

## 7. SFORMUŁOWANIE IZOPARAMETRYCZNE



W poprzednich rozdziałach omówiliśmy elementy skończone formułowane za pomocą tzw. współrzędnych uogólnionych. Zakładaliśmy, że przemieszczenia elementu zmieniają się zgodnie z przyjętymi funkcjami, których współczynniki były traktowane jako uogólnione współrzędne elementu. Przypomnijmy raz jeszcze podstawowe kroki tego sformułowania:

1. Przyjęcie pola przemieszczeń

$$u = g \cdot c \quad (7.1)$$

gdzie „g” oznacza tzw. macierz geometryczną, która gromadzi odpowiednie potęgi wielomianów interpolacyjnych, zaś c jest macierzą stałych. Stałe te wyznacza się z warunków brzegowych (przemieszczenia węzłów muszą być zgodne z wartościami przemieszczeń, wynikającymi z przyjętych funkcji).

2. Wyznaczenie macierzy stałych „c” (współrzędnych uogólnionych):

$$d = h \cdot c, \quad \text{gdzie } h = [g_i] \text{ dla } i=1,2,\dots,n_{\text{edf}}. \quad (7.2)$$

Macierz h jest macierzą kwadratową i nieosobliwą, tak więc z (7.2) można wyznaczyć stałe wielomianów interpolacyjnych jako funkcję przemieszczeń węzłów

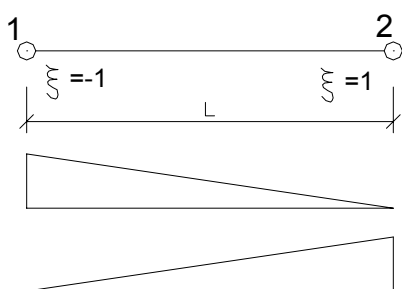
$$c = h^{-1} \cdot d. \quad (7.3)$$

3. Wyznaczenie funkcji kształtu N

$$u = g \cdot h^{-1} \cdot d = N \cdot d$$

więc:

$$N = g \cdot h^{-1} \quad (7.4)$$



$$N_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi)$$

$$N_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi)$$

Rys. 7.1. Dwuwęzłowy element kratownicy płaskiej

4. Wyznaczenie macierzy  $B = L \cdot N$
5. Wyznaczenie macierzy sztywności  $K$  oraz pozostałych wektorów  $p_b, p_0$  lub  $P_T$ , przy ustalonym prawie konstytutywnym  $\sigma = D \cdot \varepsilon$ .

Formułowanie omawianych w tym rozdziale elementów izoparametrycznych (termin izoparametryczny znaczy ten sam) jest prostsze i szczególnie atrakcyjne przy definiowaniu nowych elementów.

Główną ideą formułowania elementów izoparametrycznych jest wyznaczenie funkcji interpolujących (funkcji kształtu), określających relację pomiędzy przemieszczeniami elementu i przemieszczeniami jego węzłów w sposób bezpośredni, bez konieczności obliczania macierzy  $h^{-1}$ .

Proces formułowania elementu izoparametrycznego zanalizujemy na przykładzie najprostszego elementu, jakim jest dwuwęzłowy element kratownicy płaskiej. Na rysunku 7.1 pokazano taki element o węzłach oznaczonych przez 1 i 2. Pierwszym krokiem sformułowania elementu jest wyrażenie globalnych współrzędnych elementu  $x$  od jego współrzędnych naturalnych  $\xi$ , gdzie  $-1 < \xi < +1$ . Transformacja ta jest dana w relacji:

$$x = \frac{1}{2}(1-\xi)x_1 + \frac{1}{2}(1+\xi)x_2 + \dots \quad (7.5)$$

lub

$$x = \sum_{i=1}^2 N_i x_i \quad (7.6)$$

gdzie  $N_1 = 0.5(1-\xi)$  i  $N_2 = 0.5(1+\xi)$  są funkcjami interpolującymi (tutaj liniowymi). Zauważmy, że relacja (7.5) jest jednoznaczna i ustala zależność pomiędzy współrzędnymi  $x$  i  $\xi$ . Globalne przemieszczenia pręta wyrażone są w ten sam sposób, co współrzędne globalne, a mianowicie

$$d = \sum_{i=1}^2 N_i d_i \quad (7.7)$$

Zastosowanie tych samych funkcji interpolujących (funkcji kształtu), zdefiniowanych we współrzędnych naturalnych, do współrzędnych elementu i jego przemieszczeń stanowi podstawę sformułowania izoparametrycznych elementów skończonych. W celu określenia współczynników macierzy sztywności należy znaleźć relację: odkształcenie-przemieszczenie, w naszym przypadku  $\varepsilon = du/dx$ . Mamy więc:

$$\varepsilon = \frac{du}{d\xi} \frac{d\xi}{dx}, \quad (7.8)$$

przy czym  $L$  jest długością elementu. Macierz odkształceń  $B$  ma zatem postać:

$$B = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (7.9)$$

W ogólności związek: odkształcenie-przemieszczenie jest funkcją współrzędnych naturalnych i w celu wyznaczenia macierzy sztywności wymagane jest całkowanie w tych współrzędnych. Korzystając ze znanej już zależności na macierz sztywności, otrzymujemy

$$k = \frac{EA}{L^2} \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot J \cdot d\xi, \quad (7.10)$$

gdzie  $J$  jest jacobianem wiążącym długość elementu we współrzędnych globalnych z długością elementu, wyrażoną we współrzędnych naturalnych, tj.

$$dx = J \cdot d\xi, \quad (7.11)$$

gdzie  $J = L/2$ , skąd otrzymujemy ostatecznie:

$$k = \frac{EA}{L} \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} d\xi, \quad (7.12)$$

Jak widać w powyższym sformułowaniu, nie było potrzeby wyznaczania macierzy  $h^{-1}$ .

Proszę porównać powyższe sformułowanie ze sformulowaniem tego samego elementu, zamieszczonym w rozdziale 5.

### 7.1. Współrzędne naturalne

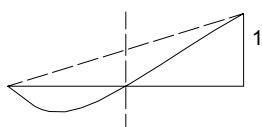
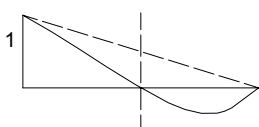
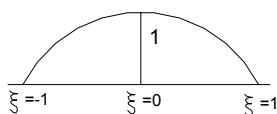
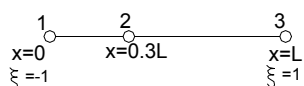
Jak wspomnieliśmy wyżej, podstawą formułowania elementów izoparametrycznych jest wyrażenie współrzędnych elementu i jego przemieszczeń we współrzędnych naturalnych. Ten układ może być układem jedno-, dwu- lub trójwymiarowym w zależności od wymiarów elementu. Podkreślimy, że obliczanie macierzy elementów jest takie samo dla wszystkich tych przypadków. Poniżej przedstawimy sformułowanie najbardziej ogólne, tj. dla przypadku przestrzennego.

Współrzędne elementu przestrzennego wyrazić możemy ogólnie w postaci:

$$x = \sum_{i=1}^q N_i x_i, \quad y = \sum_{i=1}^q N_i y_i, \quad z = \sum_{i=1}^q N_i z_i, \quad (7.13)$$

gdzie  $x, y, z$  są współrzędnymi dowolnego punktu elementu, a  $x_i, y_i, z_i$  ( $i=1, \dots, q$ ) są współrzędnymi jego węzłów. Funkcje kształtu są zdefiniowane we współrzędnych naturalnych  $\xi, \eta, \zeta$ , które zmieniają się od -1 do +1. Nieznanymi w (7.13) pozostają funkcje kształtu  $N_i$ . Funkcje te można wyznaczyć korzystając z fundamentalnej ich własności, a mianowicie z tego, że przyjmują wartość 1 w węźle „ $i$ ”, a wartość „0” w pozostałych węzłach.

Pozostawmy sformułowanie elementu przestrzennego i zilustrujmy powyższe ponownie na przykładzie pręta kratownicy, tym razem o 3 węzłach (rys.7.2).



$$N_2 = 1 - \xi^2$$

$$N_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi) - \frac{1}{2}(1 - \xi^2)$$

$$N_3 = \frac{1}{2}(1 + \xi) - \frac{1}{2}(1 - \xi^2)$$

Rys. 7.2. Trójwęzłowy element kratownicy płaskiej

Zauważmy na początku, że w tym przypadku funkcje kształtu muszą być funkcjami parabolicznymi. Funkcję  $N_2$  zdefiniować najłatwiej, bowiem parabola, która spełnia warunki: dla  $\xi = \pm 1$  równa jest 0, a dla  $\xi = 0$  równa 1, ma postać  $N_2 = (1 - \xi^2)$ . Pozostałe dwie funkcje kształtu wyznaczmy przez superpozycję funkcji liniowej i paraboli. Na przykład dla wyznaczenia  $N_1$  funkcja liniową  $(1 - \xi)/2$  spełnia wymagane warunki: dla  $\xi = -1$  równa jest 1 i dla  $\xi = 1$  równa 0. By spełnić warunek, że dla  $\xi = 0$ ,  $N_1$  jest równe 0, dodajmy do liniowej części parabolę  $-(1 - \xi^2)/2$ . W ten sposób otrzymujemy funkcję kształtu w postaci  $N_1 = 0.5 \cdot (1 - \xi) - 0.5 \cdot (1 - \xi^2)$ . Podobnie wyznaczmy funkcję  $N_3$ .

