

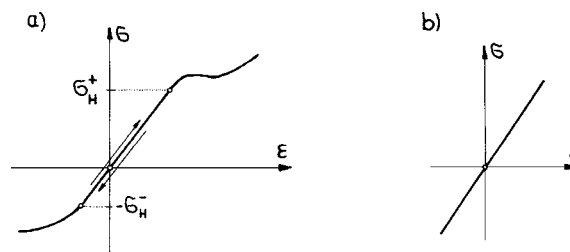
## 5.



## RÓWNANIA FIZYCZNE DLA CIAŁ LINIOWO - SPRĘŻYSTYCH

### 5.1. ZWIĄZKI MIĘDZY ODKSZTAŁCENIAMI I GŁÓWNYMI NAPRĘŻENIAMI

W każdym materiale konstrukcyjnym przy umiarkowanych wartościach naprężeń i odkształceń obserwujemy obszar, w którym podczas jednoosiowego rozciągania lub ściskania zależność  $\sigma(\varepsilon)$  jest liniowa, a droga obciążenia pokrywa się z drogą odciążenia. Na rysunku 5.1a jest to obszar  $-\sigma_H^- \leq \sigma \leq \sigma_H^+$ . W obszarze tym ciało zachowuje się liniowo-sprężystie. Przyjęcie liniowej zależności  $\sigma(\varepsilon)$  jest najprostszym przybliżeniem stosowanym do opisu zachowania się konstrukcji pod obciążeniem.



Rys. 5.1

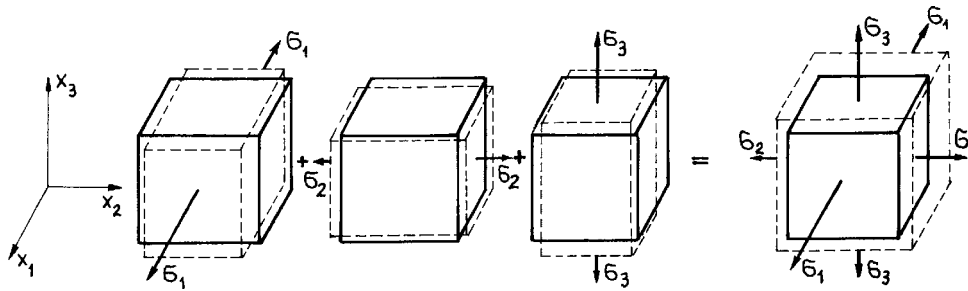
Niżej przedstawimy sposób budowy związków fizycznych dla ciał liniowo-sprężystych (rys. 5.1b) w ogólnym przypadku trójosiowego stanu naprężenia.

Na wstępie przyjmiemy założenie polegające na tym, że kierunki głównych naprężeń i głównych odkształceń się pokrywają. Na rysunku 5.2 kierunki te odpowiadają osiom układu współrzędnych  $x_1, x_2, x_3$ .

Podczas jednoosiowego rozciągania (ściskania) odkształcenia liniowe w kierunku działania siły określa prawo Hooke'a (4.5):  $\varepsilon = \sigma / E$ , a odkształcenia poprzeczne opisuje wzór (4.6):

$$\varepsilon_{\text{poprz}} = -\varepsilon_{\text{podł}} \cdot \nu = -\frac{\sigma}{E} \cdot \nu.$$

Fakty te wykorzystamy do budowy związków fizycznych w przypadku trójwymiarowym dla materiału izotropowego. Na rysunku 5.2 przedstawiono deformację elementarnego prostopadłościanu pod wpływem jednoczesnego działania trzech naprężeń głównych  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . Każde z tych naprężeń działające z osobna powoduje odkształcenia podłużne (wzór 4.5) i poprzeczne (wzór 4.6). Ostateczne wartości odkształceń  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  i  $\varepsilon_3$  można uważać za sumę efektów działania poszczególnych naprężeń głównych. W ten sposób uzyskano związki fizyczne (5.1). Przy budowie wzorów (5.1) przyjęliśmy zatem zasadę głoszącą, że **ostateczny skutek działania kilku przyczyn jest równy sumie efektów działania każdej z przyczyn**. Zasadę tę nazywamy **zasadą superpozycji skutków**. Zasięg jej stosowania jest jednak ograniczony. Zasada superpozycji obowiązuje bowiem tylko wówczas, gdy skutek jest **liniową funkcją** przyczyny (u nas: współrzędna tensora odkształcenia jest liniową funkcją współrzędnych tensora naprężenia).



