



PODSUMOWANIE CZWARTEJ CZĘŚCI

Uwagi ogólne

Mechanika nieliniowa zajmuje się problemami, w których zależności między naprężeniami lub siłami a wielkościami kinematycznymi są nieliniowe. Rozróżniamy dwa zasadnicze rodzaje nieliniowości: kinematyczną (geometryczną) i fizyczną.

Nieliniowość kinematyczna pojawia się wtedy, gdy rozważany obiekt wykazuje duże odkształcenia albo duże przemieszczenia albo duże odkształcenia i duże przemieszczenia jednocześnie.

Nieliniowość fizyczna występuje nawet przy bardzo małych odkształceniach i przemieszczeniach. Wynika ona z fizycznych własności materiału lub konstrukcji i objawia się wówczas, gdy związki konstytutywne są nieliniowe. Są to np. materiały nieliniowo-sprężyste lub plastyczne. Szczególnego typu nieliniowość fizyczną w zakresie małych przemieszczeń wykazują również konstrukcje wykonane z materiału liniowo-sprężystego, ale nie spełniające postulatów *Clapeyrona*. Mamy tu na myśli tzw. konstrukcje luzowe, tzn. konstrukcje wykazujące niewielkie luzy w połączeniach elementów. W skali makro (na poziomie całej konstrukcji) obecność luzów jest przyczyną „zakleszczania się” (ang. *locking*), tzn. wzrostu sztywności w miarę wzrostu obciążenia. Zakleszczanie się, poza sprężystością i plastycznością można uważać za kolejny prototyp nieliniowego prawa fizycznego.

Jest oczywiste, że występują również przypadki bardziej złożone, w których rozważany obiekt wykazuje zarówno nieliniowość kinematyczną jak i fizyczną. Dla wszystkich zadań nieliniowych charakterystyczne jest to, że nie obowiązuje zasada superpozycji skutków.

Do konstrukcji niesprężystych zaliczamy takie, których materiał poza cechami sprężystymi wykazuje inne cechy, jak np. lepkość. Należą do nich konstrukcje (materiały) lepko-sprężyste. Gdy zależność pomiędzy naprężeniem a prędkością odkształceń jest liniowa, obowiązuje zasada superpozycji względem cykli naprężeń i odkształceń jako funkcji czasu. W odróżnieniu od procesów sprężystych są to jednak procesy, w których obserwujemy dyssypację energii.

Nieliniowe zachowanie się konstrukcji wykonanych z materiału liniowo-sprężystego

• Konstrukcje z luzami obrotowymi

Konstrukcje prętowe z luzami obrotowymi wykazują *nieliniowość fizyczną*. Przegubowe połączenia elementów konstrukcji mogą wykazywać ograniczenie kąta obrotu. Są to tzw. *połączenia luzowe*. Jeśli wzajemny kąt obrotu prętów jest zawarty w przedziale $< -\Phi^-, \Phi^+ >$, to mamy do czynienia ze zwykłym przegubem. Dla wartości granicznych $\Phi = \Phi^+$ lub $\Phi = -\Phi^-$ połączenie przybiera cechy utwierdzenia. Charakterystykę fizyczną takiego połączenia przedstawiają zależności:

$$M = 0, \quad -\Phi^- < \Phi < \Phi^+;$$

$$M \geq 0, \quad \Phi = \Phi^+;$$

$$M \leq 0, \quad \Phi = -\Phi^-.$$

Przyjęcie luzów kątowych sprawia, że schemat statyczny konstrukcji luzowej w miarę narastania obciążeń zmienia się. Jest to zatem konstrukcja, która nie spełnia postulatów *Clapeyrona*; wykresy *obciążenie–przemieszczenie* są liniami łamanymi, tzn. są nieliniowe. Racjonalne obranie wartości kątów Φ^+ i Φ^- daje efekt „dostosowania” się schematu statycznego do intensywności i charakteru obciążenia. Wymienione cechy konstrukcji nie są bez znaczenia dla praktyki projektowej oraz analizy wpływu luzów podporowych na zachowanie się konstrukcji.

Rozwiązanie problemu konstrukcji luzowych polega na obliczaniu kolejnych schematów statycznych za pomocą znanych metod liniowej analizy konstrukcji (metodą sił, metodą przemieszczeń). Należy jednak zwrócić uwagę, że nieliniowość zależności *obciążenie–przemieszczenie* nie pozwala stosować zasady superpozycji. Aktualny stan mechaniczny konstrukcji jest wynikiem akumulacji zmiennych stanu (tzn. przemieszczeń i sił przekrojowych) obliczonych w poszczególnych schematach statycznych. Obliczenia statyczne konstrukcji luzowych metodami tradycyjnymi są zazwyczaj bardzo uciążliwe, a wyniki obliczeń nie zawsze są poprawne. Najnowsze sformułowanie ogólnego problemu konstrukcji luzowych prowadzi do zadań liniowego dopełnienia lub programowania matematycznego (liniowego i kwadratowego), rozwiązywanych za pomocą gotowych procedur komputerowych.

• Kratownica Misesa

Nazwę taką nosi symetryczna kratownica składająca się z dwóch prętów nachylonych pod kątem α w stosunku do poziomu. Obciążenie stanowi siła pionowa P , przyłożona w osi symetrii kratownicy. Jeżeli wyniosłość kratownicy jest mała, to prawidłowy opis deformacji kratownicy wymaga odstąpienia od zasady zeszywnienia, tzn. równania równowagi trzeba układać dla konfiguracji aktualnej (po odkształceniu). Jest to zatem problem *kinematycznie nieliniowy*. Zakłada się, że deformacja konstrukcji jest symetryczna. Przyjmuje się ponadto, że odkształcenia liniowe prętów są małe, a materiał prętów kratownicy jest liniowo-sprężysty. Przemieszczenie pionowe środkowego węzła v wynika z ekstremum energii potencjalnej $\Pi(v)$:

$$\Pi(v) = \int_s \frac{1}{2} \cdot EA \lambda^2 \cdot ds - P \cdot v,$$

gdzie $\lambda(v) = \Delta L(v) / L$ i oznacza wydłużenie względne osi prętów, a L jest długością prętów kratownicy. W podejściu kinematycznie nieliniowym przyrost długości prętów ΔL trzeba obliczyć w sposób ścisły, używając wzoru *Pitagorasa*. Równowaga zachodzi, gdy $\partial \Pi / \partial v = 0$. Z tego warunku wyznacza się funkcję $P(v)$.

Obciążenie $P(v)$ może odpowiadać równowadze statecznej ($\partial P / \partial v = P_{,v} > 0$) lub niestatecznej ($P_{,v} < 0$). Z budowy zależności na energię potencjalną wnioskujemy, że pochodna $P_{,v}$ jest równa drugiej pochodnej energii potencjalnej. Równowaga stateczna występuje zatem wówczas, gdy energia potencjalna osiąga minimum, tzn., gdy $\partial \Pi / \partial v = 0$, $\partial^2 \Pi / \partial v^2 > 0$, natomiast równowaga jest niestateczna, gdy energia potencjalna osiąga maksimum: $\partial \Pi / \partial v = 0$, $\partial^2 \Pi / \partial v^2 < 0$.

Dla umiarkowanych wartości siły P funkcja $\Pi(v)$ osiąga minimum, co odpowiada równowadze statecznej: $dP/dv = \partial^2 \Pi / \partial v^2 > 0$. Gdy $dP/dv = \partial^2 \Pi / \partial v^2 = 0$, funkcja $P(v)$ osiąga lokalne maksimum. Jest to tzw. *punkt graniczny*. Przy dalszym powiększaniu siły P obserwujemy zjawisko tzw. „przeskoku” (ang. *snap-through*) i ustalenie się nowego położenia równowagi, które odpowiada ujemnemu kątowi nachylenia prętów. Początkowo pręty kratownicy były ściskane. W nowym położeniu równowagi znak sił w prętach zmienia się – pręty są rozciągane. Przeskok obserwujemy tylko wówczas, gdy czynnikiem sterującym jest obciążenie P . Jeżeli będziemy powiększać przemieszczenie v (sterowanie przemieszczeniem), to począwszy od punktu granicznego obserwujemy spadek reakcji pionowej węzła środkowego.

Zjawisko przeskoku ma bardzo duże znaczenie w praktyce inżynierskiej. Najczęściej problem ten pojawia się w konstrukcjach powłokowych. Przykład kratownicy *Misesa* dowodzi, że opis niektórych zjawisk występujących w mechanice wymaga odejścia od zasady zeszywnienia.

• Układy ciągnowe

Cięgno jest prętem mającym jedynie sztywność rozciągania. Cechy cięgna wykazują np. cienkie druty i liny. Dla ujemnych odkształceń liniowych (tzn. skręceń) siła normalna jest równa zero. Podczas rozciągania cięgno może zachowywać się nieliniowo lub liniowo. Związek fizyczny cięgien o liniowej charakterystyce przy rozciąganiu, można zapisać następująco:

$$N = \begin{cases} k\lambda, & \lambda \geq 0 \\ 0, & \lambda < 0, \end{cases}$$

gdzie $k = EA$ i oznacza sztywność rozciągania cięgna.

Przyjęciu obciążeń przez układ cięgowy towarzyszą na ogół duże przemieszczenia. Z tego powodu problemy mechaniki cięgien są z natury rzeczy *zarówno fizycznie, jak i kinematycznie nieliniowe*.

Zasadniczym mankamentem konstrukcji cięgowych jest ich mała sztywność. Dlatego przed przyłożeniem obciążenia zewnętrznego poszczególne cięgna są poddawane wstępnemu naciągowi. Wstępne wydłużenia cięgien nie mogą być zupełnie dowolne, ponieważ muszą spełniać warunki: brzegowe, ciągłości, równowagi i naprężeniowe. Ponadto, ze względu na brak sztywności ściskania (jednostronne więzy naprężeniowe) trzeba jeszcze uwzględnić możliwość odciążenia („wyłączenia”) cięgien. Ustalenie konfiguracji wstępnej w bardziej rozbudowanych układach stanowi zatem problem sam dla siebie.

Problemy o podobnym stopniu trudności pojawiają się, kiedy układ cięgowy jest poddany działaniu obciążenia zewnętrznego.

W obliczeniach konstrukcji cięgowych wykorzystuje się równania geometryczne i fizyczne oraz równania równowagi. W tych ostatnich trzeba uwzględnić zmiany geometrii. Inny, równie ogólny sposób polega na wykorzystaniu zasady minimum energii potencjalnej w podejściu kinematycznie nieliniowym. W obu metodach problem sprowadza się do rozwiązania układu algebraicznych równań nieliniowych. W praktyce liczba stopni swobody jest na ogół duża, a więc do rozwiązania tego układu stosuje się metody przybliżone. Najczęściej posługuje się wówczas metodą *Newtona-Raphsona*. Podczas obliczeń należy zwrócić uwagę, że wyłączenie danego cięgna występuje w momencie, gdy całkowite wydłużenie cięgna jest równe zeru. Powoduje to odpowiednią modyfikację wyjściowego układu równań.

Pręty wykonane z materiału fizycznie nieliniowego

Największą trudnością w badaniu zagadnień nieliniowych jest to, że nie obowiązuje zasada superpozycji. Drugą dosyć kłopotliwą okolicznością jest tzw. znakoczulość materiału. Materiały znakoczule podczas wydłużania zachowują się inaczej niż podczas skracania. W materiałach wykazujących cechy plastyczne wiele trudności sprawia fakt, że odciążenie konstrukcji przebiega po innej drodze niż obciążenie. W olbrzymiej większości przypadków, jak pokazuje doświadczenie, można jednak stosować znane hipotezy kinematyczne (np. hipotezę płaskich przekrojów).

• *Materiał nieliniowo-sprężysty*

Proces sprężysty (w tym i nieliniowy) charakteryzuje się tym, że krzywa obciążenia pokrywa się na wykresie $\sigma(\epsilon)$ z krzywą odciążenia. Od charakterystyki $\sigma(\epsilon)$ wymagamy przede wszystkim, by rozciąganiu odpowiadało wydłużenie, a ściskaniu – skrócenie, tzn. by znak naprężeń odpowiadał znakowi odkształceń, czyli by

$\sigma \cdot \epsilon \geq 0$. Ważne jest również, by materiał był stateczny, tzn. by $d\sigma \cdot d\epsilon \geq 0$. Wymagania powyższe w istotny sposób ograniczają klasę możliwych do zaakceptowania nieliniowych funkcji $\sigma(\epsilon)$.