Przedstawiony wyżej algorytm konstruowania funkcji kształtu można bezpośrednio uogólnić dla elementów dwu i trójwymiarowych. Zauważmy jeszcze, że postać zależności (7.13) wskazuje, że elementy izoparametryczne mogą mieć brzozy zakrzywione, wobec czego w wielu sytuacjach elementy izoparametryczne

są bardzo użyteczne przy modelowaniu geometrycznych warunków brzegowych. Mają one jednak i pewną trudność, polegającą na skomplikowaniu relacji  $\varepsilon$ - $d$ . Wynika to z faktu, że przemieszczenia elementu są wyrażone we współrzędnych lokalnych:

$$u = \sum_{i=1}^q N_i u_i, \quad v = \sum_{i=1}^q N_i v_i, \quad w = \sum_{i=1}^q N_i w_i, \quad (7.14)$$

podczas gdy do obliczenia współczynników macierzy odkształceń wymagane jest różniczkowanie względem zmiennych globalnych. Ponieważ przemieszczenia elementu są zdefiniowane we współrzędnych naturalnych (7.14), musimy znaleźć związek pomiędzy współrzędnymi  $x, y, z$  a współrzędnymi  $\xi, \eta, \zeta$ , który można przedstawić formalnie jako:

$$x = f_1(\xi, \eta, \zeta), \quad y = f_2(\xi, \eta, \zeta), \quad z = f_3(\xi, \eta, \zeta), \quad (7.15)$$

lub jako zależności odwrotne:

$$\xi = f_1(x, y, z), \quad \eta = f_2(x, y, z), \quad \zeta = f_3(x, y, z), \quad (7.16)$$

Aby otrzymać relację pomiędzy obydwoma układami współrzędnych wymagana jest znajomość pochodnych typu  $\delta/\delta x$ ,  $\delta/\delta y$  i  $\delta/\delta z$ . Wykorzystując regułę różniczkowania funkcji złożonej, mamy:

$$\frac{\delta}{\delta x} = \frac{\delta}{\delta \xi} \frac{\delta \xi}{\delta x} + \frac{\delta}{\delta \eta} \frac{\delta \eta}{\delta x} + \frac{\delta}{\delta \zeta} \frac{\delta \zeta}{\delta x} \quad (7.17)$$

i podobnie można otrzymać wyrażenia na  $\delta/\delta y$  i  $\delta/\delta z$ . W celu obliczenia  $\delta \xi / \delta x$ ,  $\delta \eta / \delta x$  i  $\delta \zeta / \delta x$  musimy w sposób jawny znać relację (7.16). Obliczenie pochodnych występujących w (7.16) jest stosunkowo uciążliwe. W tym celu posłużymy się następującym algorytmem. Wykorzystując regułę różniczkowania funkcji złożonej, otrzymamy:

$$\begin{bmatrix} \delta / \delta \xi \\ \delta / \delta \eta \\ \delta / \delta \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta x / \delta \xi & \delta y / \delta \xi & \delta z / \delta \xi \\ \delta x / \delta \eta & \delta y / \delta \eta & \delta z / \delta \eta \\ \delta x / \delta \zeta & \delta y / \delta \zeta & \delta z / \delta \zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta / \delta x \\ \delta / \delta y \\ \delta / \delta z \end{bmatrix} \quad (7.18)$$

lub inaczej:

$$\delta / \delta \xi = J \cdot \delta / \delta x \quad (7.19)$$

gdzie  $J$  jest operatorem jakobianu (macierzą Jakobiego) wiążącym pochodne współrzędnych naturalnych z pochodnymi lokalnymi. Zauważmy, że macierz Jakobiego łatwo wyznaczyć z relacji (7.13):

$$\delta / \delta x = J^{-1} \cdot \delta / \delta \xi \quad (7.20)$$

która wymaga oczywiście, by macierz  $J$  istniała. Wykorzystując (7.14) i (7.20) obliczamy pochodne  $\delta u / \delta x$ ,  $\delta u / \delta y$ ,  $\delta u / \delta z$  i dalej macierz odkształceń  $\varepsilon = \mathbf{B} \mathbf{d}$ . Następnie obliczamy macierz sztywności elementu  $k = \int \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B} \cdot dV$ . Ponieważ elementy macierzy  $\mathbf{B}$  są funkcjami współrzędnych naturalnych  $\xi, \eta, \zeta$ , to całkowanie po objętości wymaga wprowadzenia zależności

$$dV = \det(J) \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (7.21)$$

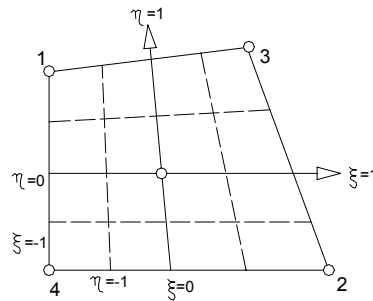
gdzie  $\det(J)$  jest wyznacznikiem macierzy  $J$ . Jak widać, jawne całkowanie wyrażenia na macierz sztywności nie jest efektywne i dlatego też w elementach izoparametrycznych najczęściej stosuje się całkowanie numeryczne.

Poniżej zilustrujemy przedstawiony wyżej algorytm dla elementów izoparametrycznych wykorzystywanych w zagadnieniach płaskich.

## 7.2. Element czworokątny

Rysunek 7.3 przedstawia bezwymiarowe współrzędne naturalne  $\xi$  i  $\eta$  dla czworokąta. Punkt  $g$  przyjęty jest w środku geometrycznym, wobec czego jego współrzędne globalne spełniają równania :

$$\begin{aligned} x_g &= \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \\ y_g &= \frac{1}{4}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) \end{aligned} \quad (7.22)$$



Rys. 7.3. Czworokątny element izoparametryczny

Zauważmy, że współrzędne  $\xi$  i  $\eta$  zostały wprowadzone w taki sposób, że na przykład  $\xi = -1$  definiuje wszystkie punkty położone na krawędzi 1-2, zaś  $\xi = 1$  - punkty na krawędzi 2-3. Stosując interpolację liniową w obu kierunkach, współrzędne globalne położenia dowolnego punktu wyrazimy w postaci:

$$x = \sum_{i=1}^4 N_i x_i, y = \sum_{i=1}^4 N_i y_i \quad (7.23)$$

gdzie

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta), N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta), \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta), N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta), \end{aligned} \quad (7.24)$$

Powyższe funkcje (porównaj wzór (6.52)) wyrażają współrzędne globalne we współrzędnych naturalnych. Ze względu na to, że równania (7.24) są biliniowe, nie można tym razem w sposób łatwy odwrócić zależności (7.18) ani wyrazić  $\xi$  i  $\eta$  jako funkcji współrzędnych globalnych  $x$  i  $y$ . Zastosujemy zatem sposób przedstawiony w punkcie 7.1.

Macierz Jakobiego dla analizowanego przypadku można przedstawić w postaci:

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} \quad (7.25)$$

Wyrażenia w macierzy Jakobianu mają następującą postać:

$$\begin{aligned}
J_{11} = x_{,\xi} &= \sum_{i=1}^4 N_{i,\xi} \cdot x_i, J_{21} = x_{,\eta} = \sum_{i=1}^4 N_{i,\eta} \cdot x_i, \\
J_{12} = y_{,\xi} &= \sum_{i=1}^4 N_{i,\xi} \cdot y_i, J_{22} = y_{,\eta} = \sum_{i=1}^4 N_{i,\eta} \cdot y_i,
\end{aligned} \tag{7.26}$$

Powyższe wyrażenia można zapisać zgrabnie w formie macierzowej

$$\mathbf{J} = \mathbf{D}_L \mathbf{C}_N \tag{7.27}$$

gdzie macierz  $\mathbf{D}_L$  ( $2 \times 4$ ) zawiera różniczki funkcji kształtu  $N_i$  ze względu na współrzędne lokalne, zaś macierz  $\mathbf{C}_N$  ( $4 \times 2$ ) składa się ze współrzędnych  $x_i$  i  $y_i$  węzłów.

$$\mathbf{D}_L = \begin{bmatrix} N_{1,\xi} & N_{2,\xi} & N_{3,\xi} & N_{4,\xi} \\ N_{1,\eta} & N_{2,\eta} & N_{3,\eta} & N_{4,\eta} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} -(1-\xi) & (1-\xi) & (1+\xi) & -(1+\xi) \\ -(1-\eta) & (1-\eta) & (1+\eta) & -(1+\eta) \end{bmatrix} \tag{7.28}$$

oraz

$$\mathbf{C}_N = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{bmatrix}^T \tag{7.29}$$

Interesuje nas przede wszystkim wyrażenie na  $\mathbf{J}^{-1}$  i wyprowadzimy je tutaj formalnie jako macierz odwrotną do  $\mathbf{J}$  (7.27). Z definicji mamy:

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{\mathbf{J}^a}{|\mathbf{J}|} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \cdot \begin{bmatrix} J_{22} & J_{21} \\ J_{12} & J_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{bmatrix} y_{,\eta} & -x_{,\eta} \\ -y_{,\xi} & x_{,\xi} \end{bmatrix} \tag{7.30}$$

gdzie  $\mathbf{J}$  oznacza macierz sprzężoną, zaś  $|\mathbf{J}|$  jest wartością wyznacznika jacobianu. Aby otrzymać różniczki wszystkich funkcji ze względu na  $x$  i  $y$ , zastosujemy (7.20):

$$\begin{bmatrix} N_{i,x} \\ N_{i,y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} N_{i,\xi} \\ N_{i,\eta} \end{bmatrix}, i=1,2,3,4 \tag{7.31}$$

Dalej zdefiniujemy macierz  $\mathbf{D}_G$

$$\mathbf{D}_G = \mathbf{J}^{-1} \cdot \mathbf{D}_L = (\mathbf{D}_L \cdot \mathbf{C}_N)^{-1} \cdot \mathbf{D}_L, \tag{7.32}$$

która zawiera różniczki funkcji  $N_i$  ze względu na zmienne globalne  $x$  i  $y$ . Jej postać jest następująca :

$$\mathbf{D}_G = \begin{bmatrix} N_{1,x} & N_{2,x} & N_{3,x} & N_{4,x} \\ N_{1,y} & N_{2,y} & N_{3,y} & N_{4,y} \end{bmatrix} \tag{7.33}$$

Wprowadzając kolejno składowe tej macierzy, otrzymujemy :

$$\begin{aligned}
D_{g11} &= \frac{I}{4|J|} \cdot [-(1-\eta) \cdot J_{22} + (1-\xi) \cdot J_{12}] \\
D_{g12} &= \frac{I}{4|J|} \cdot [(1-\eta) \cdot J_{22} + (1+\xi) \cdot J_{12}] \\
D_{g13} &= \frac{I}{4|J|} \cdot [(1-\eta) \cdot J_{22} - (1+\xi) \cdot J_{12}] \\
D_{g14} &= \frac{I}{4|J|} \cdot [-(1+\eta) \cdot J_{22} - (1-\xi) \cdot J_{12}] \\
D_{g21} &= \frac{I}{4|J|} \cdot [(1-\eta) \cdot J_{21} - (1-\xi) \cdot J_{11}] \\
D_{g22} &= \frac{I}{4|J|} \cdot [-(1-\eta) \cdot J_{21} - (1+\xi) \cdot J_{11}] \\
D_{g23} &= \frac{I}{4|J|} \cdot [-(1+\eta) \cdot J_{21} + (1+\xi) \cdot J_{11}] \\
D_{g24} &= \frac{I}{4|J|} \cdot [(1+\eta) \cdot J_{21} - (1-\xi) \cdot J_{11}]
\end{aligned} \tag{7.34}$$

Ze względu na fakt, że w mianowniku powyższych wyrazów pojawia się wyznacznik macierzy jacobianu  $\mathbf{J}$ , istnieje zasadnicza trudność bezpośredniego scałowania wyrażeń na macierz sztywności lub równoważne obciążenia węzłowe. Musimy więc porzucić stosowany dotąd sposób wyprowadzania równań przez bezpośrednie całkowanie na rzecz całkowania numerycznego.

