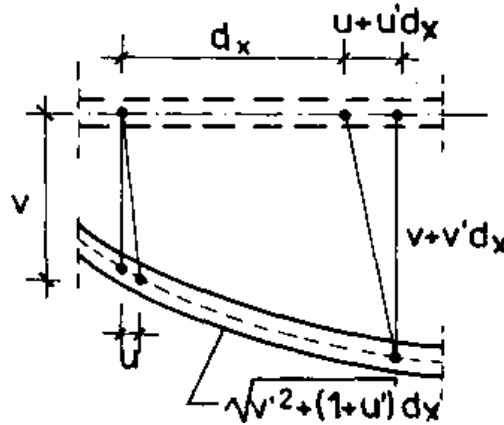
10.3. Sformułowanie macierzy dla płaskiego elementu belkowego

Przed przystąpieniem do formułowania stosownych macierzy występujących w zagadnieniu stateczności prętów przypomnijmy, że w liniowej analizie statycznej macierz sztywności elementu belkowego otrzymaliśmy, wykorzystując w związkach geometrycznych (e-d) tylko człony liniowe. Aby uwzględnić efekt działania siły osiowej na zginanie, należy uwzględnić w tych związkach pewne człony nieliniowe, które wiążą odkształcenie osiowe z obrotem przekroju wywołanym poprzecznymi przemieszczeniami (zginaniem). Zakładamy ponownie, że obowiązuje hipoteza Bernoulliego. W stanie przedkrytycznym pręt jest obciążony siłą osiową N , tak że tensor naprężeń redukuje się do naprężenia normalnego σ stałego w przekroju. Odkształcenie odpowiadające temu naprężeniu wynosi:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \kappa y = (u_{,x} - v_{,xx} y) + \frac{1}{2} u_{,x}^2 + \frac{1}{2} v_{,x}^2, \quad (10.6)$$

gdzie u i v oznaczają przemieszczenia osi pręta.

W wyrażeniu powyższym pojawiły się dodatkowe człony nieliniowe, które można otrzymać z analizy długości pręta przed wyboczeniem i w chwili wyboczenia (rys. 10.3). Człon $0.5u_{,x}^2$ można w większości przypadków pominąć, ponieważ przejście pręta ze stanu prostoliniowego (przedkrytycznego) do giętnego na skutek wyboczenia jest wywołane przede wszystkim zginaniem pręta, w związku z czym człon ten w porównaniu z $0.5v_{,x}^2$ jest wielkością małą. Człon $0.5v_{,x}^2 dx$ określa przemieszczenie osiowe wywołane obrotem przekroju pręta.



Rys. 10.3. Duże odkształcenie elementarnego wycinka pręta

Do dalszych rozważań przyjmijmy odkształcenie osiowe w postaci:

$$\varepsilon = u_{,x} - v_{,xx} y + \frac{1}{2} v_{,x}^2. \quad (10.7)$$

Bilans energii dla analizowanego układu wynosić będzie:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\int_A E (u_{,x} - v_{,xx} y)^2 \cdot dA \right) \cdot dx + \int_0^L N \frac{1}{2} v_{,x}^2 dx. \quad (10.8)$$

Pierwsza całka prowadzi do znanej już nam macierzy sztywności \mathbf{k}_e . Druga całka przedstawia pracę siły N na przyroście przemieszczenia $-0.5v_{,x}^2 dx$ i otrzymamy z niej tzw. macierz początkowych naprężeń, nazywaną również macierzą geometryczną.

Przyjmując, podobnie jak w rozdziale 5, aproksymację pola przemieszczeń w postaci

$$v = Nd = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ \phi_1 \\ v_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix}, \quad (10.9)$$

gdzie macierz N zawiera wielomiany Hermita, nieliniową część odkształcenia zapiszemy w postaci:

$$\frac{1}{2} v_{,x}^2 = \frac{1}{2} (N_{,x} d)^2 = \frac{1}{2} d^T N_{,x}^T N_{,x} d. \quad (10.10)$$

Zakładając że siła N jest stała, drugi składnik wyrażenia na energię (10.8) zapiszemy jako

$$\frac{1}{2} N d^T \int N_{,x}^T N_{,x} dx \cdot d = \frac{1}{2} d^T \int N_{,x}^T \sigma N_{,x} dx \cdot d, \quad (10.11)$$

gdzie macierz σ jest w tym przypadku skalarem.