Fizycznie nieliniową sprężystość można też definiować za pomocą stosownie obranej dodatnio określonej funkcji energii sprężystej właściwej wyrażonej przez naprężenia $W_{\sigma}(\sigma)$ lub przez odkształcenia $W_{\epsilon}(\epsilon)$. Wówczas, wykorzystując własność potencjału funkcji W , związek fizyczny zapisujemy następująco:

$$\epsilon_{ij} = \frac{\partial W_{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} \quad \text{lub} \quad \sigma_{ij} = \frac{\partial W_{\epsilon}}{\partial \epsilon_{ij}}.$$

W przypadku liniowej sprężystości energia W jest kwadratową funkcją składowych stanu odkształcenia lub naprężenia. Sprężystość nieliniowa odpowiada funkcjom energii wyższego stopnia, a materiał tak zdefiniowany nazywamy materiałem hipersprężystym.

Potencjały sprężyste można budować, używając uogólnione naprężenia (np. siły podłużne N i momenty zginające M) i uogólnione odkształcenia (względne wydłużenia osi pręta λ i krzywizny k). Konkretnie postacie tych potencjałów dla danej funkcji $\sigma(\epsilon)$ otrzymuje się po wykorzystaniu prawa płaskich przekrojów i dokonaniu całkowania w obszarze przekroju pręta. Wówczas zachodzą zależności:

$$\lambda = \frac{\partial W(N, M)}{\partial N}, \quad k = \frac{\partial W(N, M)}{\partial M} \quad \text{lub} \quad N = \frac{\partial W(\lambda, k)}{\partial \lambda}, \quad M = \frac{\partial W(\lambda, k)}{\partial k}.$$

Znakoczułość materiału objawia się w ten sposób, że $\sigma(\varepsilon) \neq -\sigma(-\varepsilon)$. W takich przypadkach okazuje się np., że przy czystym zginaniu oś obojętna nie pokrywa się z osią ciężkości przekroju. Uwaga ta dotyczy nawet przekrojów bisymetrycznych.

To, że w prętach nieliniowo-sprężystych nie obowiązuje zasada superpozycji, wyrażają zależności:

$$(\varepsilon)_{N+M} \neq (\varepsilon)_N + (\varepsilon)_M \quad \text{oraz} \quad (\sigma)_{N+M} \neq (\sigma)_N + (\sigma)_M,$$

gdzie indeksy N i M dotyczą odpowiednio siły podłużnej i momentu zginającego.

Warto zwrócić uwagę, że kształt wykresów naprężeń normalnych na wysokości przekroju $\sigma(z)$ odpowiada wykresowi $\sigma(\varepsilon)$, obróconemu o 90° . Podobieństwo tych wykresów występuje tylko wówczas, gdy obowiązuje hipoteza *Bernoulliego*. Z hipotezy tej wynika, że dla ustalonych wartości λ i k rozkład naprężeń $\sigma(z)$ jest odpowiednio przeskalowanym wykresem $\sigma(\varepsilon)$.

Należy dodać, że zadania mechaniki prętów nieliniowo-sprężystych są bardzo pracochłonne i zawsze wymagają gruntownej analizy poprawności uzyskanych rezultatów. Wydaje się, że przedstawione wyżej uwagi dobrze ilustrują rozległość problematyki pojawiającej się z chwilą odejścia od klasycznego modelu materiału liniowo-sprężystego.

• *Materiał sprężysto-idealnie plastyczny*

Materiał sprężysto-plastyczny charakteryzuje się tym, że w procesie deformacji mogą pojawić się trwałe odkształcenia plastyczne. W najprostszym modelu sprężysto-idealnie plastycznym (bez wzmocnienia) zakłada się, że granice proporcjonalności (σ_H), sprężystości (σ_S) i plastyczności (σ_P) pokrywają się, a wykresy $\sigma(\varepsilon)$ dla rozciągania i ściskania są identyczne, czyli $\sigma(\varepsilon) = -\sigma(-\varepsilon)$. Początkową postać funkcji $\sigma(\varepsilon)$ w tym przypadku można zapisać następująco:

$$\sigma(\varepsilon) = \begin{cases} E \cdot \varepsilon, & |\varepsilon| \leq \varepsilon_S, \\ \sigma_P \cdot \operatorname{sgn} \varepsilon, & |\varepsilon| \geq \varepsilon_S, \end{cases}$$

gdzie $\varepsilon_S = \sigma_P / E$. W czasie obciążenia, jeżeli $|\varepsilon| \leq \varepsilon_S$, materiał jest w stanie sprężystym. Przekroczenie odkształcenia ε_S odpowiada przejściu w stan plastyczny, w którym narastają odkształcenia plastyczne przy stałej wartości naprężenia: $\sigma = \sigma_P$. Przyrostowi odkształceń plastycznych towarzyszy rozpraszanie energii, czyli tzw. dyssypacja. Jeżeli odkształcenia nadal rosną, to nie ma żadnej różnicy między materiałem sprężysto-plastycznym a materiałem nieliniowo-sprężystym. Różnica między nimi uwidacznia się dopiero podczas odciążenia. W materiale nieliniowo-sprężystym krzywa obciążenia pokrywa się z krzywą odciążenia, a proces ma charakter całkowicie odwracalny. Tymczasem cechą charakterystyczną zjawisk związanych z odkształceniami plastycznymi jest ich nieodwracalność. Odciążenie przebiega wzdłuż linii prostej o nachyleniu odpowiadającym początkowemu modułowi sprężystości. Po usunięciu obciążenia pozostają trwałe odkształcenia plastyczne ε_P . Pole zawarte pomiędzy krzywymi obciążenia i odciążenia odpowiada energii rozproszonej. Ponowne obciążenie pręta odpowiada wykresowi $\sigma(\varepsilon)$ przesuniętemu wzdłuż osi odkształceń ε o wartość równą wytworzonym w danym procesie odkształceniom plastycznym. Widzimy zatem, że aktualny stan mechaniczny zależy od historii deformacji plastycznych.

Działanie siły normalnej

Przypadek działania siły normalnej jest trywialny, gdyż $\varepsilon = \lambda$, a naprężenia σ są równomiernie rozłożone w obrębie przekroju, czyli $N = \sigma A$. Wobec tego wykres zależności $N(\lambda)$ ma taki sam kształt jak wykres $\sigma(\varepsilon)$. Największa wartość siły normalnej, jaką może przenieść przekrój pręta

$$N_{\max} = N_P = \sigma_P \cdot A.$$

Siła N_P odpowiada tzw. nośności granicznej przekroju przy działaniu siły normalnej. Osiągnięciu nośności granicznej towarzyszy uplastycznienie wszystkich włókien przekroju. Wydłużenia pręta narastają przy stałej wartości siły normalnej; obserwujemy wówczas tzw. płynięcie plastyczne.

Działanie momentu zginającego

Podczas stopniowego zwiększania momentu zginającego $M = M_y$, działającego na przekrój monosymetryczny (tj. o jednej osi symetrii) obserwujemy najpierw stan, w którym $|\varepsilon| < \varepsilon_S$. W stanie tym oś obojętna pokrywa się z osią ciężkości y , a rozkłady odkształceń i naprężeń są identyczne z rozkładami dla materiału sprężystego. Gdy największe odkształcenie, występujące w skrajnych (np. dolnych) włóknach ($z_d > z_g$), osiągnie wartość ε_S , to naprężenie normalne w tych włóknach $\sigma = \sigma_P$. Odpowiada to momentowi zginającemu:

$$M = M_S = \sigma_P \cdot W^{(S)}$$

gdzie $W^{(S)}$ oznacza „sprężysty” wskaźnik wytrzymałości dla dolnych włókien przekroju, $W^{(S)} = J_y / z_d$. Powiększanie momentu zginającego powoduje wzrost odkształceń i jednostronne uplastycznienie dolnych włókien. W przekroju o jednej osi symetrii oś obojętna nie pokrywa się już z osią ciężkości ($\lambda \neq 0$). Wzrostowi momentu towarzyszy dalszy wzrost odkształceń i zmiana położenia osi obojętnej. Z chwilą, gdy w skrajnych górnych włóknach przekroju odkształcenie osiągnie wartość $-\varepsilon_S$ (tzn. $\varepsilon(-z_g) = -\varepsilon_S$), rozpoczyna się dwustronne uplastycznienie przekroju. Stan sprężysty występuje wówczas tylko w strefie wewnętrznej przekroju, sąsiadującej z osią obojętną (tzw. jądro sprężyste). Przy znacznych odkształceniach jądro sprężyste obejmuje już tylko bardzo małą część przekroju. Można wówczas przyjąć, że uplastyczniony jest cały przekrój. W strefie ściskanej występują stałe naprężenia o wartości $-\sigma_P$, a w strefie rozciąganej naprężenia o wartości $+\sigma_P$. Położenie osi obojętnej wynika z warunku, że $N = 0$. Jest to zatem linia dzieląca na pół pole przekroju. Pełne uplastycznienie przekroju odpowiada osiągnięciu nośności granicznej przekroju na zginanie. Nośność ta jest największą wartością momentu zginającego, jaka może przenieść przekrój pręta:

$$M_P = \sigma_P \cdot W^{(P)}, \text{ przy czym } W^{(P)} = 2S_y(A^+),$$

gdzie $W^{(P)}$ jest tzw. plastycznym wskaźnikiem wytrzymałości przekroju, przy czym $W^{(P)} \geq W^{(S)}$. Symbol $2S_y(A^+)$ oznacza podwojony moment statyczny połowy przekroju względem osi ciężkości y .

Z chwilą osiągnięcia granicznego momentu plastycznego M_P obserwujemy narastanie kąta obrotu przekroju przy stałej wartości momentu zginającego ($M = M_P$).

W procesie zginania przekroju pręta można więc wyróżnić trzy stany:

- sprężysty, $M < M_S$,
- sprężysto-plastyczny (jedno- i dwustronne uplastycznienie), $M_S < M < M_P$,
- graniczny, $M = M_P$.

W przekrojach bisymetrycznych, a więc i w przekroju prostokątnym, uplastycznienie obu skrajnych włókien następuje równocześnie, gdyż $\sigma(\varepsilon) = -\sigma(-\varepsilon)$, a oś obojętna w procesie zginania pokrywa się zawsze z osią ciężkości

Dla pręta o przekroju prostokątnym ($b \times h$)

$$M_S = \sigma_P \cdot W^{(S)}, \text{ gdzie } W^{(S)} = bh^2 / 6,$$

oraz

$$M_P = \sigma_P \cdot W^{(P)}, \text{ gdzie } W^{(P)} = bh^2 / 4 = 1,5W^{(S)}.$$

Momentowi granicznemu towarzyszy nieskończenie duża krzywizna.

Jeśli na przekrój działa moment zginający M , odpowiadający stanowi sprężysto-plastycznemu ($M_S < M < M_P$), to zależność pomiędzy momentem M a krzywizną k przybiera postać:

$$M(k) = \begin{cases} kEJ, & |k| \leq k_S, \\ M_P \cdot \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{k_S}{k} \right)^2 \right] \operatorname{sgn}(k), & |k| \geq k_S, \text{ gdzie } k_S = \frac{2\sigma_P}{Eh}. \end{cases}$$

Przy obciążeniu zależność $M(k)$ jest nieliniowa, a przy odciążeniu – podobnie jak zależność $\sigma(\varepsilon)$ – przedstawia linię prostą o nachyleniu odpowiadającym sztywności w obszarze sprężystym. Po odciążeniu odnotowujemy pewną krzywiznę resztkową (trwałą) $k^{(r)}$. Bardzo istotne jest jednak to, że po odciążeniu w przekroju pozostają również samorównoważące się naprężenia resztkowe (residualne) $\sigma^{(r)}$. Wyznaczenie naprężeń resztkowych w tym przypadku nie jest trudne. Ponieważ odciążenie ma charakter czysto sprężysty, wyznaczenie naprężeń resztkowych polega na dodaniu liniowego wykresu naprężeń spowodowanego działaniem momentu przeciwnego znaku. W efekcie pozostają pewne naprężenia resztkowe, będące w równowadze z zerowym obciążeniem. Naprężenia te oraz odkształcenia trwałe należy uwzględnić przy ponownym dowolnym obciążeniu przekroju. Aktualny stan naprężenia zależy zatem od historii obciążenia.

Ugięcia belek częściowo uplastycznionych wyznacza się za pomocą równania różniczkowego linii ugięcia lub równania pracy wirtualnej z wykorzystaniem zależności $M(k)$. Odciążenie konstrukcji uplastycznionej – podobnie jak w przypadkach punktu oraz przekroju – przebiega sprężysto. Po odciążeniu konstrukcja wykazuje pewne ugięcia resztkowe i pewien stan naprężeń resztkowych, będący w równowadze z zerowym obciążeniem. Mamy tu na myśli nie tylko naprężenia w obrębie poszczególnych przekrojów, ale również naprężenia uogólnione (momenty resztkowe), które mogą pojawić się w konstrukcjach statycznie niewyznaczalnych.