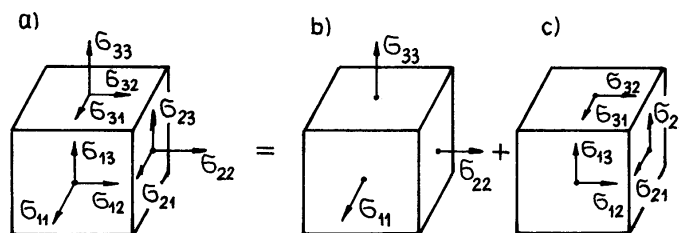
Rys. 5.2

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= +\frac{1}{E}\sigma_1 & -\frac{\nu}{E}\sigma_2 & -\frac{\nu}{E}\sigma_3 & = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)], \\ \varepsilon_2 &= -\frac{\nu}{E}\sigma_1 & +\frac{1}{E}\sigma_2 & -\frac{\nu}{E}\sigma_3 & = \frac{1}{E}[\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)], \\ \varepsilon_3 &= -\frac{\nu}{E}\sigma_1 & -\frac{\nu}{E}\sigma_2 & +\frac{1}{E}\sigma_3 & = \frac{1}{E}[\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)]. \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

Równania (5.1), wiążące wartości główne tensorów odkształcenia i naprężenia, są podstawową formą związków fizycznych. Za pomocą tych równań w p. 5.2 wprowadzimy ogólniejszą postać równań fizycznych dla dowolnego układu współrzędnych.

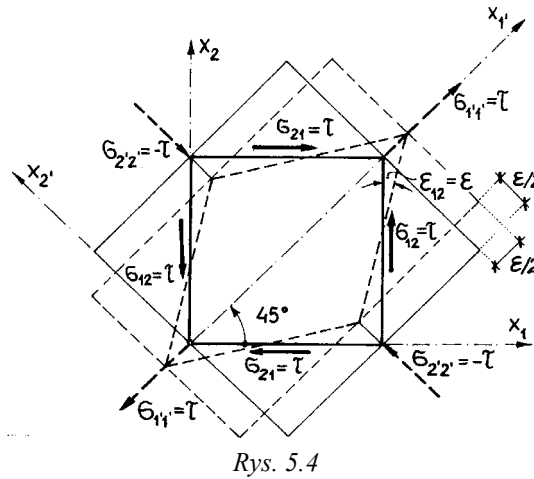
## 5.2. RÓWNANIA FIZYCZNE DLA CIAŁ IZOTROPOWYCH

W dowolnym układzie osi współrzędnych stan naprężenia określa 9 składowych  $\sigma_{ij}$  (rys. 5.3a). Na podstawie zasady superpozycji odkształcenia wywołane przez te składowe można uważać za sumę efektów działania naprężeń normalnych (rys. 5.3b) i naprężeń stycznych (rys. 5.3c), które z kolei składają się z trzech czystych ścinania w płaszczyznach  $(x_1, x_2)$ ,  $(x_2, x_3)$  i  $(x_3, x_1)$ . Efekty działania naprężeń normalnych są opisane równaniami (5.1). Dla określenia wpływu naprężeń stycznych wystarczy analiza deformacji występujących podczas czystego ścinania.



Rys. 5.3

Rozważmy dla przykładu czyste ścinanie w płaszczyźnie  $(x_1, x_2)$  wywołane przez naprężenia  $\sigma_{12}$  i  $\sigma_{21}$ . Stan czystego ścinania odpowiada – jak wiemy – działaniu naprężeń normalnych,  $\sigma_{1'1'} = -\sigma_{2'2'} = \tau$  w układzie osi  $x_1', x_2'$  obróconym o kąt  $45^\circ$  w stosunku do osi  $x_1, x_2$  (por. rys. 5.4), przy czym  $\sigma_{12} = \sigma_{21} = \tau$ . Osie  $x_1', x_2'$  są osiami głównych naprężeń, dla których obowiązują wzory (5.1).



Rys. 5.4

Mamy więc

$$(a) \quad \begin{cases} \varepsilon_{1'1'} = \frac{\sigma_{1'1'}}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_{2'2'} = \frac{1+\nu}{E} \cdot \tau, \\ \varepsilon_{2'2'} = \frac{\sigma_{2'2'}}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_{1'1'} = -\frac{1+\nu}{E} \cdot \tau, \end{cases}$$

skąd widać, że

$$\varepsilon_{1'1'} = -\varepsilon_{2'2'} = \varepsilon = \frac{1+\nu}{E} \cdot \tau.$$

Otrzymany wynik odpowiada odkształceniu czysto postaciowemu w układzie osi  $x_1, x_2$  (patrz rys. 5.4), przy czym  $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon$ . Widzimy więc, że w układzie osi  $x_1, x_2$  **naprężenia styczne**  $\sigma_{12} = \sigma_{21} = \tau$  **wywołują odkształcenia czysto postaciowe**:

$$(b) \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{1+\nu}{E} \tau = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{12}.$$

Wzór (b) można zapisać jeszcze inaczej:

$$(c) \quad \varepsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{2G},$$

gdzie:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (5.2)$$

Współczynnik  $G$  nazywamy **modułem ścinania**, modułem odkształcenia czysto postaciowego lub modułem *Kirchhoffa*. Wzór (c) można łatwo uogólnić na pozostałe płaszczyzny układu przez zamianę wskaźników:

$$(d) \quad \varepsilon_{23} = \frac{\sigma_{23}}{2G}, \quad \varepsilon_{31} = \frac{\sigma_{31}}{2G}.$$