Stosując teraz twierdzenie o minimum energii potencjalnej, otrzymujemy, podobnie jak w rozdziale 5, wyrażenie

$$(k^0 + k^\sigma) d = R, \quad (10.12)$$

gdzie macierz k jest dobrze znaną liniową macierzą sztywności, zaś k jest macierzą początkowych naprężeń, której współczynniki dla pręta o stałym przekroju poprzecznym wynoszą:

$$k^\sigma = \int N N_{,x}^T N_{,x} dx = \frac{N}{30 \cdot L} \cdot \begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ -36 & -3L & 36 & -3L \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix}. \quad (10.13)$$

Zauważmy, że macierz k nie zależy od własności sprężystych pręta, lecz jest funkcją geometrii pręta i wewnętrznych sił (w naszym przypadku siły osiowej). Uzasadniona więc jest stosowana czasem nazwa tej macierzy: macierz sztywności geometrycznej. Jej wyrazy mają fizyczną interpretację: są to dodatkowe siły powstające przy jednostkowych przemieszczeniach węzłów powstałe przy obecności siły osiowej N . Macierz k można uprościć do postaci:

$$k^\sigma = \frac{N}{L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (10.14)$$

Przyjmując w (10.10)' $v_{,x} = 1/L (d_5 - d_2)$, $v_{,x}$ oznacza zmianę nachylenia cięciwy łączącej oba węzły.

Zainteresowani Czytelnicy mogliby wykazać, że macierz postaci (10.14) jest równa macierzy geometrycznej dla pręta kratownicy płaskiej.

Równanie (10.12) opisuje stan równowagi dla elementu prętowego. Dokonując agregacji elementów, można ostateczny układ równań zapisać w postaci:

$$(k^0 + k^\sigma) d = R. \quad (10.15)$$

Stan krytyczny otrzymamy obliczając wariację (10.15):

$$\delta^2 \Pi = (k^0 + k^\sigma) \delta d = 0, \quad (10.16)$$

skąd mamy

$$\det(K^0 + K^\sigma) = 0. \quad (10.17)$$

Zgodnie z kryterium energetycznym (10.1) warunkiem koniecznym utraty stateczności układu jest zerowanie się drugiej wariacji energii potencjalnej układu $\delta^2 n$, tzn.

$$\delta[(k^0 + k^\sigma)d - R] = 0, \quad (10.18)$$

$$[(k^0 + k^\sigma)\delta d] = 0, \quad (10.19)$$

co oznacza, że w stanie krytycznym macierz $(k^0 + k^\sigma)$ jest osobliwa. Do równania (10.19) można dojść również inną drogą. Przyjmijmy mianowicie, że ustalono obciążeniu R odpowiadają dwa różne rozwiązania d_1 i d_2 (będzie to zatem punkt bifurkacji), które spełniają równania:

$$(k^0 + k^{\sigma*})d_1 = R^* \quad (k^0 + k^{\sigma*})d_2 = R^* , \quad (10.20)$$

gdzie przez $K(\sigma)$ oznaczono zależność macierzy od naprężeń. Po odjęciu tych równań stronami, otrzymujemy:

$$(K^0 + K^{\sigma*})v = 0 \quad (10.21)$$

gdzie $v = d_1 - d_2$. Niezerowe rozwiązanie tego równania występuje w przypadku, gdy

$$\det(K^0 + K^{\sigma*}) = 0 \quad (10.22)$$

W analizie stateczności konstrukcji inżynierskich przyjmujemy zazwyczaj następujące założenia:

- obciążenie R jest proporcjonalne do parametru λ , czyli $R = \lambda \cdot R^*$, gdzie A jest mnożnikiem obciążenia, zaś wektor R^* - pewnym obciążeniem porównawczym,
- naprężenia σ otrzymujemy z rozwiązania liniowego zadania statyki:

$$k^0 d = R^*, \quad (10.23)$$

czyli

$$\sigma = \lambda \sigma^* \quad \text{ i } \quad d = \lambda d^*.$$

Równanie (10.21) stanowi równanie tzw. stateczności początkowej konstrukcji i odpowiada klasycznemu sformułowaniu problemu stateczności (Eulera). Jak widać równanie to opisuje uogólnione zagadnienie własne, szczegółowo opisane w rozdziale 9 przy okazji analizy drgań układów sprężystych. Rozwiązaniem równania jest ciąg par złożonych z wartości i wektorów własnych (λ_1, v_1) , (λ_2, v_2) , (λ_n, v_n) . Ze względów praktycznych interesuje nas najmniejsza wartość $\lambda_{MIN} = \lambda_{KR}$ zwana krytycznym mnożnikiem obciążenia. Obciążenie wywołujące bifurkację stanu równowagi wynosi zatem:

$$R_{kr} = \lambda_{kr} R^*. \quad (10.24)$$

Wektor własny, odpowiadający tej wartości określa postać wyboczenia względem rozwiązania liniowego d (przedkrytycznego). Równanie (10.21) sprowadza się zwykle, podobnie jak w przypadku dynamicznym, do postaci standardowej (porównaj (9.31) w rozdz.9), korzystając z rozkładu macierzy K^σ lub K^0 . W drugim przypadku interesować nas będzie największa wartość własna $\eta = 1/\lambda_{MIN}$. skąd $\lambda_{KR} = \lambda_{MIN} = 1/\eta$

Podsumujmy powyższe rozumowanie w postaci algorytmu liniowego problemu stateczności:

1. Rozwiązujemy liniowy problem statyki:

$$K^0 d = R^* \rightarrow d^* = (K^0)^{-1} R^*$$

2. Obliczamy σ^* na podstawie wektora d^*
3. Budujemy macierz początkowych naprężeń $K(\sigma^*)$
4. Rozwiązujemy problem własny:

$$(K^0 + \lambda K(\sigma^*))v = 0,$$

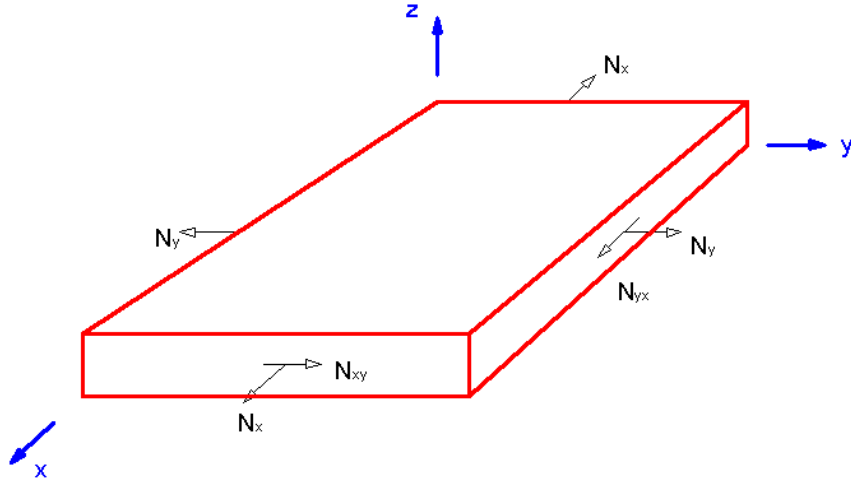
z którego obliczamy

$$\lambda_{kr} = \lambda_{\min} \quad \text{i} \quad R_{kr} = \lambda_{kr} R^*$$

Podkreślmy jeszcze raz, że analiza stateczności początkowej nie określa typu punktu bifurkacji. Zadanie to wchodzi w zakres analizy nieliniowej, która nie jest przedmiotem rozważań w tym opracowaniu.

10.4 Sformułowanie macierzy dla elementu płytowego

Zagadnienie stateczności liniowej cienkich płyt jest ze względu na powszechność stosowania tych konstrukcji (elementy niemal wszystkich metalowych konstrukcji cienkościennych) praktycznie bardzo ważny. W rozdziale 5 wyznaczyliśmy macierze sztywności dla kilku elementów skończonych płytowych. Poniżej podamy sposób budowy macierzy sztywności dla prostokątnego elementu płytowego. Sposób wyznaczania macierzy geometrycznej jest bardzo podobny do tego, który stosowaliśmy dla elementu belkowego.