W belkach zginanych w sąsiedztwie przekrojów, w których występuje pełne uplastycznienie (stan graniczny) znajdują się fragmenty częściowo uplastycznione, w których moment zginający jest zawarty w przedziale (M_S, M_P) . Warto tutaj zwrócić uwagę, że zakres strefy uplastycznienia jest tym mniejszy, im większy jest stosunek M_S/M_P . Stosunkowo małe wymiary tej strefy obserwuje się w prętach o przekroju dwuteowym, dla których $M_S/M_P \approx 0,85$. W związku z tym bardzo często przyjmuje się, że obszar uplastycznienia jest zredukowany do przekroju, w którym występuje moment M_P . Ponieważ w przekroju tym jest możliwy swobodny obrót, można przyjąć, że występuje tam pewnego rodzaju przegub, który przenosi stały moment zginający równy M_P . Jest to tzw. *przegub plastyczny*. Koncepcja przegubu plastycznego jest dogodną idealizacją, pozwalającą stosunkowo łatwo wyznaczać zarówno przemieszczenia, jak i nośność graniczną całej konstrukcji.

Zginanie ze ścinaniem

Siłę poprzeczną – jak wiadomo – towarzyszy zawsze zmiana momentu zginającego. Dlatego udział siły poprzecznej w procesie uplastycznienia przekroju rozważa się zazwyczaj łącznie z działaniem momentu zginającego. Przypadek ten jest niewątpliwie najtrudniejszy i to głównie z tego powodu, że ściśle określenie naprężeń w danym przekroju wymaga analizy naprężeń w całym pręcie, gdyż stan naprężenia na długości pręta nie jest jednorodny. Trzeba jeszcze dodać, że trudność samą w sobie stanowi wyznaczenie naprężeń sprężysto-plastycznych podczas ścinania, wywołanego przez wyłączone działanie siły poprzecznej Q . Dalsze komplikacje wynikają z faktu, że nie obowiązuje już założenie płaskich przekrojów. Wszystkie wyżej wymienione okoliczności sprawiają, że nawet dla przekroju prostokątnego dysponujemy tylko rozwiązaniami przybliżonymi.

Ścinanie nie może zatem występować samodzielnie; w płaszczyźnie przekroju pręta oprócz naprężeń stycznych τ_{xz} , pochodzących od siły poprzecznej, występują naprężenia normalne σ_x , wywołane przez moment zginający. Rozgraniczenie stanów sprężystego i plastycznego zależy od przyjętego warunku plastyczności.

Dla bardzo dużych sił poprzecznych i niewielkich momentów zginających pierwsze uplastycznienie zachodzi we włóknach wewnętrznych leżących na osi obojętnej, powoduje wzajemny poślizg i jednocześnie osiągnięcie nośności granicznej. Gdy moment zginający jest dostatecznie duży, pierwsze uplastycznienie występuje w skrajnych zewnętrznych włóknach pręta. Dalsze powiększanie obciążenia powoduje uplastycznienie włókien leżących bliżej osi przekroju. Charakterystyczne jest to, że naprężenia styczne są

przejmowane tylko przez wewnętrzną, nie uplastycznioną część przekroju, a ich rozkład opisuje znany wzór:

$$\tau = \frac{QS'}{b(z)J'},$$

gdzie S' oraz J' oznaczają odpowiednio moment statyczny i moment bezwładności sprężystej części przekroju.

W celu ujednolicenia sposobu podejścia przyjmuje się czasami, że w chwili osiągnięcia nośności granicznej naprężenia normalne we włóknach skrajnych osiągają wartości $\pm\sigma_P$, a w środkowej części przekroju naprężenia styczne osiągają wartość τ_P . Rozkład naprężeń stycznych w tym przypadku wykazuje jednak nieciągłość, która jest statycznie niedopuszczalna.

Skrećanie

W stanie sprężystym problem skrećania swobodnego opisuje równanie różniczkowe cząstkowe funkcji naprężeń $F(y, z)$:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = -2G\Theta,$$

przy czym na konturze przekroju pręta funkcja naprężeń musi spełniać warunek brzegowy $F_c(y, z) = 0$. Naprężenia styczne τ_{xy} i τ_{xz} są powiązane z funkcją naprężeń następującymi zależnościami:

$$\tau_{xy} = \frac{\partial F}{\partial z}, \quad \tau_{xz} = -\frac{\partial F}{\partial y}.$$

Zależności te gwarantują spełnienie różniczkowych równań równowagi wewnętrznej. Naprężenie τ_x w danym punkcie (y, z) jest równe tangensowi największego kąta nachylenia stycznej do powierzchni $F(y, z)$, tzn. $|\tau_x| = |\mathbf{grad} F|$. Wartość momentu skręcającego, obliczona z równań statyki, odpowiada podwójnej objętości bryły ograniczonej powierzchnią $F(y, z)$ i płaszczyzną $F = 0$:

$$\mathfrak{M} = 2 \int_A F(y, z) dA.$$

W obszarze odkształceń plastycznych oraz na granicy obszarów sprężystego i plastycznego wypadkowe naprężenie styczne równa się granicy plastyczności przy czystym ścinaniu ($\tau_x = \tau_P$). Odpowiada to nieliniowemu równaniu różniczkowemu:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 = \tau_P^2.$$

W zakresie deformacji plastycznych słuszne są wszystkie zależności obowiązujące w obszarze sprężystym, z wyjątkiem równania różniczkowego, które można również zapisać w postaci:

$$|\mathbf{grad} F| = \tau_P = \text{const.}$$

Oznacza to, że w obszarze plastycznym kąt nachylenia stycznej do powierzchni funkcji naprężeń $F(y, z)$ w każdym punkcie tego obszaru jest stały. Gdy przekrój pręta jest w pełni uplastyczniony, rzędne funkcji naprężeń $F(y, z)$ odpowiadają rzędnym wzgórza usypanego z piasku na figurze płaskiej o kształcie badanego przekroju. **Analogię wzgórza piaskowego** zauważył *Nadai* w 1923 r. Analogię tę – podobnie jak analogię błonową w stanach sprężystych – wykorzystuje się szeroko w badaniach doświadczalnych mających na celu ustalenie nośności granicznej przekrojów o skomplikowanych kształtach.

W stanach sprężysto-plastycznych obowiązuje tzw. **analogia dachu**. Jest to połączenie analogii błonowej z analogią wzgórza piaskowego. Analogię dachu wyobrażamy sobie następująco. Nad konturem rozpinamy przezroczysty „dach” o kształcie wynikającym z analogii wzgórza piaskowego. Na tym samym konturze wewnątrz dachu rozpinamy błonę i poddajemy ją wewnętrznemu ciśnieniu. Po wzroście ciśnienia w obszarach plastycznych błona będzie przylegała do dachu. Przyleganie błony na całej po-

wierzchni dachu odpowiada pełnemu uplastycznieniu pręta, czyli osiągnięciu nośności granicznej na skręcanie.

Stan sprężysty obserwujemy, gdy

$$\mathfrak{M} \leq \mathfrak{M}_S = \tau_P \cdot W_S^{(s)},$$

przy czym dla pręta o przekroju kołowym $W_S^{(s)} = J_b / R = \pi R^3 / 2$ i oznacza tu tzw. „sprężysty” wskaźnik wytrzymałości na skręcanie.

Graniczna wartość momentu plastycznego odpowiada podwójnej objętości wzgórza piaskowego, które dla przekroju kołowego ma kształt stożka o nachyleniu tworzących wynoszącym τ_P :

$$\mathfrak{M}_P = \frac{2}{3} \pi R^2 \cdot h = \frac{2}{3} \pi R^2 (R \tau_P) = \tau_P \cdot W_P^{(s)} = \frac{4}{3} \mathfrak{M}_S,$$

gdzie $W_P^{(s)} = 2\pi R^3 / 3 = 4W_S^{(s)} / 3$ i oznacza tzw. „plastyczny” wskaźnik wytrzymałości na skręcanie.

W stanie sprężysto-plastycznym wykres naprężeń stycznych jest linią łamaną. Po odciążeniu pręta powstają samorównoważące się naprężenia resztkowe.

• Podstawy teorii konstrukcji plastycznych. Nośność graniczna konstrukcji

Podstawy teorii plastyczności

Do opisu zachowania się materiału plastycznego wprowadza się naprężenia σ_{ij} , prędkości (przyrosty) przemieszczeń \dot{u}_i oraz prędkości odkształceń plastycznych $\dot{\epsilon}_{ij}^P$, występujące w trakcie płynięcia plastycznego. Płynięcie plastyczne jest procesem, w którym naprężenia nie zależą od skali czasu. Oznacza to, że naprężenia są jednorodną funkcją stopnia zero względem prędkości odkształceń plastycznych. Wynika stąd istnienie warunku plastyczności jako pewnej funkcji skalarnej wiążącej naprężenia, $F(\boldsymbol{\sigma}) = 0$. Jeżeli

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \dot{\epsilon}_{kl}^P} = \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \dot{\epsilon}_{ij}^P},$$

to można wykazać, że prędkości odkształceń plastycznych wyraża tzw. stowarzyszone prawo płynięcia:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^P = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}},$$

gdzie $\dot{\lambda}$ jest pewnym mnożnikiem skalarnym. Zależność powyższa odgrywa rolę równania fizycznego i wskazuje, że wektor prędkości odkształceń jest prostopadły do powierzchni opisanej przez warunek plastyczności.

Podstawową własnością procesów plastycznego płynięcia jest dyssypacja energii odkształceń plastycznych. Rozpraszana moc na jednostkę objętości \dot{d} musi być nieujemna:

$$\dot{d} = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^P \geq 0.$$

Jeżeli nadto materiał idealnie plastyczny jest nieściśliwy (tzn. $\dot{\epsilon}_{kk}^P = 0$), a pomiędzy naprężeniami i odkształceniami występuje związek tensorowo liniowy, to można wykazać, że mnożnik skalarny $\dot{\lambda} \geq 0$.

Z nieujemności dyssypacji oraz prawa płynięcia wnioskujemy, że obszar ograniczony warunkiem plastyczności musi być gwiaździsty, tzn. promień-wektor wyprowadzony z początku układu w przestrzeni naprężeń może tylko raz przecinać powierzchnię plastyczności.

Dalsze ograniczenie postaci warunku plastyczności wynika z tzw. **postulatu Druckera**, którego esencją jest stwierdzenie, że przyrost pracy wykonanej w cyklu naprężeniowym na nieskończenie małym przyroście odkształcenia jest nieujemny. Z postulatu tego wynika nierówność:

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}') \dot{\epsilon}_{ij}^P \geq 0,$$

gdzie σ_{ij}' oznacza dowolne naprężenie nie naruszające warunku plastyczności. Z postulatu tego wynika, że

$$\dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^P \geq 0$$

co odpowiada założeniu, że **materiał jest stateczny**, tzn. wzrostowi (spadkowi) naprężenia towarzyszy zawsze wzrost (spadek) odkształceń plastycznych. Postulat *Druckera* obowiązuje w ogólnym przypadku materiału plastycznego ze wzmocnieniem.

W przypadku szczególnym, gdy materiał jest idealnie plastyczny (bez wzmocnienia) matematyczny sens postulatu *Druckera* odpowiada zasadzie maksymalnej mocy plastycznej *Hilla*. Zasada ta odpowiada nierówności:

$$\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^P \geq \sigma_{ij}' \dot{\epsilon}_{ij}^P,$$

z której wynika, że *spośród wszystkich dopuszczalnych stanów naprężenia rzeczywisty stan naprężenia σ daje największy przyrost dyssypacji*.

Jeżeli wykorzystamy prawo płynięcia, to postulat *Druckera* można zapisać następująco:

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}') \cdot \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \geq 0,$$

co dowodzi, że obszar ograniczony warunkiem plastyczności przy akceptacji postulatu *Druckera* jest wypukły. Wypukłość warunku plastyczności dla danych prędkościach odkształceń plastycznych i spełnieniu stowarzyszonego prawa płynięcia gwarantuje jednoznaczność stanu naprężenia oraz zapewnia stateczność materiału.

Podstawowe zależności teorii plastycznych konstrukcji prętowych

W obliczeniach konstrukcji złożonych rolę uogólnionych naprężeń Y_i odgrywają zazwyczaj siły wewnętrzne (siły normalne i poprzeczne oraz momenty zginające i skręcające), a uogólnionymi prędkościami odkształceń $\dot{\epsilon}_i$ są prędkości odpowiednich wielkości kinematycznych (prędkość wydłużeń, kątów ścinania, krzywizn i jednostkowych kątów skręcenia). W modelu idealnie plastycznym moc dysypowana odniesiona do jednostki długości pręta jest opisana wzorem:

$$\dot{D} = \int_A \sigma_{rs} \dot{\epsilon}_{rs} dA = \sum_i Y_i \dot{\epsilon}_i = N\dot{\lambda} + Q\dot{\beta} + M\dot{\kappa} + \mathfrak{M}\dot{\theta} \geq 0.$$

Warunek plastyczności jako funkcji sił wewnętrznych w przekroju pręta wyraża funkcja $\Phi(Y_i)$:

$$\Phi(Y_i) = 0.$$

Jeżeli $\Phi(Y_i) < 0$, to dany przekrój jest sztywny, a siły wewnętrzne są – ogólnie biorąc – nieokreślone.