Podsumowując dotychczasowe rozważania stwierdzamy, że **ogólną postać związków fizycznych** dla izotropowych ciał liniowo-sprężystych opisuje sześć następujących równań:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{E} [\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})] + (\alpha_T \cdot T), \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E} [\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})] + (\alpha_T \cdot T), \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1}{E} [\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})] + (\alpha_T \cdot T), \\ \varepsilon_{12} &= \frac{\sigma_{12}}{2G}, \quad \varepsilon_{23} = \frac{\sigma_{23}}{2G}, \quad \varepsilon_{13} = \frac{\sigma_{13}}{2G}. \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

W równaniach (5.3) uwzględniono składniki wywołane zmianą temperatury. Składniki te – wobec przyjęcia izotropii termicznej materiału – występują tylko przy odkształceniach liniowych (por. wzór (4.9))

Po rozwiązaniu układu równań (5.3) ze względu na naprężenia otrzymujemy drugą, równoważną postać związków fizycznych<sup>\*)</sup>:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E}{1+\nu} \left[ \varepsilon_{11} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) - \left( \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha_T \cdot T \right) \right], \\ \sigma_{22} &= \frac{E}{1+\nu} \left[ \varepsilon_{22} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) - \left( \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha_T \cdot T \right) \right], \\ \sigma_{33} &= \frac{E}{1+\nu} \left[ \varepsilon_{33} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) - \left( \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha_T \cdot T \right) \right], \\ \sigma_{12} &= 2G\varepsilon_{12}, \quad \sigma_{23} = 2G\varepsilon_{23}, \quad \sigma_{13} = 2G\varepsilon_{13}. \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

### 5.3. ZMIANA OBJĘTOŚCI

Względna zmiana objętości (dylatacja) jest sumą wydłużeń względnych  $\varepsilon_{rr}$ . Dylatację możemy obliczyć ze wzorów (5.3), wykorzystując zależność (2.13). Pomińmy przy tym wpływ temperatury.

$$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \frac{1}{E} [(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) - 2\nu(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})] = \frac{1-2\nu}{E} \cdot \sigma_{pp}$$

lub

$$\varepsilon_{rr} = \frac{3(1-2\nu)}{E} \sigma_0 = \frac{\sigma_0}{K}, \quad (5.5)$$

gdzie

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (5.6)$$

i nosi nazwę **modułu ściśliwości**. Ze wzoru (5.5) widać, że dylatacja jest zawsze równa zero, gdy  $1-2\nu = 0$ . Tak więc **dla materiałów nieściśliwych**  $\nu = 1/2$ . Wartość ta jest największą wartością współczynnika *Poissona*. Dla  $\nu > 1/2$  podczas wszechstronnego ściskania objętość ciała powiększałaby się, co przeczy faktom doświadczalnym. Z drugiej strony minimalny współczynnik *Poissona* równa się zero, gdyż dla  $\nu < 0$  w próbie jednoosiowego rozciągania powinniśmy obserwować poprzeczne poszerzenie przekroju. Wobec powyższego stwierdzamy, że współczynnik *Poissona* musi spełniać nierówności:

$$0 \leq \nu \leq \frac{1}{2}. \quad (5.7)$$

Na marginesie tej kwestii warto jednak dodać, że z rozważań energetycznych wynika, iż współczynnik  $\nu$  może być nawet ujemny. Materiały takie już wytworzono, ale nie spełniają one warunku ciągłości, gdyż znajdują się w nich stosownie uformowane szczeliny. Dodajmy, że współczynnik odkształcenia poprzecznego w materiałach anizotropowych może być z kolei większy od  $1/2$ .

### 5.4. INNE POSTACIE ZWIĄZKÓW FIZYCZNYCH

W mechanice ośrodków ciągłych spotykamy często skrócony zapis równań fizycznych<sup>\*)</sup>:

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad (5.8)$$

lub związku odwrotne:

$$\varepsilon_{ij} = 2\mu' \sigma_{ij} + \lambda' \sigma_{rr} \delta_{ij}, \quad (5.9)$$

gdzie  $\mu$ ,  $\lambda$  oraz  $\mu'$  i  $\lambda'$  oznaczają stałe *Lamégo*:

<sup>\*)</sup> Równania (5.4) mają sens tylko dla  $\nu \neq 1/2$ . Gdy  $\nu = 1/2$ , macierz odwrotna układu równań (5.3) jest osobliwa.

