

## 2. WPROWADZENIE



### 2.1. Czym jest MES

Element skończony jest podobszarem zdyskretyzowanego kontinuum. Jego wymiar jest skończony (nie jest infinitezymalnie mały), a jego kształt jest zwykle prostszy od kształtu geometrii problemu, który jest idealizowany. Najważniejszą cechą metody elementów skończonych (lub metody elementu skończonego) jest możliwość zastąpienia problemu analitycznego, zapisywanego za pomocą równań różniczkowych, problemem algebraicznym. Zabieg ten znacznie upraszcza postępowanie prowadzące do rozwiązania problemu, a w wielu przypadkach, szczególnie w zastosowaniach rzeczywistych problemów inżynierskich, umożliwia w ogóle znalezienie satysfakcjonujących wyników.

Podkreślmy, że klasyczna analiza problemów mechaniki ośrodków ciągłych wymaga znalezienia funkcji pól naprężeń, odkształceń i przemieszczeń, które spełniają równania różniczkowe równowagi, zależności konstytutywne oraz warunki zgodności geometrycznej w każdym punkcie obszaru, włączając w to również brzegi. Te niezwykle silne ograniczenia spowodowały, że klasycznych rozwiązań analitycznych jest bardzo mało. Ponadto dyskretyzacja równań różniczkowych za pomocą metody różnic skończonych ma zasadniczą wadę, polegającą na trudnościach w modelowaniu warunków brzegowych co wiedzie do wyników obarczonych dużymi błędami.

Metoda elementów skończonych opiera się na przyjęciu aproksymacji pola przemieszczeń lub pola naprężeń czy też połączeniu tych przybliżeń w każdym elemencie. My ograniczymy się w tym opracowaniu do tak zwanego sformułowania przemieszczeniowego, zakładającego wyłącznie funkcje aproksymujące właśnie pole przemieszczeń.

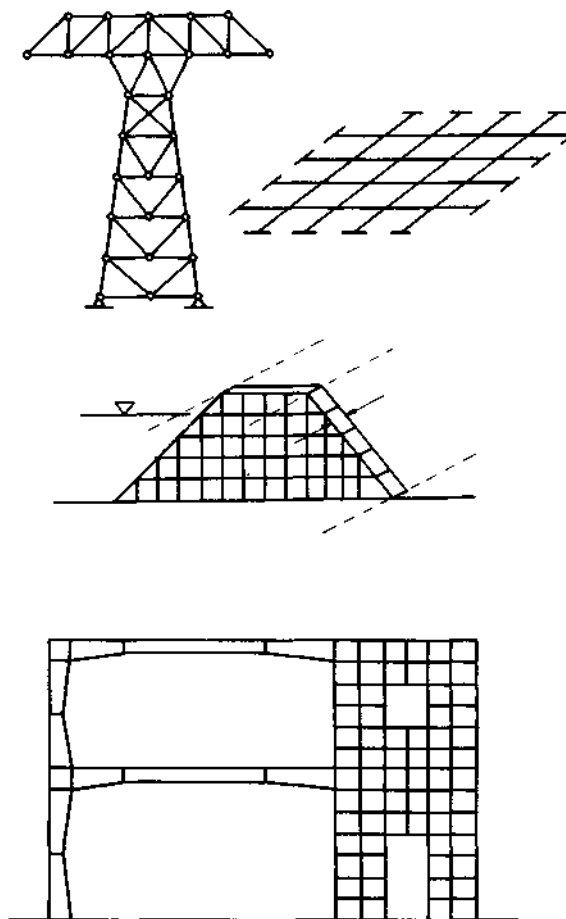
Jakkolwiek zasadniczą dziedziną aplikacji stosowanej tu metody jest mechanika konstrukcji inżynierskich, to nie chcielibyśmy, by Czytelnik odniósł wrażenie, że metoda ta służy wyłącznie do rozwiązywania zadań inżynierskich. Jest to główna przyczyna, dla której umieszczono w tym opracowaniu rozdział 4, pokazujący aproksymacyjne podejścia do problemu rozwiązywania równań różniczkowych.