Stowarzyszone prawo można zapisać, jak następuje:

$$\dot{\epsilon}_i = \begin{cases} \dot{v} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial Y_i}, & \dot{v} \geq 0, \\ 0, & \Phi < 0, \end{cases}$$

gdzie \dot{v} jest odpowiednikiem mnożnika $\dot{\lambda}$ w teorii ośrodka plastycznego.

Dwa podstawowe twierdzenia nośności granicznej konstrukcji

W teorii nośności granicznej przyjmujemy, że obciążenie konstrukcji P_j jest proporcjonalne do pewnego mnożnika skalarnego μ (jest to tzw. obciążenie proporcjonalne):

$$P_j = \mu p_j,$$

gdzie p_j oznacza pewne obciążenie porównawcze. Przy pewnej wartości mnożnika μ nośność konstrukcji zostanie wyczerpana; konstrukcja przekształca się w mechanizm. Stanowi temu odpowiada obciążenie

graniczne wyznaczone przez graniczną wartość mnożnika $\mu = \mu_L$. Zasadniczym celem teorii nośności granicznej jest ustalenie granicznej wartości mnożnika obciążenia μ .

Statycznie dopuszczalne pole naprężeń uogólnionych Y_i^0 :

- spełnia równania równowagi wewnętrznej i naprężeniowe warunki brzegowe (tzn. jest w równowadze z obciążeniami μp_j),
- nie narusza warunku plastyczności, czyli $\Phi(Y_i^0) \leq 0$.

Kinematycznie dopuszczalne pole prędkości \dot{u}_j^* :

- spełnia kinematyczne warunki brzegowe oraz warunki ciągłości,
- pozwala ze związków geometrycznych $\dot{e}_i^* = \dot{e}_i^*(\dot{u}_j^*)$ otrzymać niezerowe pole odkształceń,
- określa dodatnią moc obciążeń zewnętrznych $\dot{L} = \mu \int p_j \dot{u}_j^* ds > 0$.

Całkowitą moc dyssypowaną w konstrukcji wyraża się następująco:

$$\dot{\mathcal{D}} = \int_s \dot{D} ds = \int_V \sigma_{ij} \dot{e}_{ij}^* dV = \int_s \left(\sum Y_i^* \dot{e}_i^* \right) ds > 0,$$

gdzie naprężenia Y_i^* spełniają warunek plastyczności w punkcie wyznaczonym przez dany wektor prędkości odkształceń plastycznych \dot{e}_i^* , ale nie muszą spełniać warunków równowagi wewnętrznej. Dla danego \dot{u}_j^* można wyznaczyć taką intensywność obciążenia $\mu_K p_j$, że moc obciążeń zewnętrznych \dot{L} będzie równa wewnętrznej mocy dyssypowanej $\dot{\mathcal{D}}$ (tzn. $\dot{L} = \dot{\mathcal{D}}$):

$$\mu_K \int_s p_j \dot{u}_j^* ds = \int_s \left(\sum Y_i^* \dot{e}_i^* \right) ds = \int_s \dot{D}(\mathbf{Y}^*, \dot{\mathbf{e}}^*) ds,$$

skąd otrzymujemy kinematyczny mnożnik obciążenia μ_K :

$$\mu_K = \frac{\int_s \dot{D}(\mathbf{Y}^*, \dot{\mathbf{e}}^*) ds}{\int_s p_j \dot{u}_j^* ds}.$$

Wyznaczenie dokładnej wartości mnożnika obciążenia granicznego μ_L jest na ogół bardzo trudne. Do jego oceny stosujemy jedno z dwóch podejść: statyczne lub kinematyczne. **W podejściu statycznym** poszukujemy takiego mnożnika obciążenia $\mu = \mu_S$, który odpowiada statycznie dopuszczalnemu polu naprężeń Y_i^0 . **W podejściu kinematycznym** poszukujemy takiego mnożnika obciążenia $\mu = \mu_K$, który odpowiada kinematycznie dopuszczalnemu polu prędkości przemieszczeń \dot{u}_j^* .

W teorii nośności granicznej obowiązują dwa bardzo ważne twierdzenia.

Twierdzenie o ocenie dolnej (ocena statyczna):

Rzeczywista intensywność obciążenia granicznego jest określona przez największy spośród mnożników obciążenia dla wszystkich statycznie dopuszczalnych pól naprężeń, tzn.

$$\mu_L = \sup \mu_S.$$

Twierdzenie o ocenie górnej (ocena kinematyczna):

Rzeczywista intensywność obciążenia granicznego jest określona przez najmniejszy spośród mnożników obciążenia dla wszystkich kinematycznie dopuszczalnych pól prędkości przemieszczeń, tzn.

$$\mu_L = \inf \mu_K.$$

Z twierdzeń tych wnioskujemy, że zachodzi nierówność jednoczesna:

$$\mu_S \leq \mu_L \leq \mu_K.$$

Z analizy twierdzeń o ocenie dolnej i ocenie górnej wynikają między innymi następujące wnioski praktyczne:

- dodanie nieważkiego materiału bez zmiany warunków brzegowych nie prowadzi do zmniejszenia obciążenia granicznego,
- podwyższenie granicy plastyczności materiału nie obniża nośności konstrukcji,
- osłabienie więzów kinematycznych nie prowadzi do podwyższenia nośności granicznej.

Warunki plastyczności wyrażone przez naprężenia uogólnione

Oto niektóre przypadki złożonego stanu obciążenia przekroju pręta:

1. Jednoczesne działanie N i M ($n = N / N_P$; $m = M / M_P$) na:

a) przekrój prostokątny ($b \times h$):

$$\Phi(n, m) = |m| + n^2 - 1 = 0,$$

gdzie $N_P = A \sigma_P = b h \sigma_P$, $M_P = W^{(P)} \sigma_P$, $W^{(P)} = b h^2 / 4$, a $W^{(P)}$ oznacza plastyczny wskaźnik wytrzymałości na zginanie.

b) przekrój idealny dwuteowy (A_p, h):

$$\Phi(n, m) = |m| + n - 1 = 0,$$

gdzie $N_P = 2 A_p \cdot \sigma_P$ i $M_P = 2 A_p a \sigma_P = N_P a$, a A_p oznacza pole przekroju jednej półki oraz $A = 2 A_p$, $J = 2 A_p \cdot a^2$, $W^{(S)} = W^{(P)} = 2 A_p a$.

2. Jednoczesne działanie N i \mathfrak{M} na pręt o przekroju kołowym

$$\Phi(m, n) = \frac{9}{16} m^2 + \frac{3}{4} n^2 + \frac{1}{4} n^3 - 1 = 0,$$

gdzie $m = \mathfrak{M} / \mathfrak{M}_S$, $n = N / N_S$, przy czym $N_S = N_P$.

3. Działanie N i M na pręty wykonane z materiałów znakoczułych. Warunki plastyczności dla materiałów znakoczułych (np. beton) nie wykazują symetrii względem układu osi oznaczających siły wewnętrzne. Jeśli granice plastyczności na rozciąganie i ściskanie oznaczmy odpowiednio przez σ_P^+ i σ_P^- , to warunek plastyczności dla przekroju prostokątnego ($b \times h$) można zapisać w postaci:

$$\Phi(m, n) = |m| + (n - \Delta \bar{\sigma})^2 - 1 = 0,$$

gdzie $\Delta \bar{\sigma} = (\sigma_P^+ - \sigma_P^-) / (\sigma_P^+ + \sigma_P^-)$ oraz $m = M / M_{Psr}$, $n = N / N_{Psr}$, przy czym $\sigma_{Psr} = (\sigma_P^+ + \sigma_P^-) / 2$, $N_{Psr} = b h \sigma_{Psr}$; $M_{Psr} = (b h^2 / 4) \sigma_{Psr}$.

4. Działanie N i M na pręty zbrojone włóknami

Jako materiał rodzimy (osnowa, matryca) stosuje się najczęściej tworzywa sztuczne, drewno lub beton. Zbrojenie stanowią włókna węglowe lub cienkie pręty stalowe. Jeżeli materiałowi rodzimemu i włóknom zbrojenia przypiszemy cechy materiału sztywno-plastycznego, to dla takiego kompozytu można ustalić warunek plastyczności. Duże znaczenie w konstrukcjach budowlanych mają pręty betonowe zbrojone

cienkimi prętami (włóknami) stalowymi. Szczegółowa analiza tego problemu prowadzi do krzywej granicznej opisanej dziesięcioma równaniami. Interesujące jest, że maksymalne i minimalne wartości momentu zginającego w przekroju zbrojonym są takie same: $M_{\max} = -M_{\min}$. Wartościom tym odpowiadają jednak różne wartości sił podłużnych.

Uogólnione przeguby plastyczne

Osiągnięciu nośności granicznej podczas zginania w przekroju krytycznym towarzyszą nieskończone krzywizny. W przekroju tym obserwujemy bardzo dużą koncentrację odkształceń na bardzo małym obszarze. W celu obliczenia całkowitej wewnętrznej dyssypacji prędkość krzywizny w przekroju $x = a$ jest wygodnie wyrazić za pomocą funkcji *Diraca*: $\dot{\kappa}(x) = \dot{\phi} \cdot \delta(x - a)$, gdzie $\dot{\phi}$ jest prędkością wzajemnego kąta obrotu sąsiednich części belki. Jeżeli jedyną niezerową prędkością uogólnionego odkształcenia jest właśnie prędkość krzywizny, to na podstawie własności filtracji funkcji *Diraca* otrzymujemy:

$$\dot{\mathfrak{D}} = \int_{-a}^a \dot{D} dx = \int_{-a}^a M \dot{\kappa} dx = \int_{-a}^a M(x) \dot{\phi} \cdot \delta(x - a) dx = M(a) \cdot \dot{\phi} = M_P \cdot \dot{\phi},$$

gdzie M_P oznacza moment plastyczny rozważanego przekroju.

W przekroju krytycznym powstał zatem przegub plastyczny. Koncepcję przegubu plastycznego można rozszerzyć również na pozostałe składowe prędkości odkształcenia. Jeżeli prędkości te są skoncentrowane w przekroju $x = a$, to można je zapisać następująco:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\lambda}(x) &= \dot{\Lambda}_a \cdot \delta(x - a) \\ \dot{\beta}(x) &= \dot{W}_a \cdot \delta(x - a) \\ \dot{\kappa}(x) &= \dot{\phi}_a \cdot \delta(x - a) \\ \dot{\theta}(x) &= \dot{\psi}_a \cdot \delta(x - a) \end{aligned} \right\}$$

gdzie $\dot{\Lambda}_a, \dot{W}_a, \dot{\phi}_a, \dot{\psi}_a$ oznaczają odpowiednio prędkości (przyrosty) wzajemnych przesunięć podłużnych i poprzecznych oraz kątów obrotu i skręcenia.

Całkowitą moc dyssypowaną w obrębie takiego uogólnionego przegubu plastycznego określa wyrażenie:

$$\int_{a-\Delta x}^{a+\Delta x} \dot{D} dx = N \dot{\Lambda}_a + Q \dot{W}_a + M \dot{\phi}_a + \mathfrak{M} \dot{\psi}_a > 0.$$

Zwróćmy uwagę, że naprężenia uogólnione N, Q, M i \mathfrak{M} występujące we wzorze muszą spełniać warunek plastyczności $\Phi(N, Q, M, \mathfrak{M}) = 0$.

W płaskich konstrukcjach prętowych, w których dominującą rolę w procesie uplastycznienia odgrywają momenty zginające, warunek plastyczności przyjmuje się w postaci uproszczonej:

$$|M| = M_P.$$

Wyznaczanie obciążenia granicznego konstrukcji

Rozwiązanie zupełne problemu nośności granicznej wymaga:

- spełnienia równań równowagi wewnętrznej,
- nieprzekroczenia warunku plastyczności ($\Phi \leq 0$),
- przekształcenia konstrukcji w mechanizm.

Aby n -krotnie statycznie niewyznaczalna konstrukcja prętowa przekształciła się w mechanizm o co najmniej jednym stopniu swobody, warunek graniczny $\Phi = 0$ musi być spełniony w co najmniej $n + 1$ przekrojach. W konstrukcji zginanej powinno zatem wystąpić co najmniej $n + 1$ przegubów plastycznych typu „zgięciowego”, jeżeli występuje wyczerpanie nośności konstrukcji jako całości. W pewnych przypadkach może się zdarzyć, że tylko fragment konstrukcji przekształci się w mechanizm. Występuje wtedy zniszczenie częściowe, a liczba przegubów plastycznych jest mniejsza od $n + 1$.