<sup>\*)</sup> We wzorach (5.8) i (5.9) pominięto wpływ temperatury.

$$\left. \begin{aligned} \mu &= \frac{E}{2(1+\nu)} = G, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{2\nu}{1-2\nu} G = K - \frac{2}{3} G, \\ \mu' &= \frac{1+\nu}{2E} = \frac{1}{4G}, \quad \lambda' = -\frac{\nu}{E} = -\frac{1}{2\mu} \cdot \frac{\lambda}{2\mu+3\lambda}. \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

Z rozdziałów 1. i 2. wiemy, że współrzędne aksjatorów odkształcenia i naprężenia określa się następująco:

$$\varepsilon_{ij}^{(o)} = \frac{\varepsilon_{kk}}{3} \delta_{ij}, \quad \sigma_{ij}^{(o)} = \frac{\sigma_{pp}}{3} \delta_{ij}. \quad (5.11)$$

Wobec tego równania (5.5) można uważać za **związki fizyczne dla aksjatorów**:

$$\varepsilon_{ij}^{(o)} = \frac{1-2\nu}{E} \sigma_{ij}^{(o)} = \frac{1}{3K} \sigma_{ij}^{(o)}. \quad (5.12)$$

Podobne zależności można zbudować dla dewiatorów odkształcenia i naprężenia. W tym celu wykorzystamy równania (5.9), (5.11) i (5.12):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^{(d)} &= \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{(o)} = \frac{1+\nu}{E} [\sigma_{ij}^{(d)} + \sigma_{ij}^{(o)}] - \frac{\nu}{E} \sigma_{rr} \delta_{ij} - \frac{1-2\nu}{E} \sigma_{ij}^{(o)} = \\ &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij}^{(d)} + \frac{1}{E} [1+\nu-3\nu-(1-2\nu)] \sigma_{ij}^{(o)} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij}^{(d)}. \end{aligned}$$

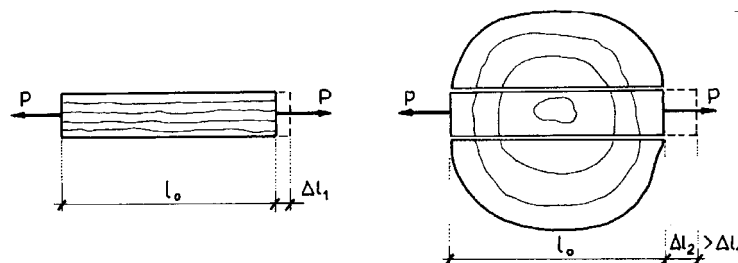
Otrzymujemy stąd **związki fizyczne dla dewiatorów**:

$$\varepsilon_{ij}^{(d)} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij}^{(d)} = \frac{\sigma_{ij}^{(d)}}{2G}. \quad (5.13)$$

Należy zwrócić uwagę, że izotropowy materiał sprężysty jest całkowicie określony przez **dwie stałe sprężystości**, np.  $E$  i  $\nu$ ,  $E$  i  $G$ ,  $K$  i  $G$ ,  $\lambda$  i  $\mu$ ,  $\lambda'$  i  $\mu'$  itd.

### 5.5. IZOTROPIA I ANIZOTROPIA. JEDNORODNOŚĆ I NIEJEDNORODNOŚĆ

We wszystkich dotychczasowych rozważaniach założyliśmy małe odkształcenia oraz **izotropię** materiału, oznaczającą, że jego własności mechaniczne są takie same we wszystkich kierunkach. Założenie izotropii materiału pozwoliło przyjąć, że kierunki głównych naprężeń i głównych odkształceń pokrywają się.



Rys. 5.5

Niektóre materiały konstrukcyjne nie wykazują jednak własności izotropii. Dotyczy to np. drewna, w którym wydłużenia w kierunku włókien są przy tej samej sile mniejsze niż w kierunku prostopadłym do włókien (por. rys. 5.5). Materiały, których własności zależą od kierunku, nazywamy **anizotropowymi**. Najogólniejsza postać związków fizycznych, obejmująca wszystkie możliwe przypadki anizotropii sprężystej (w tym również izotropię), jest następująca:

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3) \quad (5.14)$$

lub

$$\varepsilon_{ij} = C_{ijkl} \sigma_{kl}, \quad (5.15)$$

gdzie  $E_{ijkl}$  oraz  $C_{ijkl}$  są tzw. **tensorami sprężystości**. Pierwszy z nich można traktować jako tensor sztywności, drugi zaś jako tensor podatności sprężystej. Liczba współrzędnych (współczynników) tensorów sprężystości  $E_{ijkl}$  lub  $C_{ijkl}$  wynosi 81, tworzą one bowiem tensory czwartego rzędu ( $3^4 = 81$ ). Obszerne omówienie tensorów sprężystości ciał anizotropowych zawiera wydany niedawno przez Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej podręcznik *Litewki* [27].