Rys. 10.4. Definicja sił wewnętrznych dla elementu płytowego

Przyjmijmy, że element płytowy jest obciążony w swojej płaszczyźnie środkowej siłami N_x , N_y , N_{xy} , jak na rysunku 10.4. Nieliniowe człony w związkach geometrycznych, jakie należy uwzględnić w analizowanym zadaniu, wynoszą:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2} w_{,x}^2, \quad \varepsilon_y = \frac{1}{2} w_{,y}^2, \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{2} (w_{,x} w_{,y} + w_{,y} w_{,x}). \quad (10.25)$$

Można wykazać, że wyrazy te wyznacza się podobnie jak w przypadku belki, z tą tylko różnicą, że należy uwzględnić jeszcze drugi kierunek. Wyrażenia (10.25) określają odkształcenia membranowe, wynikające z poprzecznych przemieszczeń w. Nieliniową część odkształceń (10.25) zapiszemy w postaci:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} d^T \begin{bmatrix} N_{,x}^T N_{,x} \\ N_{,y}^T N_{,y} \\ N_{,x}^T N_{,y} + N_{,y}^T N_{,x} \end{bmatrix} \quad (10.26)$$

gdzie przyjęto ponownie, że

$$w = Nd = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} \cdot d. \quad (10.27)$$

Energię związaną z tym odkształceniem zapiszemy jako:

$$U = \frac{1}{2} \int_A (\sigma_x (w_{,x})^2 + \sigma_y (w_{,y})^2 + 2\tau_{xy} w_{,x} w_{,y}) dx dy = \frac{1}{2} \int_A \begin{bmatrix} w_{,x} & w_{,y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_{,x} \\ w_{,y} \end{bmatrix} dx dy = \frac{1}{2} \int_A G^T \cdot \sigma \cdot G dx dy \quad (10.28)$$

gdzie

$$G = \begin{bmatrix} w_{,x} \\ w_{,y} \end{bmatrix} \cdot d.$$

Wykonując odpowiednie całkowania i obliczając pierwszą wariację wyrażenia (10.28), dochodzimy do macierzy:

$$k^\sigma = k_x + k_y + k_{xy},$$

lub

$$k^\sigma = \int_A w_{,x} w_{,x} dx dy, \quad (10.29)$$

gdzie

$$\begin{aligned} k_x &= \sigma_x \int_A w_{,x} w_{,x} dx dy, \\ k_y &= \sigma_y \int_A w_{,y} w_{,y} dx dy, \\ k_{xy} &= \tau_{xy} \int_A 2w_{,x} w_{,y} dx dy, \end{aligned}$$

W powyższych wyrażeniach założono, że naprężenia są stałe w obszarze elementu. Gdy do wyznaczenia macierzy stosuje się całkowanie numeryczne, to naprężenia obliczone w punktach całkowania mogą być różne. Rozbicie macierzy (10.29) na trzy składniki jest uzasadnione tym, że w wielu przypadkach praktycznych interesuje nas wyboczenie płyty obciążonej tylko jednym typem sił krawędziowych. W ten sposób nie wykonuje się niepotrzebnych operacji całkowania i mnożenia. Ponieważ założyliśmy, że obciążenia są proporcjonalne, to warunek stateczności układu wykorzystując ten sam sposób zapisu, co w punkcie poprzednim, możemy zapisać następująco:

$$(K^0 + K(\sigma^*))v = 0, \quad (10.30)$$

lub

$$(K^0 + \lambda(K(\sigma_x^*) + K(\sigma_y^*) + K(\tau_{xy}^*)))v = 0.$$

Przyjęcie dekompozycji macierzy geometrycznej w postaci (10.29) umożliwia, w łatwy sposób, ustalenie proporcji obciążeń σ_x , σ_y , τ_{xy}