Do wyznaczenia obciążenia granicznego w praktyce inżynierskiej wykorzystuje się twierdzenia o ocenie dolnej (podejście statyczne) i ocenie górnej (podejście kinematyczne).

W najprostszych układach konstrukcyjnych można niekiedy uzyskać rozwiązanie w postaci analitycznej. Badanie ekstremum funkcji prowadzi wówczas do wyniku dokładnego. W podejściu statycznym, w którym poszukuje się pola statycznego nie naruszającego warunku plastyczności, zagadnienie sprowadza się zazwyczaj do obliczenia pierwiastków nieliniowego równania algebraicznego ze względu na mnożnik obciążenia granicznego. W podejściu kinematycznym, w którym poszukuje się rzeczywistego pola prędkości przemieszczeń i związanego z nim pola prędkości odkształceń, problem wyznaczenia nośności granicznej sprowadza się do rozwiązania równania algebraicznego na parametry opisujące mechanizm zniszczenia konstrukcji.

W bardziej złożonych układach konstrukcyjnych, o dosyć wysokim stopniu statycznej niewyznaczalności, metody analityczne zawodzą. „Ręczne” obliczenia wykonuje się *metodą superpozycji mechanizmów podstawowych*. W metodzie tej budujemy s niezależnych liniowo mechanizmów podstawowych, a obciążenie graniczne wyznaczamy z równania mocy dyssypowanej. Liczbę mechanizmów podstawowych można ustalić następująco. Jeżeli liczba przekrojów krytycznych (tzn. takich, w których mogą wystąpić przeguby plastyczne) wynosi r , a stopień statycznej niewyznaczalności jest równy n , to liczba niezależnych mechanizmów $s = r - n$. Zasadniczy sens omawianej metody polega na wykorzystaniu spostrzeżenia, że rozwiązanie zupełne problemu nośności granicznej uzyskuje się dla pewnego mechanizmu zniszczenia, który można przedstawić jako superpozycję niezależnych mechanizmów podstawowych. Na podstawie twierdzenia o ocenie górnej wiadomo, że dla każdej „złej” kinematyki zniszczenia otrzymujemy obciążenie większe od ścisłej wartości granicznej. Wobec tego należy znaleźć taką kombinację liniową mechanizmów podstawowych, by obciążenie niszczące było najmniejsze. Mechanizmy łączymy w taki sposób, aby uzyskiwać zamykało się możliwie dużo przegubów przy nie malejącej mocy obciążeń zewnętrznych. Metoda superpozycji mechanizmów podstawowych w zastosowaniu do konstrukcji prętowych nie zawsze pozwala uzyskać rozwiązanie zupełne. Dużo zależy tutaj od doświadczenia osoby prowadzącej obliczenia.

Ogólna metoda wyznaczania obciążenia granicznego sprowadza się do rozwiązania problemu programowania liniowego. Jest to problem mający bogatą bibliotekę w ośrodkach komputerowych.

Kinematyka towarzysząca zniszczeniu konstrukcji nie musi być – ogólnie biorąc – jednoznaczna. Wynika to z faktu, że warunki plastyczności w przestrzeni obciążeń zewnętrznych mają naroża. Wiadomo bowiem, że w narożach prędkości przemieszczeń nie są określone jednoznacznie przez stowarzyszone prawo płynięcia. Nie wpływa to jednak na dyssypację, a w konsekwencji nie zmienia wartości granicznej mnożnika obciążenia wyznaczonego dla różnych kinematyk zniszczenia.

• *Przystosowanie konstrukcji sprężysto - plastycznych*

Istota problemu

Problem przystosowania (ang. "*shakedown*") pojawia się w konstrukcjach sprężysto-plastycznych poddanych obciążeniom zmiennym. Może się zdarzyć, że konstrukcja częściowo już uplastyczniona po kilku cyklach obciążenia może ponownie reagować czysto sprężysto. Mówimy wtedy, że konstrukcja przystosowała się do danego programu obciążenia zmiennego.

Przystosowanie nie nastąpi wtedy, gdy pojawi się albo *niszczenie naprzemiennie* (ang. *alternating plasticity*) albo *niszczenie przyrostowe* (ang. *incremental collapse* lub *ratchetting*).

W przypadku zniszczenia naprzemiennego odkształcenia plastyczne mają różne znaki; pojawiają się i znikają w każdym cyklu. W efekcie przemiennych odkształceń plastycznych następuje zniszczenie wskutek zmęczenia niskocyklowego po niewielkiej liczbie cykli (por. wzór *Coffina*). Zjawisko takie obserwujemy np. podczas zginania cienkiego drutu; po kilkunastu zgięciach, w których powstają deformacje trwałe (plastyczne), drut pęka.

W przypadku zniszczenia przyrostowego odkształcenia plastyczne w każdym cyklu przyrastają i powodują kumulację deformacji trwałych i nieograniczony wzrost przemieszczeń, równoznaczny z utratą własności użytkowych konstrukcji. Problem ten jest szczególnie widoczny, gdy działają obciążenia stałe, którym towarzyszy cykliczna zmiana temperatury.

Konstrukcja przystosowuje się do danego programu obciążenia, gdy po pewnym czasie ustabilizuje się pewne pole odkształceń trwałych $\varepsilon_{ij}^{(r)}$. Odkształcenia te powodują wytworzenie się niezmiennego w

czasie pola naprężeń resztkowych $\sigma_{ij}^{(r)}$, a reakcja konstrukcji na obciążenia jest czysto sprężysta. Zgodnie z twierdzeniem *Melana* przystosowanie występuje wtedy, gdy suma $\sigma_{ij}^E(x, t) + \sigma_{ij}^{(r)}(x)$ nie narusza nigdzie warunku plastyczności, tzn. gdy

$$\Phi \left[\sigma_{ij}^E(x, t) + \sigma_{ij}^{(r)}(x) \right] \leq 0.$$

Symbolem $\sigma_{ij}^E(x, t)$ oznaczono naprężenia wywołane przez dany program obciążenia i obliczone jak dla ciała idealnie sprężystego.

W podejściu kinematycznym postuluje się, by energia zużyta na wytworzenie odkształceń plastycznych w całym okresie pracy konstrukcji była wartością skończoną:

$$\int_V \left[\int_0^\infty \sigma_{ij} \cdot \dot{\varepsilon}_{ij}^P dt \right] dV < \infty,$$

gdzie $\dot{\varepsilon}_{ij}^P$ oznacza prędkość odkształceń plastycznych, a σ_{ij} jest polem naprężeń stowarzyszonym z polem prędkości odkształceń plastycznych.

Przystosowanie belek i ram

W układach statycznie wyznaczalnych w danym przekroju pręta naprężenia resztkowe tworzą układ samorównowagujący się. Oznacza to, że resztkowe siły wewnętrzne (momenty zginające, siły normalne itd.) są równe zeru. W układach statycznie niewyznaczalnych sytuacja jest bardziej skomplikowana, gdyż występują w nich resztkowe siły wewnętrzne (przekrojowe), które są w równowadze z zerowym obciążeniem zewnętrznym. Towarzyszą temu pewne ugięcia resztkowe. Resztkowe pole sił przekrojowych jest kombinacją liniową sił przekrojowych wywołanych przez poszczególne siły nadliczbowe.

W zginanych belkach i ramach o przekrojach idealnie dwuteowych ($M_S = M_P$) przystosowanie zachodzi wówczas, gdy po pewnym czasie reakcja konstrukcji będzie czysto sprężysta, tzn. gdy (twierdzenie *Melana*)

$$\left. \begin{aligned} \max M_i^E + M_i^{(r)} &\leq M_P, \\ \min M_i^E + M_i^{(r)} &\geq -M_P \end{aligned} \right\}$$

i jednocześnie

$$\max M_i^E - \min M_i^E \leq 2M_P.$$

Spełnienie pierwszej grupy nierówności zabezpiecza przed zniszczeniem przyrostowym, a spełnienie drugiej nierówności zabezpiecza przed zniszczeniem niskocyklowym (przemiennym). W nierównościach tych $\max M_i^E$ oraz $\min M_i^E$ oznaczają rzędne momentów zginających w przekroju i obliczone jak dla konstrukcji idealnie sprężystej. Układ momentów resztkowych $M_i^{(r)}$ tworzy się w cyklach plastycznej deformacji konstrukcji w trakcie stabilizacji odkształceń trwałych. W przypadku przystosowania pole momentów resztkowych pozostaje już niezmiennie w czasie.

Momenty resztkowe są kombinacją liniową momentów pochodzących od sił nadliczbowych: $M_i = \sum X_j \cdot m_{ij}$, gdzie m_{ij} oznacza moment w przekroju i wywołany przez działanie siły nadliczbowej $X_j = 1$.

W podejściu kinematycznym obowiązuje twierdzenie *Neala*:

Konstrukcja przystosuje się do danego programu obciążenia, jeżeli istnieje taki mechanizm ruchu plastycznego, że jest spełniona nierówność:

$$\sum_{i=1}^r M_i^* \cdot \dot{\phi}_i \leq \sum_{i=1}^r M_{pi} \cdot |\dot{\phi}_i|, \text{ gdzie } M_i^* = \begin{cases} \max M_i^E, & \text{gdy } \dot{\phi}_i > 0 \\ \min M_i^E, & \text{gdy } \dot{\phi}_i < 0. \end{cases}$$

Twierdzenie to dotyczy tylko zniszczenia przyrostowego.

W nawiązaniu do terminologii teorii nośności granicznej należy zwrócić uwagę, że mnożnik największego obciążenia μ_S , dla którego konstrukcja przystosuje się, jest zawarty pomiędzy mnożnikiem obciążenia czysto sprężystego μ_E a mnożnikiem obciążenia granicznego μ_L , tzn.:

$$\mu_E \leq \mu_S \leq \mu_L.$$

Problem przystosowania konstrukcji – podobnie jak problem nośności granicznej – można sformułować w kategoriach programowania liniowego, co pozwala wykorzystać gotowe procedury komputerowe.

• *Materiały o własnościach reologicznych*

Opisem materiałów wykazujących obok innych również cechy ciał lepkich zajmuje się *reologia* (*reo* – z greckiego: płynąć). Ściślej biorąc, reologia jest syntezą teorii sprężystości, teorii plastyczności i hydromechaniki. W prawach fizycznych opisujących ciała reologiczne ze względu na obecność efektów lepkich czas występuje w postaci jawnej.

Elementarne modele reologiczne

Zasadnicze cechy fizyczne materiałów można opisać za pomocą modeli reologicznych, składających się z trzech modeli elementarnych:

- sprężyny opisującej własności sprężyste (model *Hooke'a*),
- suwaka opisującego własności plastyczne (model *de Saint-Venanta*),
- tłumika opisującego własności lepkie (model *Newtona*).

W modelu *Hooke'a* opory sprężyny (naprężenia) są proporcjonalne do wydłużenia (odkształcenia) $\sigma_H = E \varepsilon_H$. W modelu *de Saint-Venanta* opory suwaka obrazującego tarcie suche są stałe ($\sigma_V \leq \sigma_P$; $\dot{\varepsilon}_V = 0$, $\sigma_V = \sigma_P \cdot \text{sgn} \dot{\varepsilon}_V$, $\dot{\varepsilon}_V \neq 0$). W modelu *Newtona* opory tłumika są proporcjonalne do prędkości wydłużenia: $\sigma_N = \eta \cdot \dot{\varepsilon}_N$, gdzie symbol η [N·s/m²] nazywa się współczynnikiem lepkości dynamicznej.

Modele liniowych materiałów lepko-sprężystych

Modele materiałów lepko-sprężystych powstają przez łączenie modeli materiałów sprężystych (sprężyn) i modeli materiałów lepkich (tłumików). Jeżeli naprężenia i odkształcenia oraz ich pochodne względem czasu występują tylko w pierwszej potęgze, to materiał lepko-sprężysty nazywamy liniowym.

Szeregowe połączenie sprężyny i tłumika odpowiada **modelowi Maxwella**, opisanego następującym równaniem fizycznym:

$$t_r \cdot \dot{\sigma} + \sigma = \eta \cdot \dot{\varepsilon},$$

gdzie $t_r = \eta / E$ i nosi nazwę czasu relaksacji. Model *Maxwella* bardzo dobrze opisuje jakościowo zjawisko relaksacji, czyli zmianę naprężeń w czasie przy stałej wartości odkształcenia $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 = \text{const}$.