Po wykorzystaniu symetrii tensorów  $\varepsilon_{ij}$  i  $\sigma_{ij}$  oraz pewnych zależności energetycznych liczba niezależnych współczynników sprężystości w tym ogólnym przypadku wynosi 21, podczas gdy dla ciała izotropowego są dwa ( $E, \nu$ ) takie współczynniki (współczynniki  $G, K, \mu, \lambda, \lambda', \mu'$  można wyrazić przez  $E$  i  $\nu$ ). Dla przykładu podamy rozwiniętą postać równań (5.14) w zapisie inżynierskim:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= b_{11}\varepsilon_{11} + b_{12}\varepsilon_{22} + b_{13}\varepsilon_{33} + b_{14}\varepsilon_{12} + b_{15}\varepsilon_{13} + b_{16}\varepsilon_{23} \\ \sigma_{22} &= b_{21}\varepsilon_{11} + b_{22}\varepsilon_{22} + b_{23}\varepsilon_{33} + b_{24}\varepsilon_{12} + b_{25}\varepsilon_{13} + b_{26}\varepsilon_{23} \\ \sigma_{33} &= b_{31}\varepsilon_{11} + b_{32}\varepsilon_{22} + b_{33}\varepsilon_{33} + b_{34}\varepsilon_{12} + b_{35}\varepsilon_{13} + b_{36}\varepsilon_{23} \\ \sigma_{12} &= b_{41}\varepsilon_{11} + b_{42}\varepsilon_{22} + b_{43}\varepsilon_{33} + b_{44}\varepsilon_{12} + b_{45}\varepsilon_{13} + b_{46}\varepsilon_{23} \\ \sigma_{13} &= b_{51}\varepsilon_{11} + b_{52}\varepsilon_{22} + b_{53}\varepsilon_{33} + b_{54}\varepsilon_{12} + b_{55}\varepsilon_{13} + b_{56}\varepsilon_{23} \\ \sigma_{23} &= b_{61}\varepsilon_{11} + b_{62}\varepsilon_{22} + b_{63}\varepsilon_{33} + b_{64}\varepsilon_{12} + b_{65}\varepsilon_{13} + b_{66}\varepsilon_{23} \end{aligned} \right\} \quad (5.14a)$$

Funkcję współczynników  $E_{ijkl}$  pełnią tutaj współczynniki  $b_{rs}$  ( $r, s = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ), wykazujące własność symetrii  $b_{rs} = b_{sr}$ . Liczba niezależnych współczynników sprężystości  $b_{rs}$  wynosi 18, bo od 21 ( $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$ ) należy odjąć 3 kąty określające przestrzenną orientację badanej próbki.

Konkretne wartości współczynników  $b_{rs}$  zależą od przyjętego układu współrzędnych w danym punkcie. Ciało izotropowe charakteryzuje się tym, że współczynniki przyjmują zawsze te same wartości w każdym układzie współrzędnych. Wymaganie to spowoduje zerowanie się większości współczynników, a macierz  $b_{rs}$  przyjmując postać:

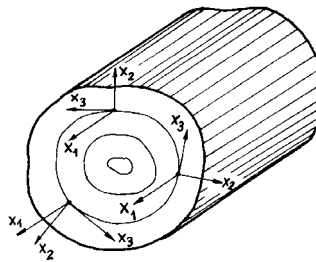
$$[b_{rs}] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix},$$

gdzie  $\mu$  i  $\lambda$  oznaczają stałe *Lamego*. Omówiona wyżej cecha charakterystyczna ciał izotropowych stanowi o tym, że tylko w tych ciałach kierunki głównych naprężeń zawsze pokrywają się z kierunkami głównych odkształceń.

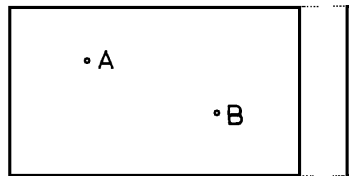
Dużą rolę w technice odgrywają tzw. materiały **ortotropowe**. Materiały te wykazują 3 wzajemnie prostopadłe osie symetrii dwukrotnej. Równania fizyczne związane z tymi osiami mają postać:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= b_{11}\varepsilon_{11} + b_{12}\varepsilon_{22} + b_{13}\varepsilon_{33}, \\ \sigma_{22} &= b_{21}\varepsilon_{11} + b_{22}\varepsilon_{22} + b_{23}\varepsilon_{33}, \\ \sigma_{33} &= b_{31}\varepsilon_{11} + b_{32}\varepsilon_{22} + b_{33}\varepsilon_{33}, \\ \sigma_{12} &= b_{44}\varepsilon_{12}, \\ \sigma_{13} &= b_{55}\varepsilon_{13}, \\ \sigma_{23} &= b_{66}\varepsilon_{23}. \end{aligned} \right\} \quad (5.16)$$

Przykładem materiału anizotropowego jest drewno. Osie dwukrotnej symetrii w wybranych punktach pnia zobrazowano na rys. 5.6. Osie symetrii zmieniają swe kierunki zgodnie z krzywoliniowym (cylintrycznym) przebiegiem warstw przyrostów rocznych (słojów). Dlatego mówimy, że drewno charakteryzuje się anizotropią krzywoliniową lub bardziej szczegółowo: **ortotropią cylindryczną**. W ciele ortotropowym pokrywanie się kierunków naprężeń i odkształceń zachodzi tylko w tych przypadkach, gdy kierunki głównych odkształceń pokrywają się z osiami ortotropii.