Kontynuujemy rozważania podjęte w rozdziale 6.3.1, w których zajmowaliśmy się elementem czterowęzłowym (Q4). Sformułowawszy już w postaci zależności (6.52) składowe macierzy funkcji kształtu oraz podmacierzy  $\mathbf{B}$  (3x2) (6.57) oraz stosując notację z tego rozdziału, można tę podmacierz zapisać także w postaci:

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} D_{G1i} & 0 \\ 0 & D_{G2i} \\ D_{G2i} & D_{G1i} \end{bmatrix} \tag{7.35}$$

Macierz sztywności elementu Q4 o stałej grubości  $t$  można teraz przedstawić jako:

$$\mathbf{K}_e = t \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T(x, y) \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}(x, y) \cdot dx \cdot dy \tag{7.36}$$

lub we współrzędnych lokalnych:

$$\mathbf{K}_e = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T(\xi, \eta) \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}(\xi, \eta) \cdot |J(\xi, \eta)| d\xi \cdot d\eta \tag{7.37}$$

Podobnie rzecz ma się z obciążeniami, siłami masowymi i początkowymi odkształceniami:

$$\begin{aligned}
 P_b &= t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N^T(\xi, \eta) \cdot b(\xi, \eta) \cdot |J(\xi, \eta)| d\xi \cdot d\eta \\
 P_0 &= t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B^T(\xi, \eta) \cdot D(\varepsilon_0(\xi, \eta)) \cdot |J(\xi, \eta)| d\xi \cdot d\eta
 \end{aligned}
 \tag{7.38}$$

### 7.3. Element trójkątny

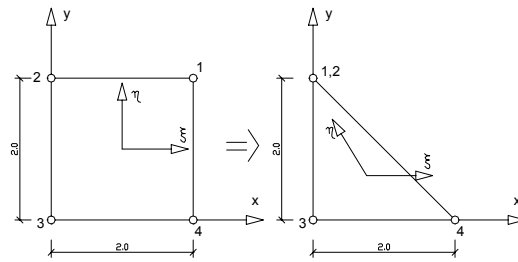
Jedną z metod otrzymywania elementów trójkątnych jest proces degenerowania elementów czworokątnych. Proces ten polega na przypisaniu tych samych współrzędnych dwóm węzłom. Zilustrujemy to na następującym przykładzie.

Z elementu czworokątnego 1-2-3-4, przedstawionego na rysunku 7.4, należy otrzymać element trójkątny przez nałożenie na siebie węzłów 1 i 2. Współrzędne elementu wyrażają się następującymi zależnościami:

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \cdot x_1 + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \cdot x_2 + \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \cdot x_3 + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \cdot x_4, \\
 y &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \cdot y_1 + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \cdot y_2 + \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \cdot y_3 + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \cdot y_4
 \end{aligned}
 \tag{7.39}$$

Przyjmując, że  $x_1 = x_2$  i  $y_1 = y_2$ , otrzymamy:

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{1}{2}(1+\xi) \cdot x_2 + \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \cdot x_3 + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \cdot x_4, \\
 y &= \frac{1}{2}(1+\xi) \cdot y_2 + \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \cdot y_3 + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \cdot y_4
 \end{aligned}
 \tag{7.40}$$



Rys. 7.4. Tworzenie elementu trójkątnego z elementu czworokątnego

Podstawiając odpowiednie liczby otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta), \\
 y &= (1+\eta)
 \end{aligned}
 \tag{7.41}$$

Obliczając teraz pochodne:

$$\begin{aligned}
 \delta x / \delta \xi &= 1/2(1-\eta), \delta y / \delta \xi = 0, \\
 \delta x / \delta \eta &= -1/2(1+\xi), \delta y / \delta \mu = 1.
 \end{aligned}
 \tag{7.42}$$

otrzymujemy macierz Jakobiego w postaci:

$$J = \begin{bmatrix} (1-\eta) & 0 \\ -(1+\xi) & 2 \end{bmatrix}, J^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{1-\eta} & 0 \\ \frac{(1+\xi)}{(1-\eta)} & 1 \end{bmatrix} \quad (7.43)$$

Przemieszczenia przedstawimy, zgodnie z podstawową ideą elementów izoparametrycznych, jako:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}(1+\xi) \cdot u_2 + \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \cdot u_3 + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \cdot u_4, \\ v &= \frac{1}{2}(1+\xi) \cdot v_2 + \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \cdot v_3 + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \cdot v_4 \end{aligned} \quad (7.44)$$

Obliczmy następnie pochodne:

$$\begin{aligned} \delta u / \delta \xi &= 1/4(1-\eta) \cdot u_3 + 1/4(1-\eta) \cdot u_4, \\ \delta v / \delta \xi &= 1/4(1-\eta) \cdot v_3 + 1/4(1-\eta) \cdot v_4, \\ \delta u / \delta \xi &= 1/2 \cdot u_2 - 1/4(1-\xi) \cdot u_3 + 1/4(1+\xi) \cdot u_4, \\ \delta v / \delta \xi &= 1/2 \cdot v_2 - 1/4(1-\xi) \cdot v_3 + 1/4(1+\xi) \cdot v_4, \end{aligned} \quad (7.45)$$

Korzystając z zależności (7.20)

$$\begin{bmatrix} \delta / \delta x \\ \delta / \delta y \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \delta / \delta \xi \\ \delta / \delta \eta \end{bmatrix}$$

mamy:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \delta u / \delta x \\ \delta u / \delta y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{2}{1-\eta} & 0 \\ \frac{(1+\xi)}{(1-\eta)} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/4(1-\eta) & 0 & 1/4(1-\eta) & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/4(1-\xi) & 0 & 1/4(1+\xi) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.46)$$

Podobnie otrzymamy wyrażenie na

$$\begin{bmatrix} \delta v / \delta x \\ \delta v / \delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} \quad (7.47)$$

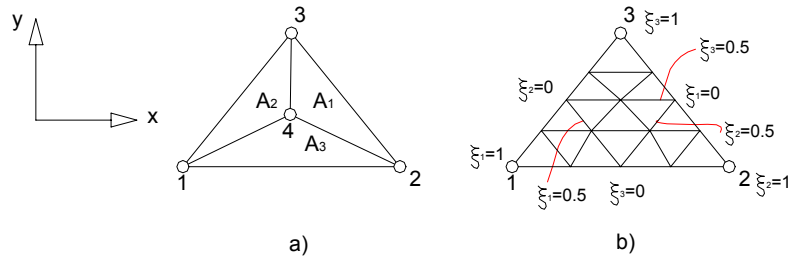
Relacja odkształcenie-przemieszczenie będzie miała zatem postać:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 & -1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} \quad (7.48)$$

Jak widać, element ten jest elementem CST.

Chociaż przedstawiony wyżej sposób budowy elementu trójkątnego może być atrakcyjny w programach komputerowych, w których zdefiniowano elementy izoparametryczne czworokątne, to jednak element taki można również sformułować inaczej, korzystając ze współrzędnych polowych, co pokażemy poniżej.

Położenie dowolnego punktu 4 w trójkącie wprowadza podział jego pola na pola A1, A2, A3 (rys. 7.5a).



Rys. 7.5. Element trójkątny i współrzędne polowe

Bezwymiarowe współrzędne polowe dla trójkąta są wtedy zdefiniowane jako:

$$\xi_1 = \frac{A_1}{A}, \xi_2 = \frac{A_2}{A}, \xi_3 = \frac{A_3}{A}$$

lub krócej

$$\xi_i = \frac{A_i}{A}, \text{ dla } i=1,2,3$$

Dodatkowo widzimy, że

$$\sum_{i=1}^3 A_i = A \quad \sum_{i=1}^3 \xi_i = 1 \quad (7.50)$$

Rysunek 7.5b wyjaśnia, że współrzędna  $\xi_1=1$  definiuje położenie punktu 1 współrzędna zaś  $\xi_1=0$  definiuje położenie dowolnego punktu na boku 2-3 trójkąta. Chcąc wyrazić współrzędną globalną  $x$  i  $y$  dowolnego punktu trójkąta, mamy :

$$\begin{aligned}x &= \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3, \\y &= \xi_1 y_1 + \xi_2 y_2 + \xi_3 y_3\end{aligned}\quad (7.51)$$

lub też z drugiej strony, korzystając z (7.50) i (7.51), możemy współrzędne lokalne dowolnego punktu przedstawić jako

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 & y_2 - y_3 & x_3 - x_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 & y_3 - y_1 & x_1 - x_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 & y_1 - y_2 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} \quad (7.52)$$

gdzie  $2A = x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_1 y_3 - x_2 y_1 - x_3 y_2$ .

Porównanie powyższego układu równań z funkcjami kształtu  $N_i$  dla elementu CST wskazuje, że są to te same funkcje. Tak więc element trójkątny CST jest elementem izoparametrycznym.