Równoległe połączenie sprężyny i tłumika tworzy **modela Kelvina**. Model ten bardzo dobrze opisuje zjawisko pełzania, tzn. zmianę odkształceń w czasie przy stałej wartości naprężenia. Równanie fizyczne modelu *Kelvina* ma postać:

$$\sigma = E \varepsilon + \eta \dot{\varepsilon}.$$

Model standardowy wykazuje doraźne cechy sprężyste materiału. Model ten jest określony trzema parametrami E_0 , E , η ; stanowi on z szeregowego połączenie modelu *Hooke'a* i modelu *Kelvina*. Równanie różniczkowe modelu standardowego zapisuje się w postaci:

$$\sigma + t_r^* \dot{\sigma} = E^* \varepsilon + \eta^* \dot{\varepsilon},$$

gdzie

$$t_r^* = \frac{\eta}{E + E_0}, \quad E^* = \frac{EE_0}{E + E_0} < E_0, \quad \eta^* = \frac{\eta E_0}{E + E_0} < \eta.$$

Model standardowy jest uogólnieniem modeli *Maxwella* i *Kelvina*. Stałe materiałowe t_r^* , E^* i η^* można oszacować na podstawie pomiaru długości osi sprzężonych elipsy przedstawiającej pętlę histerezy po wielu cyklach sinusoidalnego wymuszenia odkształceń bądź naprężeń.

Należy dodać, że rozwiązanie zadań liniowej lepko-sprężystości składają się zawsze z iloczynu części odpowiadającej rozwiązaniu sprężystemu i pewnej funkcji czasu (analogia *Alfreya*).

W materiałach lepko-sprężystych funkcja $\sigma(\varepsilon)$ jest podobna do wykresu $\sigma(\varepsilon)$ dla materiału idealnie plastycznego. Zasadnicza różnica między tymi materiałami polega na tym, że prędkość odkształcenia w przypadku pełzania jest zmienna w czasie, a w przypadku płynięcia plastycznego jest stała. Wykres $\sigma(\varepsilon)$ wskazuje jednak na to, że proces deformacji lepko-sprężystych jest nieodwracalny, gdyż towarzyszy mu dyssypacja (rozpraszanie) energii przez element lepki (tłumik).

W liniowych materiałach lepko-sprężystych obowiązuje **zasada superpozycji Boltzmanna**:

Jeżeli cykl odkształceń $\varepsilon_1(t)$ powoduje naprężenia $\sigma_1(t)$, a cykl odkształceń $\varepsilon_2(t)$ powoduje naprężenia $\sigma_2(t)$, to suma cykli $\varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t)$ wywołuje sumę naprężeń $\sigma_1(t) + \sigma_2(t)$.

Zasada Boltzmanna obowiązuje również dla cykli naprężeń $\sigma_1(t)$ i $\sigma_2(t)$ wywołujących odkształcenia $\varepsilon_1(t)$ i $\varepsilon_2(t)$.

Materiały sprężysto-plastyczne

Charakterystyczną cechą materiałów wykazujących własności reologiczne jest lepkość. Materiały sprężysto-plastyczne, jako niewrażliwe na prędkość odkształcenia, nie są zatem ściśle biorąc materiałami reologicznymi. Niemniej jednak własności mechaniczne materiałów sprężysto-plastycznych wynikają również z analizy zachowania się modeli reologicznych złożonych ze sprężyn i suwaków. Przykładem takiego modelu jest model ciała sprężysto-idealnie plastycznego, stanowiący szeregowe połączenie modelu *Hooke'a* i modelu *de Saint-Venanta*.

Materiały sprężystolepkoplastyczne

Modele tych materiałów mają najbardziej złożoną strukturę, składają się bowiem ze wszystkich rodzajów modeli elementarnych, tzn. sprężyn, tłumików i suwaków. Materiały sprężystolepkoplastyczne dzieli się zazwyczaj na dwie zasadnicze grupy:

- materiały sprężysto/lepkoplastyczne,
- materiały sprężysto-lepkoplastyczne.

Materiały pierwszej grupy przed uplastycznieniem są wyłącznie sprężyste; ich lepkość pojawia się dopiero po uplastycznieniu. Materiały grupy drugiej wykazują własności lepkie zarówno w obszarze sprężystym, jak i plastycznym. Oba rodzaje modeli ciał sprężystolepkoplastycznych bardzo dobrze opisują znany z eksperymentów wpływ prędkości i obciążenia na charakterystykę wykresu $\sigma(\varepsilon)$.

Model Binghama, opisujący materiał sprężysto/lepkoplastyczny, stanowi szeregowe połączenie sprężyny (model *Hooke'a*) z modelem złożonym, w którym modele *de Saint-Venanta* i *Newtona* są połączone równolegle. Gdy $|\sigma| < \sigma_p$, model zachowuje się czysto sprężyste; gdy $|\sigma| > \sigma_p$, to nadwyżkę obciążenia $\sigma - \sigma_p \cdot \text{sgn} \varepsilon$ przejmuje tłumik. Wzrost prędkości obciążenia powoduje podniesienie się krzywej $\sigma(\varepsilon)$, odpowiadające wzmocnieniu plastycznemu.

Najprostszym modelem ciała sprężysto-lepkoplastycznego jest **model czteroparametrowy**. Stanowi on szeregowe połączenie sprężyny (modelu *Hooke'a*) z modelem, w którym są połączone równolegle model ciała sprężysto-idealnie plastycznego i model *Newtona*. W modelu czteroparametrowym rejestrujemy dodatkowo podwyższenie początkowej granicy plastyczności w efekcie wzrostu prędkości i naprężenia.

Problemy stateczności

• Wiadomości wstępne

Bifurkacja stanu równowagi

Idealnie sprężysty pręt pryzmatyczny przy pewnej wartości osiowej siły ściskającej zmienia w sposób nagły swą prostoliniową postać i przyjmuje położenie wygięte. Tę nagłą zmianę nazywamy wyboczeniem pręta. Zjawisko wyboczenia jest jedną z form utraty stateczności. Utrata stateczności może nastąpić wówczas, gdy siła osiowa P osiągnie pewną wartość krytyczną P_{kr} . Wartości tej towarzyszą zatem dwa stany równowagi odpowiadające prostoliniowej lub krzywoliniowej osi pręta. Na wykresie $P - \Delta$ odpowiada to punktowi, w którym występuje „rozwidlenie” stanu równowagi, czyli tzw. **bifurkacja**.

Zagadnienie Eulera

Zagadnienie *Eulera* polega na wyznaczeniu siły krytycznej, powodującej wyboczenie pręta, na podstawie analizy równowagi wygiętej postaci pręta. Jedyną przyczyną wygięcia osi pręta jest moment zginający, obliczony po odstąpieniu od zasady zeszytywnienia. Tak ustaloną funkcję momentu wprowadzamy do równania różniczkowego linii ugięcia i zakładamy dodatkowo, że:

- krzywizny wygiętej osi pręta są małe,
- pomijamy wpływ sił poprzecznych,
- pomijamy wpływ skrócenia osi pręta.

Okazuje się, że zarówno sił krytycznych, jak i postaci wyboczenia jest nieskończenie wiele. Wyboczenie następuje po wpływem najmniejszej siły krytycznej odpowiadającej pierwszej postaci wyboczenia. Siłę krytyczną wyznacza się z równania przestępnego wynikającego z analizy warunków brzegowych liniowego równania różniczkowego, zbudowanego przy założeniu małych krzywizn. W teorii *Eulera* funkcja ugięcia jest wyznaczona z dokładnością do stałego, nieznanego mnożnika. Znany jest jednak kształt linii wyboczonego pręta (dla pręta prostoliniowego są to funkcje sinus lub kosinus). Ostatecznym efektem analizy jest wzór:

$$P_{kr} = P_E = P^{(1)} = \frac{\pi^2 EJ}{l_w^2},$$

gdzie $l_w = v l$ i jest długością wyboczeniową, zależną od warunków brzegowych pręta. Współczynnik długości wyboczeniowej v dla najczęściej stosowanych warunków podparcia pręta przyjmuje następujące wartości:

- $v = 0,50$ – pręt obustronnie utwierdzony,
- $v = 0,70$ – pręt z jednej strony przegubowy a z drugiej strony utwierdzony,
- $v = 1,0$ – pręt obustronnie przegubowy,
- $v = 2,0$ – pręt wspornikowy.

Długość wyboczeniowa odpowiada długości półfali sinusoidy przedstawiającej daną postać wyboczenia. Bezwymiarowy współczynnik v mieści się w dosyć szerokim zakresie. Na przykład, dla prętów ram dochodzi do kilkunastu a nawet kilkudziesięciu. Przypomnieć trzeba, że J we wzorze *Eulera* oznacza jeden z głównych momentów bezwładności przekroju pręta. Wobec tego siła krytyczna odpowiada mniejszej wartości stosunku J/l_w . Jeżeli zatem warunki brzegowe w obu płaszczyznach głównych są takie same (tj. $I_w^I = I_w^{II}$), to $J = J_{II} = J_{\min}$.

Uwzględnienie dużych przemieszczeń

Teoria Eulera pozwala obliczyć jedynie siłę krytyczną i odpowiadającą jej postać wyboczenia. Jest to tzw. liniowa teoria wyboczenia, gdyż zastosowano liniowe równanie różniczkowe linii ugięcia (problemy stateczności są zawsze nieliniowe i nie obowiązuje zasada superpozycji). Odstąpienie od założenia, że krzywizny są małe, i zastosowanie dokładnego wzoru na skończoną krzywiznę powoduje, że równanie

różniczkowe linii ugięcia jest nieliniowe, a zależność $P(\Delta)$ jest jednoznaczna. Jednakowoż okazuje się wówczas, że niewielkiemu zwiększeniu obciążenia ponad siłę eulerowską P_E towarzyszą znaczny przyrost ugięć i katastrofalny wzrost naprężeń normalnych. Osiągnięcie krytycznej wartości siły ściskającej odpowiada zazwyczaj stanom awaryjnym (niebezpiecznym), równoważnym z wyczerpaniem nośności konstrukcji.

Wpływ sił poprzecznych i skrócenia osi pręta

Uwzględnienie wpływu **siły poprzecznej** dla dowolnych warunków podparcia zmniejsza wartość siły krytycznej stosownie do zależności:

$$P_{kr} = P^{(1)} = \frac{P_E}{1 + \frac{k}{GA} \cdot P_E},$$

gdzie k oznacza współczynnik kształtu przekroju uwzględniający wpływ sił poprzecznych na ugięcia belek. Wpływ siły poprzecznej jest istotny, jeśli pręty są złożone, połączone przewiązkami lub krzyżulcami.

W przypadku stosunkowo krótkich prętów wykonanych z materiału o bardzo wysokiej granicy sprężystości istotny wpływ może mieć **skrócenie** osi pręta przed utratą stateczności. Ostateczny wzór na siłę krytyczną uwzględniający to skrócenie ma postać:

$$P_{kr} = \frac{2P_E}{1 + \sqrt{1 - \frac{4P_E}{EA}}},$$

Odnotować trzeba, że dla $P_E > EA/4$ wyboczenie pręta w ogóle nie występuje.

Wpływ imperfekcji

W praktyce założenia, że obciążenie pręta jest przyłożone idealnie osiowo, a oś pręta jest idealnie prosta nigdy nie są spełnione. Okazuje się jednak, że wymienione odstępstwa nie wpływają w istotny sposób na wartość siły krytycznej. Decydują wszelako o tym, w którą stronę pręt się wyboczy. Ponadto zależność $P(\Delta)$ jest w tych przypadkach jednoznaczna.

Wpływ obciążeń poprzecznych

Analiza wpływu obciążeń poprzecznych na zachowanie się belek ściskanych dużymi siłami osiowymi prowadzi do podobnych wniosków, jak przy omawianiu wpływu imperfekcji. Dla siły ściskającej bliskiej wartości krytycznej odnotowuje się drastyczny wzrost ugięć i związaną z tym utratę nośności konstrukcji. Na podstawie ogólnej analizy można pokazać, że ugięcie belki Δ można wyznaczać z następującego wzoru przybliżonego:

$$\Delta(p) \approx \Delta_0 \cdot \frac{1}{1-p},$$

gdzie symbol Δ_0 oznacza ugięcie bez udziału sił osiowych, $p = P/P_E$ i jest bezwymiarową siłą ściskającą belkę. Powyższy wzór daje bardzo dobre przybliżenie nawet dla dużych wartości p . Warto dodać, że współczynnik zwiększający $1/(1-p)$ można również stosować do szacowania wpływu imperfekcji, jakkolwiek dokładność takiego oszacowania bywa nieco gorsza. W tym przypadku Δ_0 oznacza albo mimośród siły ściskającej, albo strzałkę ugięcia pręta wstępnie wygiętego.