Rys. 5.6

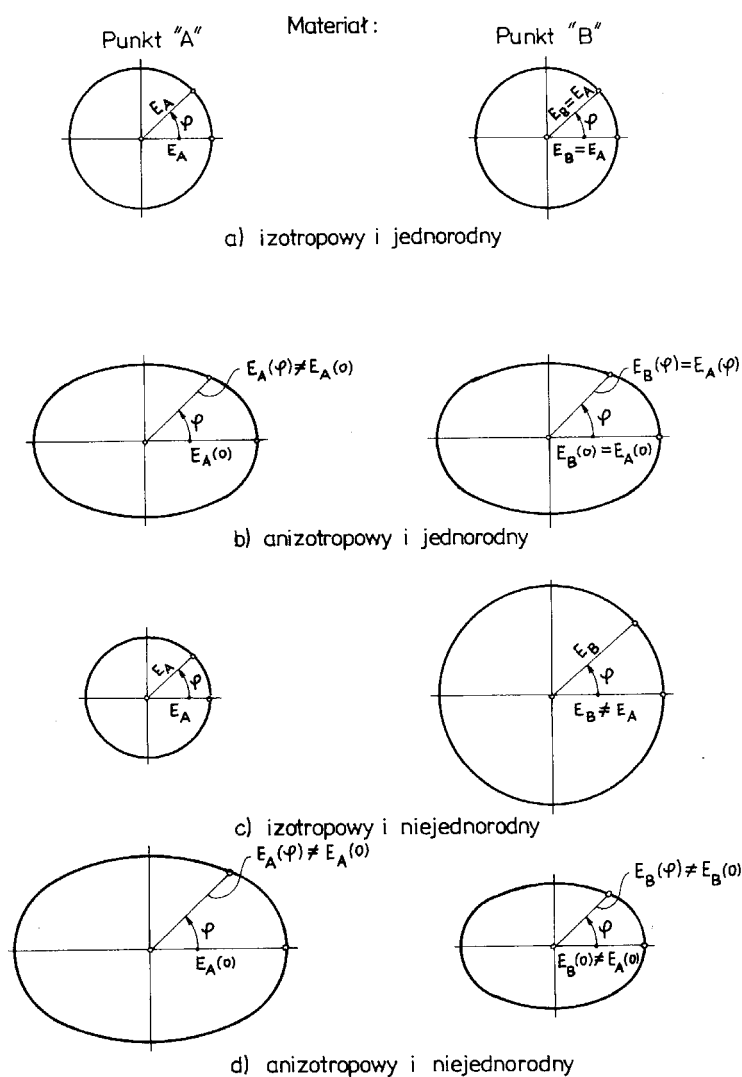


Rys. 5.7

Omówimy jeszcze pojęcia jednorodności i niejednorodności materiału. **Ciałem jednorodnym** nazywamy takie ciało, którego współczynniki materiałowe (np. gęstość, współrzędne tensora sprężystości, współczynniki przewodności cieplnej) nie zależą od położenia badanego punktu. Wszystkie inne ciała nazywamy **niejednorodnymi**. Przykładem ośrodka niejednorodnego może być podłoże gruntowe, w którym np. moduł ściśliwości partii położonych płytko będzie mniejszy niż partii położonych na dużych głębokościach.

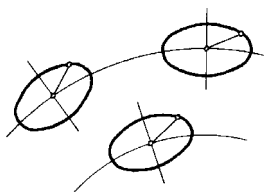
W celu lepszego zrozumienia pojęć anizotropii i niejednorodności wyobraźmy sobie płaską płytkę, dla której w dwóch różnych punktach *A* i *B* wyznaczamy moduł sprężystości *E* (rys. 5.7). W obu punktach określamy moduł *E* dla różnych kierunków działania siły. Otrzymane wyniki zestawiamy na rys. 5.8. Wartość modułu *E* dla każdego kierunku wyznacza długość odcinka nachylonego pod danym kątem i łączącego środek układu leżący w badanym punkcie z konturem wykresu. Na rysunku 5.8 przedstawiono 4 warianty rezultatów badań.

Jeśli wykresy  $E(\varphi)$  w punktach *A* i *B* są takie same (przystające), to materiał jest jednorodny (przypadki *a* i *b*), w przeciwnym razie – niejednorodny (przypadki *c* i *d*). Jeśli wykres  $E(\varphi)$  jest kołem, to znaczy że moduł sprężystości jest niezależny od kierunku i wobec tego materiał jest izotropowy (przypadki *a* i *c*). Przypadki *b* i *d* dotyczą ciał anizotropowych.