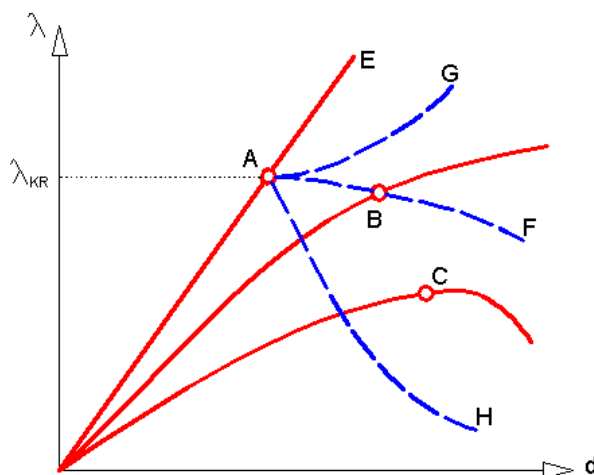
Zauważmy jeszcze na koniec, że macierze geometryczne (10.13) i (10.29) mają w zasadzie tę samą postać. Podobną postać miałyby macierze geometryczne dla innych elementów. Macierze te zawsze będą zależeć w sposób liniowy od naprężeń. Ten fakt pozwolił na opracowanie prostej i ogólnej metody analizy wyboczenia metodą elementów skończonych.

10.5. Uwagi końcowe

Przypomnijmy na koniec ograniczenia przedstawionej powyżej analizy. Założyliśmy, że stan przedkrytyczny jest liniowy, tzn. relacja siła-przemieszczenie jest linią prostą. Fakt ten zaznaczono na rysunku 10.5 linią prostą OAE (w przypadku prętów prostych i płyt idealnie płaskich prosta OAE pokrywa się z osią pionową OA).

Punkt bifurkacji A wyznaczyliśmy z równania klasycznego problemu wytoczenia, czyli z równania tzw. stateczności początkowej. Śledzenie ścieżki AE jest możliwe tylko teoretycznie, na przykład w trakcie eksperymentu numerycznego. Ścieżki AF, AG i AH są ścieżkami pobifurkacyjnymi (pokrytycznymi), które zawsze się otrzymuje przekraczając punkt krytyczny λ_{KR} . Postać tych ścieżek zależy od typu analizowanej konstrukcji. Ścieżka AG charakteryzuje tzw. stateczne pokrytyczne zachowanie, podczas gdy ścieżka AH prowadzi do punktu przeskoku dla $\lambda < \lambda_{KR}$.

Analiza nieliniowa (tutaj nie przedstawiona) prowadzi do ścieżki OB poniżej punktu bifurkacji dla układu idealnego, a do ścieżki OC - dla układu z imperfekcjami.



Rys. 10.5. Różne ścieżki równowagi w zagadnieniach stateczności konstrukcji

Sztywność układu charakteryzowana przez macierz $(\mathbf{K}^0 + \mathbf{K}^\sigma)$, była wyznaczana dla konfiguracji początkowej układu (konfiguracji nieodkształconej). Proces obciążania układu powoduje, oczywiście, jego deformowanie się i w zasadzie postać krzywych λ - d ma charakter ścieżek OB i OC. Zachowanie się układu pod działaniem obciążenia jest zatem zależne od deformacji. Musimy pamiętać, że w przedstawionym algorytmie pomijaliśmy te efekty. Otrzymywane rozwiązania są tylko rozwiązaniami przybliżonymi. Oczywiście będą one tym bliższe rozwiązaniom dokładnym im odejście ścieżek OA i OB będzie mniejsze. Aby się jednak o tym przekonać, należy dokonać analizy nieliniowej lub przynajmniej rozwiązać problem zlinearyzowanej stateczności, polegający na uwzględnieniu wpływu początkowych przemieszczeń (deformacji powstałej na skutek przyłożenia obciążenia) na wartości obciążenia bifurkacyjnego. Zainteresowanych tą tematyką odsyłamy do literatury.

Zadania

1. W wyrażeniu (10.8) uwzględnić nieliniowy człon wynikający ze skrócenia osi pręta i obliczyć odpowiednią poprawkę do macierzy początkowych naprężeń.
2. Rozwiązać za pomocą jednego a następnie dwóch elementów zagadnienie wyboczenia pręta swobodnie podpartego na obu końcach i o stałym EI. Porównać otrzymane wyniki z wartością dokładną.
3. Rozwiązać zadanie 2 dla dwóch, a następnie czterech, elementów wykorzystując symetrię zadania.
4. Znaleźć zależność P - S dla kratownicy Misesa, przedstawionej na rysunku.