Upraszczając równanie (7.52) przyjmijmy, że  $A$  oznacza pole powierzchni trójkąta o wierzchołkach  $i, j$  oraz węźle środkowym 4, oraz  $a_1 = x_{23}$ ,  $a_2 = x_{31}$ ,  $a_3 = x_{12}$ ,  $b_1 = -y_{23}$ ,  $b_2 = -y_{31}$ ,  $b_3 = -y_{12}$ .

Otrzymamy wówczas:

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 2A_{23} & b_1 & a_1 \\ 2A_{31} & b_2 & a_2 \\ 2A_{12} & b_3 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} \quad (7.53)$$

Różniczkowanie funkcji  $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  względem zmiennych globalnych  $x$  i  $y$  przebiega według reguły :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial x}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial y},\end{aligned}\quad (7.54)$$

ale ponieważ

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial x} = \frac{b_i}{2A} \quad \text{ i } \quad \frac{\partial \xi_i}{\partial y} = \frac{a_i}{2A} \quad (7.55)$$

Więc

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{2A} \cdot \sum_{i=1}^3 b_i \frac{\partial f}{\partial \xi_i}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{2A} \cdot \sum_{i=1}^3 a_i \frac{\partial f}{\partial \xi_i},\end{aligned}\quad (7.56)$$

Teraz postępując jak wyżej, dla elementu czworokątnego, możemy wyznaczyć macierz odkształceń  $B$ , a następnie macierz sztywności i wektor obciążeń.

## 7.4. Element Ośmiowęzłowy Q8

Rysunek 7.6a przedstawia prostokątny element Ośmiowęzłowy, który jest elementem macierzystym dla ośmiowęzłowego izoparametrycznego czworokąta Q8 (rys. 7.6b). Przemieszczenia węzłowe dla obu tych elementów składają się z dwóch składowych translacji w każdym węźle:

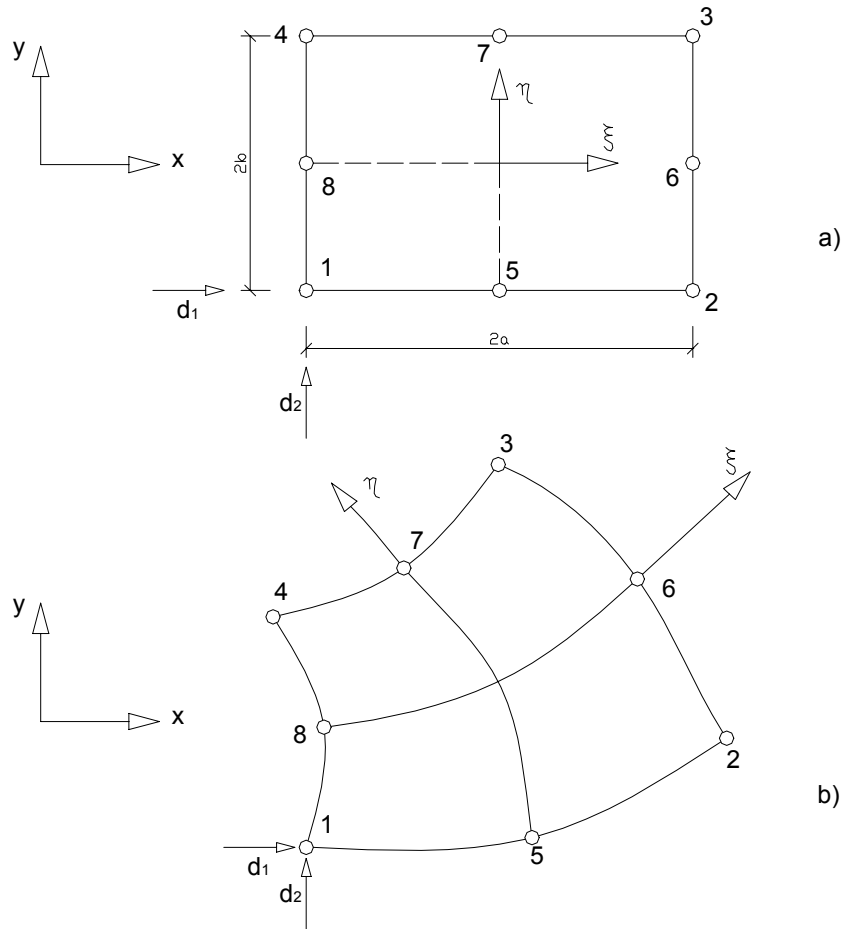
$$d = [d_1, d_2, \dots, d_{16}]^T = [u_1 v_1; u_2 v_2; \dots; u_8 v_8]^T \quad (7.57)$$

Przyjmijmy następujące funkcje przemieszczeń :

$$\begin{aligned} u &= c_1 + c_2 \xi + c_3 \eta + c_4 \xi^2 + c_5 \xi \eta + c_6 \eta^2 + c_7 \xi^2 \eta + c_8 \xi \eta^2, \\ v &= c_9 + c_{10} \xi + c_{11} \eta + c_{12} \xi^2 + c_{13} \xi \eta + c_{14} \eta^2 + c_{15} \xi^2 \eta + c_{16} \xi \eta^2, \end{aligned} \quad (7.58)$$

Można je wyrazić w postaci:

$$u = \sum_{i=1}^8 N_i \cdot u_i, v = \sum_{i=1}^8 N_i \cdot v_i \quad (7.59)$$



Rys. 7.6. Ośmiowęzłowy element izoparametryczny:  
a) prostokątny element macierzysty, b) element o brzegach zakrzywionych

gdzie:

$$\begin{aligned} N_i &= \frac{1}{4}(1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(\xi_0 + \eta_0 - 1), \dots \text{dla } i = 1, 2, 3, 4 \\ N_i &= \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta_0), \dots \text{dla } i = 5, 7 \\ N_i &= \frac{1}{2}(1 + \xi_0)(1 - \eta^2), \dots \text{dla } i = 6, 8 \end{aligned} \quad (7.60)$$

gdzie oznaczono:  $\xi_0 = \xi_i \xi$ ,  $\eta_0 = \eta_i \eta$ , przy czym  $\xi_i$  i  $\eta_i$  są współrzędnymi węzłów w układzie współrzędnych lokalnych i przyjmują wartości -1, +1 lub 0. Ten element jest nazywany w literaturze **elementem Serendipa**.

Dla lepszego uzmysłowienia sobie przemieszczeniowych funkcji kształtu weźmy dla przykładu funkcję przypisaną węzłowi nr 1. Współrzędne tego węzła wynoszą  $\xi_1 = -1$ ,  $\eta_1 = -1$ , co po podstawieniu do (7.60) prowadzi do :

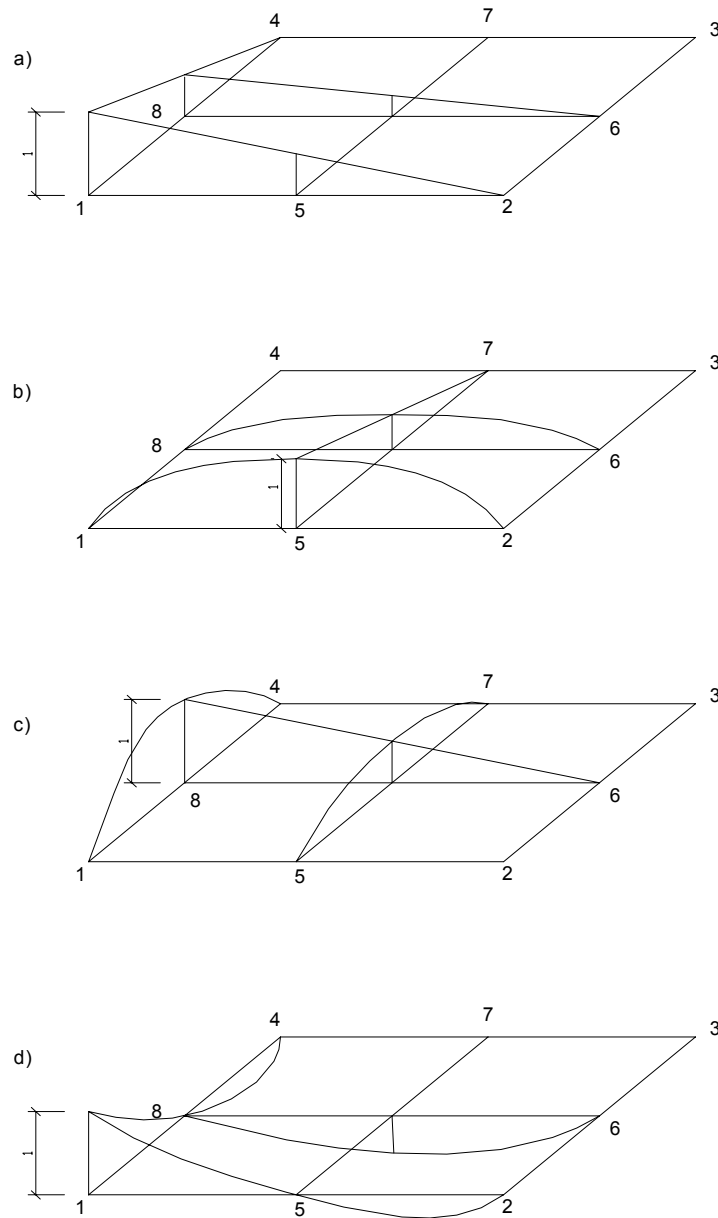
$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1) \quad (7.61)$$

Funkcja ta może być przedstawiona jako kombinacja trzech form deformacji (rys. 7.7 a, b, c i d):

$$\begin{aligned} N_1 = N_d = N_a - 0.5 \cdot N_b - 0.5 \cdot N_c &= \frac{1}{4}[(1-\xi)(1-\eta) - (1-\xi^2)(1-\eta) - (1-\xi)(1-\eta^2)] = \\ &= \frac{1}{4}[(1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1)], \end{aligned}$$

gdzie:

$N_a = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$	jest funkcją liniowo-liniową
$N_b = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$	jest funkcją kwadratowo-liniową
$N_c = \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)$	jest funkcją liniowo-kwadratową
$N_d = N_a - \frac{1}{2}N_b - \frac{1}{2}N_c$	jest funkcją kwadratowo-kwadratową



Rys. 7.7. Ośmiowęzłowy element izoparametryczny a) - d) postacie funkcji kształtu

Przyjmijmy, że funkcje interpolujące geometrię są tymi samymi funkcjami, co funkcje kształtu. Oznacza to, że układ współrzędnych lokalnych  $\xi, \eta$  staje się krzywoliniowy, a wszystkie brzegi elementu są funkcjami kwadratowymi.