W sytuacji, gdy mówimy o konstrukcji i zakładamy funkcje aproksymujące przemieszczenia w elementach, niezbędne są następujące kroki prowadzące do rozwiązania problemu, na przykład statyki konstrukcji:

1. dokonać podziału kontinuum (rama, płyta, tarcza) na skończoną liczbę podobszarów (elementów) o nieskomplikowanej geometrii (trójkąty, czworokąty itp.),
2. wybrać szczególne punkty (węzły) w tych elementach, w których będą wymuszone warunki równowagi i zgodności,
3. założyć funkcje przemieszczeń w każdym elemencie, tak by przemieszczenia dowolnego punktu elementu zależały tylko od przemieszczeń jego węzłów (poszukiwane będą przemieszczenia wszystkich węzłów układu),
4. spełnić zależności odkształcenie-przemieszczenie i naprężenie-odkształcenie dla elementów,
5. wyznaczyć sztywność i równoważne obciążenia węzłowe dla elementu na podstawie równania pracy wirtualnej lub zasad energetycznych,
6. ułożyć równania równowagi węzłów zdyskretyzowanego układu na podstawie informacji z poziomu elementów,
7. rozwiązać układ równań równowagi (równania liniowe algebraiczne), znajdując przemieszczenia wszystkich węzłów,
8. obliczyć naprężenia w wybranych punktach elementów,
9. wyznaczyć reakcje w węzłach podporowych.

W wielu zastosowaniach inżynierskich podział kontinuum na elementy narzuca się niejako sam, głównie w przypadkach, gdy struktura składa się z elementów prostych (kratownic, ram). W innych przypadkach złożonych stanów naprężeń podział ten wcale nie jest taki oczywisty. Trzeba dysponować dużym doświadczeniem, by umieć dobrze zasugerować dyskretyzację. Przykłady dyskretyzacji różnych układów konstrukcyjnych pokazano na rysunku 2.1.

Większość wymienionych wyżej punktów mogłaby stać się przedmiotem osobnych opracowań i każde z nich zawierałoby wiele szczegółów, których nie sposób było zamieścić w tym opracowaniu. Zdajemy sobie sprawę, że chcąc poruszyć tyle ważnych z inżynierskiego punktu widzenia problemów, musieliśmy dokonać pewnego wyboru.



Rys. 2.1. Dyskretyzacja konstrukcji

## 2.2. Co zawiera opracowanie

Poruszane problemy dotyczą elementów mechaniki, w związku z czym znacznym ułatwieniem dla Czytelnika byłoby przypomnienie zagadnień z kursów wytrzymałości materiałów, mechaniki budowli i teorii sprężystości. W ogóle uważamy, że w prawidłowo zorganizowanym procesie dydaktycznym wszelkie sformułowania numeryczne problemów inżynierskich powinny być poprzedzone gruntowną wiedzą "klasyczną". Niezwykle pomocna może tu być wiedza z algebry liniowej (rachunek macierzowy, problemy rozwiązywania układów równań liniowych czy problemy wektorów i wartości własnych) oraz z teorii aproksymacji i klasycznego rachunku wariacyjnego. Wybrane pozycje literatury, które pomogą w lepszym rozumieniu tego opracowania, jak i te, które pozwolą na dalsze studia nad metodą elementów skończonych, zestawiono na końcu opracowania.

W rozdziale 3 niniejszego opracowania zamieszczono najprostszą ilustrację MES na przykładzie kratownicy płaskiej i przedstawiono zasadnicze kroki procesu obliczania konstrukcji.

W rozdziale 4 omówiono różne podejścia do aproksymacyjnego rozwiązywania równań różniczkowych, ukazując zasadnicze różnice między aproksymacją dokonywaną na całym obszarze a taką, którą przyjmuje się w podobszarce. Kontynuowanie w tym rozdziale tego samego przykładu numerycznego pozwoliło na porównanie skuteczności i dokładności przyjmowanych aproksymacji.