Rozciąganie mimośrodowe

Utrata stateczności występuje z reguły w prętach ściskanych. Siły rozciągające na ogół stabilizują ugięcia.

Definicja stateczności. Punkty graniczne i punkty bifurkacji

Utratę stateczności definiuje się na ogół jako proces, w którym niewielka zmiana przyczyny powoduje bardzo dużą zmianę skutku. W definicji tej mieści się zjawisko wyboczenia, kiedy niewielka zmiana siły (przyczyny) powoduje dużą zmianę poprzecznego ugięcia (skutku). Zjawisko szerzej pojętej utraty stateczności obserwujemy również w kratownicy *Misesa* poddanej rosnącej sile pionowej.

Ogólnie biorąc, utrata stateczności występuje bądź w punkcie **bifurkacji**, bądź w punkcie **granicznym**. W punkcie bifurkacji pokrywająca się ścieżka równowagi przecina się ze ścieżką podstawową i tworzy z nią kąt różny od zera. W punkcie granicznym $dP/d\Delta = 0$, przy czym sztywność konstrukcji przy dalszej deformacji jest ujemna. Sytuacja taka występuje np. w kratownicy *Misesa*. Trzeba jednak odnotować, że osiągnięcie punktu bifurkacji nie zawsze oznacza utratę nośności konstrukcji, gdyż stan pobifurkacyjny niekiedy może być nadal wystarczająco stateczny.

• Podejście energetyczne

Matematyczna interpretacja zasady minimum energii potencjalnej

Przyjmijmy, że $\Pi(T)$ jest energią potencjalną konstrukcji sprężystej, której stan odkształcenia jest całkowicie określony przez parametr T . Warunkiem koniecznym ekstremum (maksimum lub minimum) energii jest znikanie pierwszej pochodnej (lub wariacji) $\delta\Pi$. Wobec tego warunek równowagi ma postać:

$$\frac{\partial\Pi}{\partial T} = 0 \quad \text{lub} \quad \delta\Pi = 0,$$

a warunkami minimum energii są zależności

$$\frac{\partial\Pi}{\partial T} = 0, \quad \frac{\partial^2\Pi}{\partial T^2} > 0 \quad \text{lub} \quad \delta\Pi = 0, \quad \delta^2\Pi > 0$$

dla wszystkich kinematycznie dopuszczalnych wartości T . Wynika stąd kryterium stateczności konstrukcji:

$$\frac{\partial^2\Pi}{\partial T^2} > 0 \quad \text{lub} \quad \delta^2\Pi > 0.$$

Jeżeli $\partial^2\Pi / \partial T^2 < 0$, układ jest niestateczny, a jeśli $\partial^2\Pi / \partial T^2 = 0$, to w celu ustalenia stateczności układu trzeba zbadać znaki wyższych pochodnych (wariacji) energii potencjalnej. Mamy zatem:

$$\frac{\partial^2\Pi}{\partial \phi^2} = c - Pl \quad \begin{cases} > 0 & \text{stan stateczny,} \\ = 0 & \text{stan krytyczny,} \\ < 0 & \text{stan niestateczny.} \end{cases}$$

Z analizy energetycznej, w której przyjęto nieściślność osi pręta, wynika, że **przyrost energii potencjalnej** dla stanu krytycznego jest równy zeru. Prowadzi to do przybliżonego wzoru *Rayleigha* na obliczenie siły krytycznej w pręcie sprężystym o długości l :

$$P_{kr} = \frac{\int_0^l EJ(t'')^2 dx}{\int_0^l (t')^2 dx},$$

gdzie $t(x)$ jest stosownie dobraną funkcją spełniającą warunki brzegowe zadania.

Dużo lepsze przybliżenie otrzymamy, jeżeli drugą pochodną $t''(x)$ jako krzywiznę wygiętej osi pręta wyrazimy przez moment zginający.

Pewną wadą przybliżeń energetycznych jest to, że zawsze otrzymujemy wyniki obarczone błędem przez nadmiar.

• *Stany pokrytyczne. Klasyfikacja punktów bifurkacji*

W analizie stanów pokrytycznych decydujące znaczenie mają pochodne cząstkowe funkcji energii potencjalnej Π względem parametru odkształcenia konstrukcji T . Problem stateczności w obszarze pokrytym rozstrzyga badanie znaku drugiej pochodnej energii potencjalnej.

Aby wykazać, że pokrytyczna ścieżka równowagi jest stateczna, trzeba udowodnić, że energia na tej ścieżce osiąga lokalne minimum w punkcie bifurkacji. Ponieważ $\Pi_I(0, P_{kr}) = \Pi_{II}(0, P_{kr}) = 0$, poszukujemy wartości następnych pochodnych.

W zależności od charakteru wykresów $P(T)$ **punkty bifurkacji** możemy podzielić na **niesymetryczne** i **symetryczne**. Punkty niesymetryczne charakteryzują się tym, że w punkcie bifurkacji (dla $T=0$) $\Pi_{III} \neq 0$, a pochodna $dP/dT \neq 0$. W symetrycznych punktach bifurkacji $\Pi_{III} = 0$ i $dP/dT = 0$, natomiast pochodna Π_{IV} może być dodatnia lub ujemna. Jeżeli $\Pi_{IV} < 0$, to **symetryczny punkt bifurkacji jest niestateczny**. **Symetryczny i stateczny punkt bifurkacji** występuje, gdy $\Pi_{IV} > 0$.

Do bezpiecznej oceny nośności wystarczy zazwyczaj obliczenie obciążenia bifurkacyjnego. Stwierdzenie to nie obowiązuje jednak w przypadku, gdy symetryczny punkt bifurkacji jest niestateczny. Wówczas wpływ imperfekcji objawia się znacznym zmniejszeniem obciążenia krytycznego. Sytuacje, w których występuje niesymetryczny punkt bifurkacji, rzadziej spotyka się w praktyce (np. kratownice o węzłach sztywnych, pewne szczególne przypadki ram, zamknięte powłoki kuliste). Z punktu widzenia bezpieczeństwa konstrukcji przypadki te są jednak bardzo ważne, bo i tu obserwujemy utratę stateczności nawet dla obciążenia mniejszego od obciążenia bifurkacyjnego.

Konstrukcje charakteryzujące się niestatecznymi punktami bifurkacji oraz niesymetrycznymi punktami bifurkacji wykazują dużą czułość na imperfekcje i wymagają szczególnej uwagi przy szacowaniu ich nośności. Dodać trzeba, że omówione wyżej i przewidziane teoretycznie zjawiska towarzyszące stanom pokrytym zostały potwierdzone eksperymentalnie.

• *Wyznaczanie obciążeń krytycznych i form utraty stateczności w prętach prostych*

Ze względu na kinematykę problemy stateczności można podzielić na dwie grupy:

- płaska utrata stateczności, w której wygięta oś pręta po utracie stateczności jest krzywą płaską (wyboczenie giętne, eulerowskie),
- przestrzenna utrata stateczności, w której odkształcona oś pręta jest krzywą przestrzenną (zwichrzenie, wyboczenie skrętne, wyboczenie giętno-skrętne).

Płaska utrata stateczności prętów ściskanych. Wyboczenie

Równanie różniczkowe linii ugięcia sprężystego pręta prostoliniowego ściskanego siłą P ma postać:

$$[EJ(x) \cdot w'']'' + P \cdot w'' = 0,$$

gdzie $J(x)$ oznacza jeden z głównych momentów bezwładności przekroju pręta. Po przyjęciu, że $J(x) = J_1 \cdot \zeta(x)$, gdzie $J_1 = \text{const}$, oraz $\alpha^2 = P / (EJ_1)$, otrzymujemy:

$$[\zeta(x) \cdot w'']'' + \alpha^2 \cdot w'' = 0.$$

Rozwiązanie ogólne tego równania można przedstawić następująco:

$$w(x) = C_1 \cdot \varphi_1(\alpha, x) + C_2 \cdot \varphi_2(\alpha, x) + C_3 x + C_4,$$

gdzie $\varphi_1(\alpha, x)$ i $\varphi_2(\alpha, x)$ są funkcjami, których postać zależy od funkcji $\zeta(x)$. Stałe C_i ($i = 1, 2, 3, 4$) oblicza się na podstawie warunków brzegowych, dwóch na każdym końcu pręta. Po podstawieniu rozwiązania równania różniczkowego do warunków brzegowych otrzymujemy układ czterech równań liniowych jednorodnych ze względu na stałe C_i :

$$\begin{aligned}a_{11}C_1 + a_{12}C_2 + a_{13}C_3 + a_{14}C_4 &= 0, \\a_{21}C_1 + a_{22}C_2 + a_{23}C_3 + a_{24}C_4 &= 0, \\a_{31}C_1 + a_{32}C_2 + a_{33}C_3 + a_{34}C_4 &= 0, \\a_{41}C_1 + a_{42}C_2 + a_{43}C_3 + a_{44}C_4 &= 0,\end{aligned}$$

gdzie współczynniki a_{ij} ($i, j = 1, 2, 3, 4$) są funkcjami parametru α . Jeżeli $\text{Det}[a_{ij}] \neq 0$, to $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$. Wówczas rozwiązanie układu na stałe całkowania jest trywialne, co oznacza, że wyboczenie nie występuje, bo $w(x) \equiv 0$. Aby choć jedna stała całkowania była różna od zera, wyznacznik układu musi być równy zeru. Wtedy oprócz prostoliniowej postaci równowagi pręta mogą wystąpić również krzywoliniowe postacie równowagi.

Warunek

$$\text{Det}[a_{ij}(\alpha)] = 0$$

jest zatem **kryterium osiągnięcia stanu krytycznego**. Rozwinięcie wyznacznika prowadzi do równania przestępnego ze względu na $\alpha(P)$. Najmniejszy rzeczywisty i dodatni pierwiastek tego równania określa najmniejszą siłę krytyczną $P^{(1)} = P_{kr}$ i pierwszą postać wyboczenia. Pozostałe pierwiastki rzeczywiste i dodatnie określają wyższe siły krytyczne i wyższe postacie wyboczenia.

Osiągnięciu siły krytycznej przy wyboczeniu pręta towarzyszy **naprężenie krytyczne** σ_{kr} , które można traktować jako naprężenie niszczące:

$$\sigma_{kr}(s) = \begin{cases} \frac{\pi^2 E}{s^2}, & s \geq s_{gr}(\sigma_H), \\ \sigma_P - \frac{(\sigma_P - \sigma_H)}{s_{gr}(\sigma_H)} \cdot s, & 0 \leq s \leq s_{gr}(\sigma_H), \end{cases}$$

gdzie $s = l_w / i$, $i = \sqrt{J / A}$, $s_{gr}(\sigma_H) = \pi \sqrt{E / \sigma_H}$. Bezwymiarowy współczynnik s nazywamy smukłością pręta, a i oznacza promień bezwładności przekroju. Jeśli $s \geq s_{gr}(\sigma_H)$, to naprężenie krytyczne nie przekracza granicy sprężystości σ_H , a funkcja $\sigma_{kr}(s)$ przedstawia hiperbolę *Eulera*. Naprężenie krytyczne nie może przekraczać wartości niebezpiecznej, odpowiadającej tutaj granicy plastyczności σ_P . Wymaganie to jest spełnione dzięki wprowadzeniu smukłości granicznej $s_{gr}(\sigma_H)$. Jeśli $s < s_{gr}(\sigma_H)$, to występuje wyboczenie niesprężyste. Podana wyżej zależność $\sigma_{kr}(s)$ dla obszaru niesprężystego odpowiada najprostszemu przybliżeniu wyników doświadczalnych (prosta *Tetmajera-Jasińskiego*).

W ogólności naprężenie krytyczne zależy zarówno od rodzaju materiału (moduł sprężystości, granica sprężystości, granica plastyczności), jak i od wymiarów przekroju poprzecznego oraz warunków brzegowych pręta (smukłość). Nie jest to zatem stała materiałowa, lecz stała konstrukcyjna.

W normach projektowania prętów ściskanych stosuje się nieco inne podejście. Praktyczny sposób sprawdzania warunku wytrzymałościowego polega bowiem na spełnieniu nierówności:

$$\sigma_{obl} = \frac{P}{A\varphi(s)} \leq \sigma_{dop} = \frac{\sigma_P}{n_0},$$

gdzie $\varphi(s) \leq 1$ i jest tzw. współczynnikiem wyboczeniowym, n_0 – współczynnikiem bezpieczeństwa większym od jedności i zależnym od smukłości pręta, a σ_{obl} – fikcyjnym naprężeniem obliczeniowym. Powyższy wzór obowiązuje zarówno w obszarze sprężystym, jak i niesprężystym. Współczynnik zmniejszający $\varphi(s)$ jest ujęty w tablicach lub opisany wzorami empirycznymi. W przybliżeniu można przyjąć, że $\varphi(s) \approx \sigma_{kr}(s) / \sigma_P \leq 1$.