Mamy więc

$$x = \sum_{i=1}^8 N_i x_i, \quad y = \sum_{i=1}^8 N_i y_i, \quad (7.62)$$

Dalsze formułowanie macierzy sztywności elementu i odpowiadających obciążeń węzłowych dla elementu Q8 jest podobne do sformułowania przedstawionego dla elementu Q4. W tablicy 7.1 zestawiono funkcje kształtu i ich pochodne względem zmiennych lokalnych  $\xi$  i  $\eta$ , potrzebne do wykonania odpowiednich całkowań numerycznych.

Tablica 7.1 Funkcje kształtu i ich pochodne

i	$N_i$	$N_{i,\xi}$	$N_{i,\eta}$
1	$\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1)$	$\frac{1}{4}(2\xi+\eta)(1-\eta)$	$\frac{1}{4}(1-\xi)(2\eta+\xi)$
2	$\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(+\xi-\eta-1)$	$\frac{1}{4}(2\xi-\eta)(1-\eta)$	$\frac{1}{4}(1+\xi)(2\eta-\xi)$
3	$\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(+\xi+\eta-1)$	$\frac{1}{4}(2\xi+\eta)(1+\eta)$	$\frac{1}{4}(1+\xi)(2\eta+\xi)$
4	$\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1)$	$\frac{1}{4}(2\xi-\eta)(1+\eta)$	$\frac{1}{4}(1+\xi\eta)(2\eta+\xi)$
5	$\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$	$-\xi(1-\eta)$	$-\frac{1}{2}(1-\xi^2)$
6	$\frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)$	$\frac{1}{2}(1-\eta^2)$	$-(1+\xi)\eta$
7	$\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)$	$-\xi(1+\eta)$	$\frac{1}{2}(1-\xi^2)$
8	$\frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)$	$-\frac{1}{2}(1-\eta^2)$	$-(1-\xi)\eta$

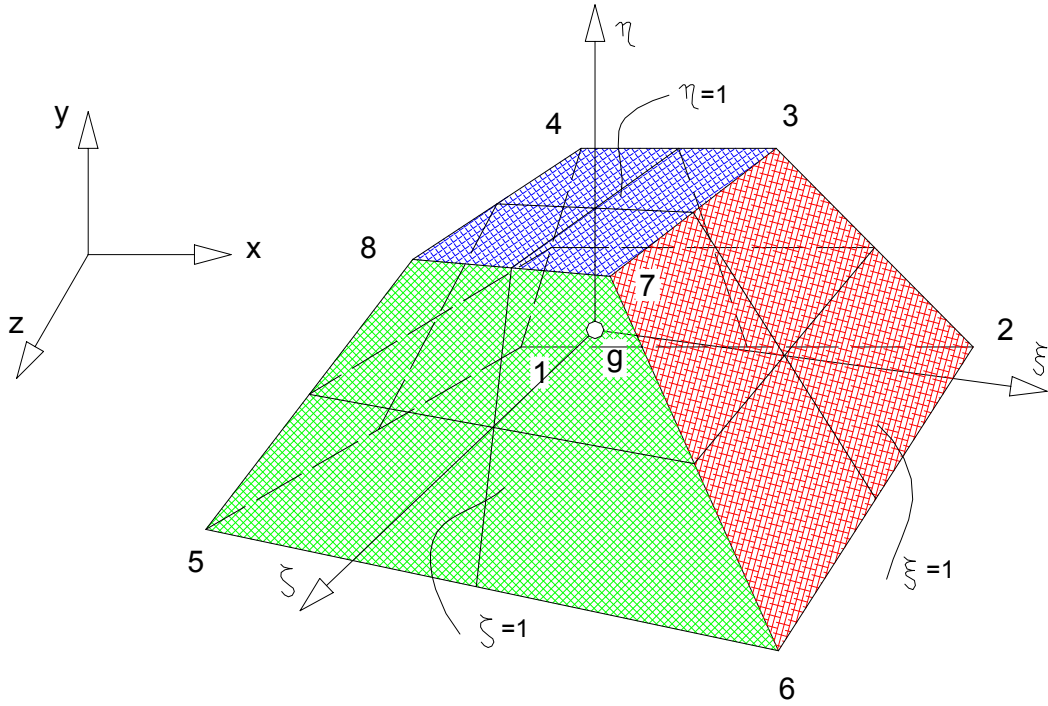
Zalety stosowania elementu Q8 w porównaniu z elementem Q4 mogą polegać na używaniu w dyskretyzacji problemu brzegowego mniejszej liczby elementów i w konsekwencji mniejszej liczby stopni swobody dla całego zadania. W przypadku stosowania elementów Q8 istnieje dodatkowo możliwość modelowania brzegu krzywoliniowego. Możemy się również spodziewać większej dokładności numerycznej ze względu na stosowanie wielomianów interpolacyjnych wyższego stopnia. Należy jednak pamiętać, że przewidywania te powinny być zawsze weryfikowane w eksperymencie numerycznym.

### 7.5. Izoparametryczny element przestrzenny - sześćścian

Spośród elementów przeznaczonych do analizy przestrzennego stanu naprężeń, odkształceń i przemieszczeń omówimy sformułowanie jednego z najprostszych elementów. Ośmiowęzłowy sześćścian przedstawiono na rysunku 7.8 w układzie współrzędnych naturalnych  $\xi$ ,  $\eta$  i  $\zeta$ . Początek tego układu przyjęto w punkcie „g”, środku geometrycznym o współrzędnych :

$$x_g = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 x_i, y_g = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 y_i, z_g = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 z_i, \quad (7.63)$$

gdzie przez  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $z_i$  oznaczono współrzędne kartezjańskie wierzchołków (węzłów) elementu sześciścienne, wyrażone w układzie globalnym.



Rys. 7.8. Izoparametryczny element przestrzenny - sześćścian

Stosując interpolację liniową w każdym z kierunków  $\xi$ ,  $\eta$  i  $\zeta$ , można położenie dowolnego punktu elementu wyrazić za pomocą zależności:

$$x = \sum_{i=1}^8 N_i x_i, \quad y = \sum_{i=1}^8 N_i y_i, \quad z = \sum_{i=1}^8 N_i z_i, \quad (7.64)$$

w których funkcje kształtu  $N_i$  przyjęto w postaci:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta), N_2 = \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta), \\ N_3 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta), N_4 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta), \\ N_5 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta), N_6 = \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta), \\ N_7 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta), N_8 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta). \end{aligned} \quad (7.65)$$

Ze względu na postać zależności (7.65) nie istnieje możliwość wyrażenia współrzędnych lokalnych  $\xi$ ,  $\eta$  i  $\zeta$  jako funkcji  $x$ ,  $y$  i  $z$ . Musimy więc zastosować podobny sposób, jak to czyniliśmy poprzednio. W przypadku zadania trójwymiarowego macierz Jakobiego jest macierzą o wymiarach  $3 \times 3$ :

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} & z_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} & z_{,\eta} \\ x_{,\zeta} & y_{,\zeta} & z_{,\zeta} \end{bmatrix} \quad (7.66)$$

Odpowiednie składowe tej macierzy wyznaczymy, biorąc pod uwagę wyrażenia (7.58):

$$\begin{aligned}
J_{11} &= \sum_{i=1}^8 N_{i,\xi} x_i, & J_{12} &= \sum_{i=1}^8 N_{i,\xi} y_i, & J_{13} &= \sum_{i=1}^8 N_{i,\xi} z_i, \\
J_{21} &= \sum_{i=1}^8 N_{i,\eta} x_i, & J_{22} &= \sum_{i=1}^8 N_{i,\eta} y_i, & J_{23} &= \sum_{i=1}^8 N_{i,\eta} z_i, \\
J_{31} &= \sum_{i=1}^8 N_{i,\zeta} x_i, & J_{32} &= \sum_{i=1}^8 N_{i,\zeta} y_i, & J_{33} &= \sum_{i=1}^8 N_{i,\zeta} z_i,
\end{aligned} \tag{7.67}$$

Tak jak to już podawaliśmy, macierz jacobianu jest iloczynem macierzy DL (3x8) pochodnych lokalnych funkcji kształtu oraz macierzy C<sub>L</sub>(8x3) współrzędnych globalnych węzłów elementu ( $J=D_L C_N$ ). Odwrotność macierzy jacobianu wyrażona jest w znanej postaci:

$$J^{-1} = \frac{J^a}{|J|} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} J_{11}^a & J_{12}^a & J_{13}^a \\ J_{21}^a & J_{22}^a & J_{23}^a \\ J_{31}^a & J_{32}^a & J_{33}^a \end{bmatrix} \tag{7.68}$$

Zgodnie z procedurą przedstawioną poprzednio, aby wyrazić pochodne wszystkich funkcji kształtu ze względu na współrzędne globalne, wystarczy teraz obliczyć

$$D_G = J^{-1} \cdot D_L \tag{7.69}$$

Macierz  $D_G$  składa się z następujących elementów :

$$D_G = \begin{bmatrix} N_{1,x} & N_{2,x} & \dots & N_{8,x} \\ N_{1,y} & N_{2,y} & \dots & N_{8,y} \\ N_{1,z} & N_{2,z} & \dots & N_{8,z} \end{bmatrix}_{(3 \times 8)} \tag{7.70}$$

Bezpośrednie wyznaczanie tych 24 składowych jest łatwe, lecz pracochłonne, dlatego takie czynności wykonuje się automatycznie w programie komputerowym. Pozostałe elementy procedury zmierzającej do zbudowania macierzy sztywności elementu i obciążeń węzłowych w układzie lokalnym są podobne do zamieszczonych w rozdziałach 7.3 i 7.4.