Rys. 5.8

Drewno możemy uważać za materiał anizotropowy i jednorodny. Wykresy  $E(\varphi)$  są przystające, ale obrócone względem siebie zgodnie z kierunkami osi symetrii anizotropii krzywoliniowej w poszczególnych punktach (rys. 5.9).



Rys. 5.9

## 5.6. ZESTAWIENIE RÓWNAŃ TEORII SPRĘŻYSTOŚCI

Przy rozwiązywaniu konkretnych zadań powierzchnię rozważanego ciała  $S$  możemy podzielić na dwie części  $S_p$  i  $S_u$ . Na powierzchni  $S_p$  są dane gęstości sił powierzchniowych  $p_i^*$ , a na powierzchni  $S_u$  są znane przemieszczenia  $u_i^*$ . Warunki określające wartości  $p_i$  na  $S_p$  oraz  $u_i$  na  $S_u$  nazywamy **warunkami brzegowymi**. Poznaliśmy do tej pory:

– **Równania różniczkowe równowagi** (3)<sup>\*)</sup>

$$(a) \quad \sigma_{ji,j} + G_i = \rho \ddot{u}_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{dla } \mathbf{x} \in V,$$

warunki brzegowe

$$(b) \quad \sigma_{ji} n_j = p_i^*, \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{dla } \mathbf{x} \in S_p;$$

– **Równania geometryczne** (6)

$$(c) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{dla } \mathbf{x} \in V,$$

warunki brzegowe

$$(d) \quad u_i = u_i^*, \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{dla } \mathbf{x} \in S_u;$$

– **Równania fizyczne** (6)

$$(e) \quad \text{anizotropia: } \sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3,$$

$$\text{izotropia: } \sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij}, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3.$$

W nawiasach podano liczbę równań. Łącznie mamy 15 równań (3 + 6 + 6), co odpowiada liczbie niewiadomych funkcji, tzn. 3 składowe wektora przemieszczenia + 6 składowych tensora odkształcenia + 6 składowych tensora naprężenia (tensory odkształcenia i naprężenia są symetryczne) = 15 niewiadomych. Symetria tensora odkształcenia wynika ze wzorów (c), a symetria tensora naprężenia wynika z równań równowagi momentów elementu ciała.

Z równań teorii sprężystości wynika sześć **równań nierozdzielności odkształceń** (por. np. wzory (2.12a) lub (2.12b)):

$$(f) \quad e_{ikn} e_{jlm} \varepsilon_{kl, nm} = 0; \quad i, j, k, l, m, n = 1, 2, 3.$$

Rozróżniamy dwie ogólne grupy metod rozwiązania problemu teorii sprężystości: w przemieszczeniach i w naprężeniach. W równaniach przemieszczeniowych jako niewiadome występują trzy składowe funkcje wektora przemieszczenia  $u_1, u_2$  oraz  $u_3$ . Odpowiednie trzy równania budujemy na podstawie równań różniczkowych równowagi (a). Podstawiamy do nich równania fizyczne (e), w których odkształcenia są wyrażone przez przemieszczenia według związków geometrycznych (c). W efekcie dla zadań statyki ciał jednorodnych otrzymujemy **trzy równania przemieszczeniowe** Naviera:

$$\begin{aligned} \text{anizotropia: } & \frac{1}{2} E_{ijkl} (u_{k,lj} + u_{l,kj}) + G_i = \rho \ddot{u}_i, \\ \text{izotropia: } & \mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + G_i = \rho \ddot{u}_i. \end{aligned} \quad (5.17)$$

W równaniach naprężeniowych występuje sześć niewiadomych składowych tensora naprężenia. Odpowiednie równania budujemy z równań nierozdzielności odkształceń (f) po uwzględnieniu w nich równań fizycznych (e) i równań różniczkowych równowagi (a). W przypadku izotropii po pominięciu efektów dynamicznych otrzymujemy **sześć równań naprężeniowych** Beltramiego-Michella:

$$\sigma_{ij, kk} + \frac{1}{1+\nu} \sigma_{kk, ij} = -(G_{i,j} + G_{j,i}) - \frac{\nu}{1-\nu} \delta_{ij} G_{k,k}; \quad i, j, k = 1, 2, 3. \quad (5.18)$$

Do równań różniczkowych (5.17) i (5.18) należy dołączyć stosowne warunki brzegowe.

Jeżeli naprężenia są znane, to funkcje przemieszczeń można wyznaczyć, podstawiając do równań fizycznych równania geometryczne. W efekcie otrzymujemy następujące równania różniczkowe:

$$\begin{aligned} \text{anizotropia: } & u_{i,j} + u_{j,i} = 2E^{-1}_{ijkl} \sigma_{kl}, \\ \text{izotropia: } & u_{i,j} + u_{j,i} = 2(2\mu' \sigma_{ij} + \lambda' \sigma_{kk} \delta_{ij}). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Równania (5.19) nie znajdują bezpośredniego zastosowania w teorii sprężystości, jednak mają one swoje odpowiedniki w mechanice elementów prętowych (por. część druga).