Przestrzenna utrata stateczności prętów prostych

Przestrzenną utratę stateczności obserwuje się w prętach cienkościennych. Do opisu takich prętów stosuje się aparat pojęciowy i metody teorii *Własowa* oraz teorii zginania prętów cienkich. Podstawowym uproszczeniem przyjmowanym w teorii stateczności jest ograniczenie rozważań do umiarkowanych przemieszczeń i przyjęcie, że oś pręta jest nieskracalna, czyli $u(x, 0, 0) = 0$. Ponadto akceptuje się założenie o „sztywnym” przekroju poprzecznym. Kinematyka zdeformowanego pręta jest określona jednoznacznie przez trzy funkcje: współrzędne wektora przemieszczenia punktów osi pręta $v(x)$ i $w(x)$ oraz kąt skręcenia całego przekroju względem środka ścinania $\psi(x)$.

Równania różniczkowe przestrzennej utraty stateczności można przedstawić następująco:

$$\begin{aligned} E I_{\omega} \psi''' - G J_s \psi' + M_x + M_y v' + M_z w' + \Delta M_{x1}(v, w, \psi) &= 0, \\ E J_y w'' - M_x v' + M_y + M_z \psi + \Delta M_{y1}(v, w, \psi) &= 0, \\ E J_z v'' + M_x w' + M_y \psi - M_z - \Delta M_{z1}(v, w, \psi) &= 0, \end{aligned}$$

gdzie symbolami ΔM_{x1} , ΔM_{y1} , ΔM_{z1} oznaczono dodatkowe momenty pochodzące od obciążeń konserwatywnych i mających charakter sił (tzn. niemomentów). Pierwsze z równań różniczkowych jest słuszne jedynie wówczas, gdy środek ścinania pokrywa się ze środkiem ciężkości przekroju. Jeżeli tak nie jest, to postać tego równania wymaga oddzielnej analizy.

W praktyce inżynierskiej najważniejszym przypadkiem przestrzennej utraty stateczności jest **zwichrzenie**, występujące przy zginaniu prętów. Zwichrzenie objawia się utratą płaskiej postaci zginania przy pewnej krytycznej wartości momentu zginającego. Na przykład, dla pręta wspornikowego o przekroju w kształcie wąskiego prostokąta poddanego czystemu zginaniu moment krytyczny i naprężenie krytyczne oblicza się ze wzorów:

$$M_{kr} = M_{y\ kr} = \frac{\pi}{2l} \cdot \sqrt{E J_z G J_s}, \quad \sigma_{kr} = \frac{M_{kr}}{W_y} = \frac{\pi}{2l W_y} \cdot \sqrt{E J_z G J_s},$$

gdzie y jest osią większego momentu bezwładności. Naprężenie krytyczne oblicza się ze wzoru podanego przy wyboczeniu giętym dla smukłości określonej wzorem

$$s = \frac{\sqrt{\pi h l \cdot \sqrt{8(1+\nu)}}}{b},$$

gdzie l oraz b i h oznaczają odpowiednio długość belki oraz szerokość i wysokość przekroju poprzecznego, a ν jest współczynnikiem *Poissona*. Przy takim sformułowaniu zagadnienia sprawą podstawową jest określenie smukłości na zwichrzenie, której wartość zależy od sposobu obciążenia i warunków brzegowych.

W praktyce możliwość utraty płaskiej postaci zginania uwzględnia się przez zastosowanie współczynnika zmniejszającego naprężenia skrajne, czyli tzw. współczynnika zwichrzenia ϕ_L . Sprawdzenie warunku wytrzymałościowego polega na spełnieniu nierówności:

$$\frac{M_y}{W_y^{(s)} \cdot \phi_L(s)} \leq \frac{\sigma_P}{n_0} = \sigma_{dop},$$

gdzie $\phi_L(s) \approx \sigma_{kr}(s) / \sigma_P \leq 1$. Sens współczynnika ϕ_L jest taki sam jak współczynnika wyboczeniowego ϕ . Trzeba dodać, że gdy zginanie pochodzi od obciążeń poprzecznych, współczynnik ϕ_L zależy od punktu przyłożenia obciążenia na wysokości przekroju; im wyżej jest przyłożone obciążenie, tym naprężenia są większe.

Pręty cienkościenne poddane mimośrodowemu lub osiowemu ściskaniu o przekroju otwartym mogą ulec **wyboczeniu giętno-skrętnemu**. Ostateczna postać układu równań stateczności giętno-skrętnej przy ściskaniu osiowym jest następująca:

$$E_1 J_\omega \cdot \psi^{IV} - \left(GJ_s - \frac{J_0}{A} \cdot P \right) \cdot \psi'' - P y_S \cdot w'' + P z_S \cdot v'' = 0,$$

$$E J_y \cdot w^{IV} + P \cdot w'' - P y_S \cdot \psi'' = 0,$$

$$E J_z \cdot v^{IV} + P \cdot v'' - P z_S \cdot \psi'' = 0,$$

gdzie

$$J_0 = J_y + J_z + A(y_S^2 + z_S^2) = J_b + A(y_S^2 + z_S^2).$$

W przypadku szczególnym, gdy środek ścinania pokrywa się z środkiem ciężkości przekroju, $y_S = z_S = 0$. Wtedy równania różniczkowe stateczności przybierają postać:

$$E_1 J_\omega \cdot \psi^{IV} - \left(GJ_s - \frac{J_b}{A} P \right) \cdot \psi'' = 0,$$

$$E J_y \cdot w^{IV} + P \cdot w'' = 0,$$

$$E J_z \cdot v^{IV} + P \cdot v'' = 0,$$

przy czym J_b oznacza tutaj biegunowy moment bezwładności przekroju. Układ ten stanowi w istocie rzeczy trzy oddzielne równania na poszukiwane funkcje $\psi(x)$, $w(x)$ i $v(x)$. Dwa ostatnie równania układu prowadzą do eulerowskich sił krytycznych przy wyboczeniu w obu płaszczyznach głównych

$$P_{kry} = P_y = \pi^2 E J_y / (l_{wy})^2, \quad P_{kry} = P_z = \pi^2 E J_z / (l_{wz})^2,$$

a pierwsze równanie układu daje siłę krytyczną odpowiadającą tzw. **wyboczeniu skrętnemu**. Gdy $J_\omega = 0$, siła krytyczna przy wyboczeniu skrętnym nie zależy od długości pręta: $P_{krs} = P_s = GA \cdot (J_s / J_b)$. Gdy $J_\omega \neq 0$, siłę krytyczną dla pręta obustronnie całkowicie utwierdzonego wyraża wzór:

$$P_{krs} = P_s = \frac{A}{J_b} \left(GJ_s + \frac{4\pi^2}{l^2} E_1 J_\omega \right), \quad E_1 = E / (1 - \nu^2).$$

Dla prętów ściskanych osiowo, w których środki ciężkości i ścinania pokrywają się, miarodajna jest najmniejsza siła krytyczna spośród wartości P_y , P_z i P_s :

$$P_{kr} = \min(P_y, P_z, P_s).$$

W ogólności, gdy środki ciężkości i ścinania nie pokrywają się, siłę krytyczną obliczamy przez przyrównanie do zera wyznacznika równań na stałe całkowania. Na przykład dla pręta podpartego widelkowo otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} (P - P_z) & 0 & P z_S \\ 0 & (P - P_y) & -P y_S \\ P z_S & -P y_S & \frac{J_0}{A} (P - P_s) \end{bmatrix} = 0.$$

Symetria wyznacznika wskazuje na to, że pierwiastki równania na siłę P są rzeczywiste, a najmniejszy z nich jest siłą krytyczną:

$$P_{kr} = \min(P_1, P_2, P_3) \leq \min(P_y, P_z, P_s).$$

Znak nierówności wskazuje, że siła krytyczna obliczona z uwzględnieniem wyboczenia giętno-skrętnego jest zawsze mniejsza od siły eulerowskiej i od siły wywołującej wyłącznie wyboczenie skrętne.

Przestrzenna utrata stateczności może również wystąpić przy czystym skręcaniu. Obserwujemy wówczas **wyboczenie śrubowe**. Pod wpływem skręcania dla dostatecznie dużej wartości momentu \mathfrak{M} oprócz prostoliniowej może również wystąpić krzywoliniowa (przestrzenna) postać równowagi.

W przypadku czystego skręcania pręta pryzmatycznego, którego końce są połączone są z podporami za pośrednictwem przegubów kulistych, a oba główne momenty bezwładności przekroju są równe ($J_y = J_z = J$) oraz $J_{\omega} = 0$ (na przykład pręt o przekroju kołowym), moment krytyczny jest określony wzorem:

$$\mathfrak{M}_{kr} = \mathfrak{M}_{kr}^{(1)} = 2\pi EJ / l.$$

Wygięta oś pręta po wyboczeniu jest linią śrubową.

Rozważany przypadek należy do tej grupy obciążeń niekonserwatywnych, w których metoda statyczna daje wynik poprawny. W ogólnym przypadku obciążenia niekonserwatywnego trzeba stosować tzw. dynamiczne kryterium stateczności, które polega na badaniu małych drgań układu.

Stateczność przy obciążeniach złożonych

W praktyce bardzo często występują obciążenia złożone, np. jednoczesne działanie siły ściskającej i momentu zginającego. Jeżeli obciążenia złożone są konserwatywne, to powierzchnia stateczności (interakcji) w przestrzeni sił wewnętrznych

$P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$

$$f(P_1, P_2, \dots, P_n) = 0$$

jest wypukła. Wobec tego przybliżony wzór *Dunkerleya*:

$$f(P_1, P_2, \dots, P_n) = \sum_{i=1}^n \frac{P_i}{P_{ikr}} - 1 = 0$$

jest dolnym (bezpiecznym) oszacowaniem stanu statecznego. W przypadku obciążeń niekonserwatywnych może się zdarzyć, że powierzchnia stateczności jest wklęsła i wzór *Dunkerleya* nie daje oceny bezpiecznej.

Dokładne rozwiązanie dla podpartego widelkowo pręta pryzmatycznego, poddanego ściskaniu siłą P i zginaniu momentem $M_y = M$ przybiera postać:

$$\left(\frac{M}{M_{kr}} \right)^2 + \left(\frac{P}{P_{kr}} \right) = 1.$$

Obecność siły ściskającej zmniejsza wartość momentu, przy którym zachodzi zwichrzenie belki, i na odwrót: obecność momentu zginającego zmniejsza wartość siły ściskającej, przy której zachodzi wyboczenie eulerowskie. Znak momentu zginającego nie wpływa na wartość krytyczną siły ściskającej.

W przypadku jednoczesnego ściskania siłą P i skręcania momentem \mathfrak{M} pręta pryzmatycznego o przekroju zwartym (nie cienkościennym), w którym główne momenty bezwładności są równe ($J_y = J_z = J$), otrzymujemy następującą krzywą interakcji:

$$\left(\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_{kr}} \right)^2 + \left(\frac{P}{P_{kr}} \right) = 1.$$

Uzyskana krzywa jest analogiczna do zależności obowiązującej przy jednoczesnym zginaniu i ściskaniu. Z obu wzorów wynika, że rozciąganie pręta ($P < 0$) ma działanie stabilizujące; wyboczenie występuje wtedy przy większej wartości momentu zginającego bądź skręcającego.

W prętach cienkościennych oprócz globalnej występuje również **lokalna (miejscowa) utrata stateczności**. Polega ona na tym, że w odróżnieniu od stateczności globalnej przekrój poprzeczny deformuje się, a oś pręta pozostaje prostoliniowa. Zjawisko lokalnej utraty stateczności jest charakterystyczne dla po-

włók, a więc i dla prętów cienkościennych, które w istocie rzeczy są długimi powłokami lub układem długich pasm płytowych.

Różnorodność form utraty stateczności prętów cienkościennych przy ściskaniu sprawia, że ograniczenie się do wyboczenia giętnego (eulerowskiego) może prowadzić do znacznych błędów. Na przykład, wyboczenie giętne w płaszczyźnie najmniejszej sztywności ściskanego kątownika równoramienne (duraluminiowego) występuje wtedy, gdy smukłość pręta jest dostatecznie duża. Jeżeli smukłość pręta jest mniejsza, to występuje wyboczenie giętno-skrętne. Z kolei utrata stateczności pręta o bardzo małej smukłości odpowiada wyboczeniu lokalnemu. Naprężenie krytyczne przy lokalnej utracie stateczności oblicza się na gruncie teorii płyt i powłok. Zależy ono od wymiarów przekroju poprzecznego. Lokalne naprężenie krytyczne jest proporcjonalne do grubości ścianki, a ściślej biorąc od stosunku grubości ścianki do pozostałych wymiarów liniowych przekroju poprzecznego.