## 7.6 Całkowanie numeryczne

W rozdziale 7.1 wspomnieliśmy, że w sformułowaniu elementów izoparametrycznych całkowanie numeryczne jest powszechnie stosowaną techniką, wykorzystywaną przy obliczaniu współczynników macierzy sztywności i wektorów obciążenia. Wielkości te, zależnie od wymiarów elementu, są następującej postaci:

$$\int F(\xi) d\xi \quad \int F(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad \int F(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \tag{7.71}$$

Rozpatrzmy przypadek całkowania funkcji jednej zmiennej. Pokażemy, że bardzo łatwo uogólnić go na całkowanie funkcji wielu zmiennych. Ogólnie rzecz biorąc, całkowanie numeryczne polega na przyjęciu funkcji wielomianowej  $\Psi(\xi)$ , interpolującej funkcję  $F$  (7.71) w danej liczbie punktów i na obliczeniu całki

$$\int \psi(\xi) d\xi \quad (7.72)$$

jako aproksymacji całki funkcji  $F$ . Załóżmy, że funkcję  $F(\xi)$  obliczono w  $n+1$  różnych punktach  $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ . Przyjmijmy następujący wielomian interpolacyjny w postaci:

$$\psi(\xi) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \dots + a_n\xi^n \quad (7.73)$$

Biorąc pod uwagę, że  $\Psi(\xi) = F(\xi)$  w  $n+1$  punktach, otrzymamy:

$$F = V \cdot a \quad (7.74)$$

gdzie:

$$F = [F_0 F_1 \dots F_n]^T \quad a = [a_0 a_1 \dots a_n]^T, \text{ a } V \text{ jest macierzą Vandermonde'a:}$$

$$V = \begin{bmatrix} 1 & \xi_0 & \xi_0^2 & \dots & \xi_0^n \\ 1 & \xi_1 & \xi_1^2 & \dots & \xi_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \xi_n & \xi_n^2 & \dots & \xi_n^n \end{bmatrix}$$

Ponieważ wyznacznik tej macierzy jest różny od zera, to istnieje jednoznaczne rozwiązanie (7.74) względem wektora  $a$ .

Funkcje  $\Psi(\xi)$  przyjmuje się najczęściej jako wielomiany Lagrange'a:

$$l_j(\xi) = \frac{(\xi - \xi_0)(\xi - \xi_1) \dots (\xi - \xi_{j-1})(\xi - \xi_{j+1}) \dots (\xi - \xi_n)}{(\xi_j - \xi_0)(\xi_j - \xi_1) \dots (\xi_j - \xi_{j-1})(\xi_j - \xi_{j+1}) \dots (\xi_j - \xi_n)} \quad (7.75)$$

gdzie  $l_j(\xi_i) = \delta_{ij}$ , skąd wielomian interpolacyjny ma postać:

$$\psi(\xi) = F_0 l_0(\xi) + F_1 l_1(\xi) + \dots + F_n l_n(\xi) \quad (7.76)$$

Mając teraz wielomian (7.76) możemy obliczyć całkę:

$$\int_a^b \psi(\xi) d\xi \quad (7.77)$$

Stosuje się dwa podejścia. W pierwszym zakłada się, że punkty całkowania są równo oddalone, wobec czego

$$\xi_0 = a, \quad \xi_n = b, \quad h = \frac{b-a}{n}$$

Wykorzystując wielomiany Lagrange'a, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \int_a^b F(\xi) d\xi &= \sum_{i=0}^n \left\{ \int_a^b l_i(\xi) d\xi \right\} F_i, \\ \int_a^b F(\xi) d\xi &= (b-a) \sum_{i=0}^n c_i^n F_i. \end{aligned} \quad (7.78)$$

Stałe  $C_i^n$  są stałymi Newtona-Cotesa i można je łatwo wyznaczyć.

Proszę zwrócić uwagę, że dla  $n=1$  i  $n=2$  otrzymujemy znane formuły trapezów i Simpsona. W celu otrzymywania coraz dokładniejszych wyników całkowania możemy zwiększać  $n$ , czyli użyć formuł Newtona-Cotesa rzędu wyższego lub zastosować te formuły z podziałem przedziału na kilka podprzedziałów (czyli kilka przedziałów całkowania).

Omówimy teraz drugie podejście. Do tej pory stosowaliśmy formułę całkowania numerycznego zakładając, że przedział całkowania jest podzielony na równe odcinki. Zwróćmy uwagę, że całkowanie macierzy w metodzie elementów skończonych nie wymaga tego założenia. Punkty całkowania mogą być wybrane dowolnie, wobec czego można postawić następujące zadanie: scałkować funkcję dla danej liczby punktów i dokonać optymalizacji położenia tych punktów.

Tzw. kwadratury Gaussa należą do grupy metod całkowania numerycznego, w których zarówno położenie punktów jak i wagi są wybrane tak, by zminimalizować błąd procedury całkowania. Podstawowym założeniem całkowania numerycznego metodą Gaussa jest przedstawienie całki w postaci

$$\int F(\xi) d\xi = \alpha_1 F(\xi_1) + \alpha_2 F(\xi_2) + \dots + \alpha_n F(\xi_n) \quad (7.79)$$

gdzie zarówno współczynniki  $\alpha_i$ , jak i  $\xi_i$  są zmiennymi (mamy do wyznaczenia  $2n$  niewiadomych). Zauważmy, że w formule Newtona-Cotesa zmiennymi były tylko wagi ( $\alpha_i$ ). Podobnie jak wyżej, funkcję całkowania zastąpimy wielomianem interpolacyjnym:

$$\psi(\xi) = \sum_{j=1}^n F_j l_j(\xi) \quad (7.80)$$

W celu określenia niewiadomych  $\xi_1, \xi_2, \dots$  zdefiniujemy funkcję  $P(\xi)$  w postaci wielomianu rzędu  $n$ :

$$P(\xi) = (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) \dots (\xi - \xi_n) \quad (7.81)$$

Ponieważ dla punktów całkowania  $P(\xi_j) = 0$ , to możemy napisać:

$$F(\xi) = \psi(\xi) + P(\xi)(\beta_0 + \beta_1 \xi + \beta_2 \xi^2 + \dots) \quad (7.82)$$

W takim razie całka z funkcji  $F(\xi)$  będzie miała postać:

$$\int F(\xi) d\xi = \sum_{j=1}^n F_j \left[ \int l_j(\xi) d\xi \right] + \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j \left[ \int r^j P(\xi) d\xi \right] \quad (7.83)$$

Nieznane dotąd współczynniki  $r_j$ , ( $j=1, \dots, n$ ) mogą być określone z warunku:

$$\int_a^b P(\xi) \cdot r^k \cdot d\xi = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (7.84)$$

Ponieważ wielomian  $\psi(\xi)$  jest wielomianem interpolującym funkcję  $F(\xi)$  przez  $n$  punktów a  $P(\xi)$  w tych punktach znika, to równanie (7.84) oznacza, że całka z funkcji  $F(\xi)$  jest aproksymowana przez całkę z wielomianu rzędu  $2n-1$ . W formule Newtona-Cotesa dokładnie całkowany był wielomian rzędu  $n$ , natomiast w metodzie Gaussa, stosując różne położenie punktów całkowania dokładnie scałkowujemy wielomian rzędu  $2n-1$ .

Aby uogólnić procedurę całkowania w przedziale  $\langle a, b \rangle$ , należy dokonać transformacji punktów całkowania i wartości wag do przedziału  $\langle -1, 1 \rangle$ :

$$(a+b)/2 + r_i(b-a)/2, (b-a)\alpha_i \quad (7.85)$$

Wartości wag wyznacza się z zależności:

$$\alpha_j = \int_{-1}^{+1} l_j(\xi) d\xi \quad j = 1, 2, 3, \dots, n \quad (7.86)$$

Zarówno położenie punktów całkowania, jak i wartości wag można obliczyć. Dla dużego „n” wykorzystuje się wielomiany Legendra i metoda całkowania nazywa się wtedy metodą Gaussa-Legendra. Metoda ta jest powszechnie stosowana przy całkowaniu macierzy dla elementów skończonych izoparametrycznych. W tablicy 7.2 zestawiono współczynniki dla kwadratur Gaussa do całkowania funkcji jednej zmiennej. Zestawienie położen punktów Gaussa dla zadań dwuwymiarowych rozpiętych nad polami trójkąta bądź czworokąta oraz ich wag znajdzie Czytelnik w Dodatku B.

Tablica 7.2 Współczynniki dla kwadratur Gaussa

Liczba punktów	Położenie punktu Gaussa $\pm \xi_i$	Waga $\alpha_i$
1	0.0	2.0
2	0.5773502692	1.0
3	0.7745966692 0.0	0.55556 0.88889
4	0.8611363116 0.3399810436	0.347855 0.652145
5	0.9061798459 0.5384693101 0.0	0.236926 0.4786286 0.5688889

### Przykład 1.

Scałkujemy numerycznie funkcję  $\Phi(\xi) = 3 - \xi^2$ ; przyjmując różną liczbę punktów Gaussa. Dla  $n = 1$  ( $\xi_1 = 0$ ,  $\alpha_1 = 2$ ) otrzymujemy  $I_\xi = \alpha_1 \cdot \Phi(\xi_1) = 2.0 \cdot 3 = 6.0$ , co jest pierwszym przybliżeniem dokładnej wartości całki, co jest już rozwiązaniem dokładnym.