W kolejnym rozdziale podsumowano podstawowe równania liniowej sprężystości równoległe w zapisach wskaźnikowym i wygodnym dla nas macierzowym. Zdefiniowano podstawy metody elementów skończonych, wynikające z równania pracy wirtualnej i wykorzystania funkcjonału całkowitej energii potencjalnej. W tymże rozdziale 5 omówiono też wybrane elementy skończone jednowymiarowe.

W rozdziale 6 zawarto analizę płaskich stanów naprężenia i odkształcenia i dyskusję nad elementami używanymi do opisanie tych stanów.

Po wyprowadzeniu praw transformacji wektorów i macierzy z układu współrzędnych lokalnego do globalnego w (rozdz.3.), dalej wykorzystano głównie opisy lokalne, nie rozważając każdorazowo bardzo podobnych elementów transformacji. W rozdziale 7 zaproponowano opis izoparametryczny (powszechnie używany przy definiowaniu elementów skończonych) i omówienie kolejnych elementów dwu- i trójwymiarowych. Niezbędne tutaj było odwołanie się do procedur całkowania numerycznego.

W rozdziale 8 zamieszczono pewne podstawowe wiadomości o formułowaniu elementów płytowych i powłokowych. Te właśnie konstrukcje wykorzystuje się często w praktyce inżynierskiej i one właśnie najlepiej ilustrują siłę metody.

W kolejnych rozdziałach podjęto próbę sformułowania prostych zadań dynamiki i liniowej stateczności, odwołujących się w konsekwencji do rozwiązania problemu własnego. Zdajemy sobie sprawę, że ostatnio nawet na naszym ubogim rynku wydawniczym pojawiły się bardzo wartościowe i obszerne opracowania, które kompleksowo naświetliły problematykę dynamiki i stateczności. Świadomie ograniczyliśmy się do wybranych, najprostszych elementów sformułowań, które mają tylko ilustrować zagadnienia, nie zarysowując nawet części problematyki. Zgodnie z intencją te nie omówione, choć istotne dla Czytelnika problemy będą dyskutowane i komentowane w trakcie wykładu.

W spisie literatury zamieszczono głównie pozycje książkowe, których przestudiowanie polecamy Czytelnikowi. Niestety, duża ich część może okazać się trudno dostępna, co nie powinno zniechęcić zainteresowanych do dalszego poszukiwania i pogłębiania wiedzy na temat zastosowań metody elementów skończonych.

W Dodatkach zestawiono niektóre informacje dotyczące problemów całkowania numerycznych i zagadnień algebraicznych, takich jak rozwiązywanie układów równań liniowych oraz problemu wartości i wektorów własnych.

### Zadania

1. Podaj definicje macierzy i wektora.
2. Które z poniżej zapisanych macierzy są sobie równe?

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 6 & -8 & 2 \\ 5 & 6 & -7 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 6 & -8 & 2 \\ 5 & 6 & -7 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 8 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$

3. Jakie są reguły dodawania i mnożenia macierzy?
4. Dla macierzy, których jawną postać podano w zadaniu 2 wykazać, że spełnione są następujące zależności:

$$A + E = E + A,$$

$$6D = D6,$$

$$F(A + E) = FA + FE,$$

$$(B + D)F = BF + DF,$$

$$BF \neq FB,$$

$$(BF)A = B(FA),$$

$$(BF)^T = F^T B^T.$$

5. Oblicz wartość wyznacznika macierzy  $E$ .
6. Zapisz następujące wektory jako macierze kolumnowe:

$$\begin{aligned}p &= 3i - 6j + 4k, & r &= 5i + 7j, \\q &= 5i + 7k, & u &= 7i - 8j + 15k.\end{aligned}$$

7. Wyznacz długości wektorów  $p$ ,  $q$  i  $u$  z zadania 6.
8. Określ wielkość kąta między wektorami  $q$  i  $u$ .
9. Używając macierzy odwrotnej rozwiąż następujący układ równań:

$$\begin{cases} 5x + 2y + 3z = 5 \\ 2x + 3y + 4z = 7 \\ 3x + 4y + 5z = 9 \end{cases}$$