Przyjęcie  $n > 2$  zawsze dalej prowadzi do wyniku dokładnego. Zgodnie zresztą z poprzednią uwagą przy przyjęciu  $n = 2$  można dokładnie scałkować wielomian stopnia trzeciego.

$$\int_{-1}^1 (3 - \xi^3) d\xi$$

dla  $n=2$  zgodnie z tablicą 7.1 otrzymujemy:

$$\xi_1 = \xi_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -0.57735.. \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 1$$

oraz

$$I_\xi = \sum_{i=1}^2 \alpha_i \phi(\xi_i) = (1.0) \left( 3 - \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 \right) + (1.0) \left( 3 - \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 \right) = 0.5333...$$

### Przykład 2.

Określmy współczynnik macierzy sztywności  $K$ , dla elementu Q4, używając formuły całkowania według kwadratur Gaussa w  $n=2$  punktach (miejsca położenia punktów Gaussa i wagi znajdziemy w Dodatku B). Załóżmy, że grubość  $t$  jest stała, a współczynniki wierzchołków 1, 2, 3 i 4 są odpowiednio: (7,1), (20,5), (14,14), i (5,10). A więc

$$K = t \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_j \alpha_k B^T(\xi_j, \eta_k) \cdot D \cdot B(\xi_j, \eta_k) |J(\xi_j, \eta_k)|$$

Macierze **B** i **J** w tym wyrażeniu są funkcjami współrzędnych  $\xi_j$  i  $\eta_k$  w punktach całkowania (Gaussa). W szczególności dla  $K_{12}$  przy przyjęciu  $n=2$ , co odpowiada wagom  $\alpha_j = \alpha_k = 1.0$  otrzymujemy :

$$K_{12} = t \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^2 B_{1,1(1 \times 3)}^T \cdot D_{(3 \times 3)} \cdot B_{1,2(3 \times 1)} \cdot |J|$$

W tej zależności  $B_{1,1}$  oznacza pierwszą kolumnę podmacierzy  $B_1$ , a  $B_{1,2}$  drugą kolumnę tej podmacierzy. Podstawiając te kolumny otrzymujemy:

$$K_{12} = t(D_{12} + D_{33}) \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^2 D_{G11} \cdot D_{G21} \cdot |J|$$

gdzie  $D_{12}$  i  $D_{33}$  są współczynnikami prawa konstytutywnego. Aby wyprowadzić do końca wyrażenie na  $K_{12}$ , wyznaczmy macierz jacobianu:

$$J = D \cdot C = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta) & (1-\eta) & (1+\eta) & -(1+\eta) \\ -(1-\xi) & -(1+\xi) & (1+\xi) & (1-\xi) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 20 & 5 \\ 14 & 14 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 11-2\eta & 4 \\ -4-2\xi & 9 \end{bmatrix}$$

Wartość wyznacznika tej macierzy wynosi:

$$|J| = \frac{1}{4}(115 - 18\eta + 8\xi)$$

Składniki wymagane do zbudowania macierzy  $D_G$  wynoszą :

$$D_{G11} = \frac{1}{4 \cdot |J|} [-(1-\eta)J_{22} + (1-\xi)J_{12}] = \frac{-5 + 9\eta - 4\xi}{2(115 - 18\eta + 8\xi)}$$

$$D_{G21} = \frac{1}{4 \cdot |J|} [(1-\eta)J_{21} - (1-\xi)J_{11}] = \frac{3(-5 + 2\eta + 3\xi)}{2(115 - 18\eta + 8\xi)}$$

Wyznaczając wartości wyrażeń  $D_{G11}$ ,  $D_{G21}$ , oraz  $I J I$  we wszystkich czterech punktach całkowania i sumując otrzymujemy  $K_{12} = 0.1579 \cdot t \cdot (D_{12} + D_{33})$

## 7.7 Błędy w rozwiązaniach MES

Rozwiązania opierające się na sformułowaniach MES obarczone są błędami. Mamy na myśli tylko te błędy, które wynikają z przybliżonego charakteru metody, nie zaś te, które wynikają z prostych pomyłek, na przykład związanych z niepoprawnym wprowadzeniem danych czy błędami na etapie kodowania programów. Problematyka oceny błędów, obecnie bardzo intensywnie rozwijana, jest bardzo rozległa i skomplikowana i nie będzie tutaj szczegółowo dyskutowana.

Chcąc nieco przybliżyć Czytelnikowi tę tematykę, skoncentrujemy się tylko na pewnych elementach podstawowych.

Ze względu na konsekwentne kontynuowanie w tym skrypcie sformułowania przemieszczeniowego MES spróbujemy rozpatrzeć następujące rozwiązania, wyrażone w przemieszczeniach, pewnego problemu fizycznego. Oznaczmy przez  $u(x)$  hipotetyczne rozwiązanie danego problemu fizycznego, otrzymane w idealnie przeprowadzonym eksperymencie. Rozwiązanie to abstrahuje od przyjmowanego modelu matematycznego tego zadania, opisując rzeczywistość fizyczną taką, jaką ona w istocie swej jest. Przez  $u(x)$  oznaczmy

rozwiązanie dokładne w ramach przyjętego ciągłego matematycznego modelu zadania. Rozwiązanie to spełnia dokładnie układy równań różniczkowych opisujące problem kontinuum, przyjęte prawo fizyczne i warunki początkowo-brzegowe zadania. W tym miejscu możemy już zdefiniować tak zwany błąd modelowania matematycznego:

$$e^{(m)}(x) = u^*(x) - u(x) \quad (7.87)$$

Jeśli przez  $u^{(d)}(x)$  oznaczmy rozwiązanie ściśle w ramach modelu dyskretnego wówczas możemy zdefiniować tak zwany błąd dyskretyzacji.

$$e^{(d)}(x) = u(x) - u^{(d)}(x). \quad (7.88)$$

Jest to błąd powstały w wyniku zastąpienia układu o nieskończenie wielu stopniach swobody (ciągły model matematyczny) układem o skończonej liczbie stopni swobody. Błąd zaokrąglenia wynika z reprezentowania w obliczeniach numerycznych liczb rzeczywistych z dokładnością do odpowiedniej liczby cyfr. Ten błąd można więc zdefiniować następująco:

$$e^{(z)}(x) = u^{(d)}(x) - u^{(n)}(x), \quad (7.89)$$

gdzie przez  $u^{(n)}(x)$  oznaczono otrzymane rozwiązanie numeryczne. Kolejny tak zwany błąd dziedziczny lub błąd rozwiązania jest na dowolnym etapie obliczeń sumą błędów dyskretyzacji i zaokrąglenia:

$$e^{(r)}(x) = e^{(d)}(x) + e^{(z)}(x) = u(x) - u^{(n)}(x). \quad (7.90)$$

Przedmiotem badań w ramach MES jest zazwyczaj błąd rozwiązania lub, ograniczając się do relacji między modelem kontynualnym a dyskretnym, błąd dyskretyzacji. Pozostały, zdefiniowany tutaj błąd  $e(x)$ , który opiera się na znajomości dokładnego rozwiązania problemu fizycznego, jasno uzmysławia trudności modelowania matematycznego zjawisk fizycznych, ale w oczywisty sposób wykracza poza problematykę MES.

Należy tutaj koniecznie podkreślić, że w wielu rozpowszechnionych programach MES nie istnieje możliwość efektywnej oceny błędów rozwiązań numerycznych. Jest to poważna wada istniejących kodów MES. W tej sytuacji upewnienie się co do wartości i inżynierskiej przydatności otrzymanego rozwiązania jest związane z kilkukrotnym przeliczeniem tego samego problemu. Dopiero zbieżność otrzymywanych wyników dla różnych gęstości siatek MES czy też przy zmianie stopnia wielomianów aproksymujących może być podstawą do zaakceptowania rozwiązania.

Ocena błędów dyskretyzacji jest bardzo kłopotliwa. Aby przeprowadzić taką analizę potrzebna jest na przykład jawna postać macierzy sztywności. Dla niektórych prostych elementów skończonych, podaliśmy w tym skrypcie takie właśnie postaci macierzy sztywności. Dla zdecydowanej jednak większości dyskusowanych elementów, ze względu na stosowane procedury numerycznego całkowania, jawna postać tych macierzy nie jest znana.

Błąd dyskretyzacji bywa w literaturze szacowany za pomocą wyrażeń typu  $c h$ , gdzie  $c$  jest pewną stałą,  $h$  - charakterystycznym wymiarem elementu skończonego a  $p$  jest wykładnikiem potęgi, który charakteryzuje zbieżność ciągu rozwiązań powstających w wyniku zmniejszania wymiaru  $h$  czyli zagęszczania siatki elementów. Zilustrujmy więc na najprostszym przykładzie takie szacowanie zbieżności. Rozpatrzmy przypadek jednowymiarowy – pręt poddany osiowemu, równomiernie rozłożonemu obciążeniu. Załóżmy, że sztywność  $EA = \text{const}$ . Przyjmijmy podział pręta na dwuwęzłowe elementy skończone o różnej długości, tak że elementy łączące się w węzle i mają odpowiednio długości  $h$  oraz  $\gamma h$  (rys. 7.9). Odpowiednie macierze sztywności dla elementów  $(i-1, i)$  oraz  $(i, i+1)$  mają postać

$$k^{(i,i-1)} = \frac{EA}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad k^{(i,i-1)} = \frac{EA}{\gamma \cdot h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (7.91)$$

więc równanie równowagi  $i$ -tego węzła prowadzi do warunku:

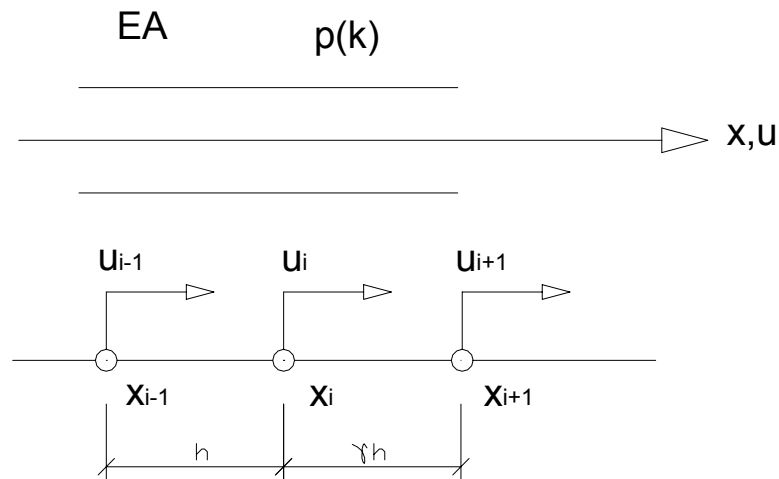
$$\frac{EA}{h}[-u_{i-1} + u_i] + \frac{EA}{\gamma \cdot h}[-u_{i-1} + u_i] = \frac{ph(1+\gamma)}{2} \quad (7.92)$$

Rozwijając w szereg Taylora przemieszczenie wokół punktu  $i$  można wyrazić przemieszczenia w punktach sąsiednich jako:

$$\begin{aligned} u_{i+1} &= u \Big|_{x=x_i} + \frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_i} \gamma h + \frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x=x_i} \frac{(\gamma h)^2}{2!} + \frac{d^3 y}{dx^3} \Big|_{x=x_i} \frac{(\gamma h)^3}{3!} + \dots \\ u_{i-1} &= u \Big|_{x=x_i} - \frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_i} h + \frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x=x_i} \frac{h^2}{2} - \frac{d^3 y}{dx^3} \Big|_{x=x_i} \frac{h^3}{6} + \dots \end{aligned} \quad (7.93)$$

Podstawiając te równania do równań równowagi (7.92) otrzymamy

$$\frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x=x_i} - \frac{h}{3}(1-\gamma) \frac{d^3 y}{dx^3} \Big|_{x=x_i} + \frac{h^2}{12} \frac{1+\gamma^3}{1+\gamma} \frac{d^4 y}{dx^4} \Big|_{x=x_i} + \frac{p_i}{EA} = 0 \quad (7.94)$$



Rys. 7.9. Dyskretyzacja pręta

podczas gdy dokładne wyrażenie opisujące równanie równowagi w punkcie  $i$  w zapisie kontynualnym jest równaniem różniczkowym o postaci:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{p_i}{EA} = 0 \quad (7.95)$$

Widzimy, że dla wymiaru siatki  $h \rightarrow 0$  rozwiązanie dyskretyzowane dąży do rozwiązania ścisłego. W przypadku gdy  $\gamma = 1$  (siatka regularna) zbieżność jest kwadratowa, gdy  $\gamma \neq 1$  – tylko liniowa. Powyższy prosty przykład może stanowić wprowadzenie do dowodów zbieżności rozwiązań liniowych problemów MES.

Przyczyną błędów numerycznych w MES jest częstokroć tak zwane złe uwarunkowanie macierzy sztywności układu. Polega ono na tym, że wartość wyznacznika tej macierzy jest bliska zeru. W takich sytuacjach niewielka zmiana jednego ze współczynników układu równań może powodować drastyczne różnice w rozwiązaniach. Posłużmy się następującym przykładem. Układ równań:

$$\begin{bmatrix} 1.00 & -1.00 \\ -1.00 & 1.02 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.00 \\ -2.00 \end{bmatrix} \quad \text{ma rozwiązanie} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 104 \\ 100 \end{bmatrix}$$

a nie wiele od niego różniący się układ

$$\begin{bmatrix} 1.00 & -1.00 \\ -1.00 & 1.01 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.00 \\ -2.00 \end{bmatrix} \text{ ma rozwiązanie } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 204 \\ 200 \end{bmatrix}$$

Zauważmy także, że gdyby obliczenia były prowadzone z dokładnością do zaledwie dwóch cyfr znaczących, to wszystkie współczynniki macierzy sztywności byłyby równe jedności i macierz ta byłaby osobliwa.

W praktycznych obliczeniach konstrukcji z sytuacją złego uwarunkowania macierzy sztywności możemy mieć do czynienia najczęściej w przypadkach sprężystego podparcia lub podpór usytuowanych ukośnie, kiedy to sztywności różnych fragmentów konstrukcji bardzo się od siebie różnią. Parametrem charakteryzującym uwarunkowanie macierzy jest tak zwany współczynnik uwarunkowania zdefiniowany jako:

$$\kappa(K) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \quad (7.96)$$

gdzie  $\lambda_{\min}$  i  $\lambda_{\max}$  są odpowiednio maksymalną i minimalną wartością własną macierzy sztywności  $K$ . Współczynnik ten używany jest do oszacowania liczby poprawnych cyfr znaczących  $s$  w rozwiązaniu układu równań, gdy obliczenia są prowadzone z dokładnością do  $\gamma$  cyfr znaczących (w PC około 7 cyfr). Mamy wówczas:

$$s \geq p - \log_{10} \kappa(K) \quad (7.97)$$

Im gorsze jest uwarunkowanie macierzy  $K$ , to znaczy im większa jest liczba  $K$  tym trudniej o wysoką dokładność rozwiązania. W praktyce w programach MES często się zdąży, że uwarunkowanie sięga  $K = 10^6$ , stąd wpływa sugestia by na komputerach klasy PC prowadzić obliczenia przy wykorzystaniu podwójnej precyzji.

Błędy mogą również wynikać z nieprawidłowo opracowanych elementów skończonych. Wiemy już, że spełniając tak zwany warunek zgodności (ciągłości pola przemieszczeń) i warunki zupełności (prawidłowe opisanie w elemencie pola stałych odkształceń i nie powstawanie odkształceń przy deklarowaniu ruchów sztywnych) jak to ma miejsce w omawianych modelach przemieszczeniowych osiąga się wraz ze wzrostem liczby stopni swobody monotoniczną zbieżność do rozwiązania dokładnego.

Ocenie poprawności sformułowania elementu skończonego może służyć test wartości własnych macierzy sztywności  $k$  tego elementu. Rozwiązuje się równanie

$$(k - \lambda I) \cdot v = 0, \quad (7.98)$$

które można interpretować jako opis drgań własnych elementu z jednostkową macierzą mas. Możemy wówczas sprawdzić, czy analogicznym postaciom deformacji odpowiadają te same wartości własne, gdyż nie powinny one ulegać zmianom przy sztywnych ruchach ciał. Także wartości własne odpowiadające ruchom sztywnym powinny być równe zeru, a wszystkie pozostałe powinny być rzeczywiste i dodatnie.

Przy innym niż stosowanym w tym skrypcie formułowaniu elementów skończonych (na przykład hybrydowe czy mieszane) rezygnuje się często z pełnej zgodności modelu. Wówczas do oceny błędów stosuje się techniki sprawdzające zgodność układu elementów. Również metody adaptacyjne, intensywnie ostatnio rozwijane, wymagają wprowadzenia specjalnych norm błędów i oceny zbieżności. Czytelników zainteresowanych tą problematyką odsyłamy do literatury źródłowej.

## 7.8. Uwagi końcowe

Na koniec poświęcimy trochę uwagi tematowi zbieżności metody elementów skończonych w odniesieniu do elementów izoparametrycznych oraz podamy kilka uwag na temat całkowania numerycznego.

Jak pamiętamy z rozdziału 5, elementy skończone muszą spełniać pewne wymagania, by zapewnić monotoniczną zbieżność z wynikami dokładnymi. Były to warunki zgodności i zupełności. W elementach izoparametrycznych spełnienie warunku zgodności polega na zbadaniu, czy współrzędne i przemieszczenia elementów na granicy pomiędzy elementami są te same. Gdy elementy przylegające do siebie mają te same węzły (tę samą liczbę węzłów), to wymóg ten jest spełniony automatycznie ze względu na cechę tych elementów. Spełnienie warunku zupełności wymaga sprawdzenia, czy element może dokonywać ruchu sztywnego bez powstania w nim naprężeń oraz czy jest możliwy do osiągnięcia stan odpowiadający stałemu odkształceniu. W celu dokonania takiej analizy rozpatrzmy element trójwymiarowy jako najogólniejszy przypadek elementu izoparametrycznego. Warunek ruchu jako ciała sztywnego oraz możliwość występowania stałego stanu odkształcenia wymagają, by funkcja przemieszczeń elementu mogła zawierać pole w postaci:

$$\begin{aligned}u &= a_1 + b_1 x + c_1 y + d_1 z, \\v &= a_2 + b_2 x + c_2 y + d_2 z, \\w &= a_3 + b_3 x + c_3 y + d_3 z,\end{aligned}\tag{7.99}$$

gdzie  $a$ .,  $b$ .,  $c$ .,  $d$  . są stałymi. Przemieszczenia zatem węzłów odpowiadające polu (7.99) mają postać:

$$\begin{aligned}u_i &= a_1 + b_1 x_i + c_1 y_i + d_1 z_i, \\v_i &= a_2 + b_2 x_i + c_2 y_i + d_2 z_i, \\w_i &= a_3 + b_3 x_i + c_3 y_i + d_3 z_i,\end{aligned}\tag{7.100}$$

gdzie  $i=1, \dots$ , liczba węzłów.

$$u = \sum_{i=1}^q N_i u_i, \quad v = \sum_{i=1}^q N_i v_i, \quad w = \sum_{i=1}^q N_i w_i,\tag{7.101}$$

co po podstawieniu (7.100) daje:

$$\begin{aligned}u &= a_1 \sum N_i + b_1 x + c_1 y + d_1 z, \\v &= a_2 \sum N_i + b_2 x + c_2 y + d_2 z, \\w &= a_3 \sum N_i + b_3 x + c_3 y + d_3 z,\end{aligned}\tag{7.102}$$

W sformułowaniu izoparametrycznym funkcje przemieszczeń zapisać możemy w postaci:

Ponieważ dla elementów izoparametrycznych jest prawdziwa zależność  $\sum N = 1$ , warunek więc zupełności jest spełniony.

Całkowanie numeryczne w metodzie elementów skończonych wymaga odpowiedzi na dwa podstawowe pytania: jakiego typu formuły wykorzystać i jakiego rzędu całkowanie zastosować. Wspomnieliśmy wyżej, że ze względu na dużą efektywność powszechnie używane są kwadratury Gaussa. Wybór rzędu całkowania zależy w ogólności od postaci funkcji całkowanej. Stosując odpowiednio wysoki rząd całkowania możemy mieć pewność, że otrzymane macierze i wektory będą dokładne. Często stosuje się jednak niższy rząd całkowania, niż tego wymaga postać funkcji podcałkowej. Wynika to z faktu, że proces całkowania jest stosunkowo pracochłonny i długi, w związku z czym o ile jest to możliwe stosuje się tzw. całkowanie zredukowane. W takich przypadkach należy jednak postępować bardzo ostrożnie, bowiem rząd całkowania nie może być niższy od pewnego poziomu wyznaczonego wnikliwą analizą każdego przypadku.

### Zadania

Proszę wyznaczyć wymagany rząd całkowania metodą Gaussa dla macierzy sztywności prostokątnego elementu izoparametrycznego Q4.