<sup>\*)</sup> W przypadkach dynamicznych siły objętościowe należy rozumieć jako różnicę  $G_i - \rho \ddot{u}_i$ , gdzie  $\ddot{u}_i = \partial^2 u / \partial t^2$  oznacza współrzędne wektora przyspieszenia, a  $\rho$  gęstość materiału. Składnik  $-\rho \ddot{u}_i$  oznacza więc gęstość sił d'Alemberta.

## 5.7. PRZYKŁADY

**Przykład 1**

Cienka sprężysta płytka jest w jednorodnym stanie naprężenia. Wymiary płytki i wartości sił wypadkowych obciążających jej krawędzie objaśnia rys. 5.10. Wyznaczyć kierunki główne i wartości główne tensora odkształcenia, jeśli wiadomo, że materiał płytki jest izotropowy i liniowo-sprężysty, a stałe sprężystości są następujące:

$$E = 200 \text{ GPa}, \quad \nu = \frac{1}{3}.$$

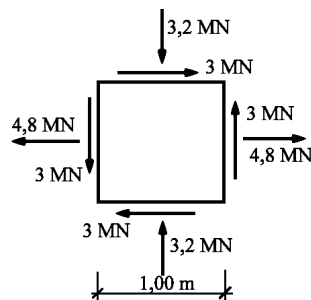
**Rozwiązanie**

Jeżeli stan naprężeń jest jednorodny, to siły obciążające muszą być równomiernie rozłożone na krawędziach płytki. Odpowiednie składowe stanu naprężenia w nawiązaniu do układu współrzędnych  $x_1, x_2$  zaznaczonego na rys. 5.11 wynoszą:

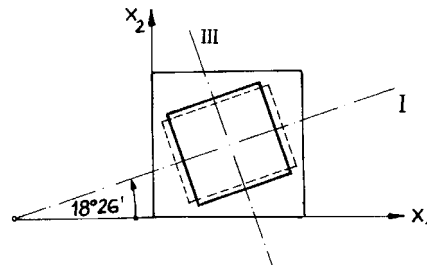
$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{4,8}{1,00 \cdot 0,02} = 240 \text{ MN / m}^2, \\ \sigma_{12} &= \sigma_{21} = \frac{3}{1,00 \cdot 0,02} = 150 \text{ MN / m}^2, \\ \sigma_{22} &= -\frac{3,2}{1,00 \cdot 0,02} = -160 \text{ MN / m}^2.\end{aligned}$$

Pozostałe składowe są równe zeru. Stan naprężenia jest opisany przez macierz  $\sigma$ :

$$\sigma = \begin{bmatrix} 240 & 150 & 0 \\ 150 & -160 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [\text{MN / m}^2].$$



Rys. 5.10



Rys. 5.11

Kierunki główne i wartości odkształceń głównych można wyznaczyć dwoma sposobami. Pierwszy z nich polega na tym, że najpierw obliczamy odkształcenia na podstawie związków fizycznych (5.3), a potem wartości i kierunki odkształceń głównych. W drugim sposobie wykorzystuje się fakt, że kierunki naprężeń głównych i odkształceń głównych w ciele izotropowym pokrywają się. Wobec tego można najpierw wyznaczyć naprężenia i kierunki naprężeń głównych, a później odpowiednie wartości odkształceń głównych na podstawie równań fizycznych. Zastosujemy tu drugi sposób obliczenia.

Na podstawie wzorów (1.28) mamy:

$$\sigma_3 = 0, \quad \sigma_1 = \frac{240 - 160}{2} + \sqrt{\left[\frac{240 - (-160)}{2}\right]^2 + 150^2} = 40 + 250 = 290 \text{ MN / m}^2,$$

$$\sigma_2 = 40 - 250 = -210 \text{ MN / m}^2.$$

Kierunki główne obliczamy ze wzoru (1.30):

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{2 \cdot 150}{240 - (-160)} = 0,75,$$

skąd 
$$\varphi_0 = \frac{1}{2} \arctg(0,75) = \frac{36^{\circ}52'}{2} = 18^{\circ}26'.$$

Ponieważ  $\sigma_{11} > \sigma_{22}$ , kąt  $\varphi_0$  jest zawarty między osią  $x_1$  a osią naprężenia  $\sigma_1$ .

Odształcenia główne są określone przez wzory (5.3):

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{290}{200000} - \frac{1}{3 \cdot 200000}(-210 + 0) = 0,0018 = 1,8 \text{ ‰}, \\ \varepsilon_2 &= -\frac{210}{200000} - \frac{1}{3 \cdot 200000}(290 + 0) = -0,00153 = -1,53 \text{ ‰}, \\ \varepsilon_3 &= -\frac{1}{3 \cdot 200000}(290 - 210) = -0,00013 = -0,13 \text{ ‰}.\end{aligned}$$

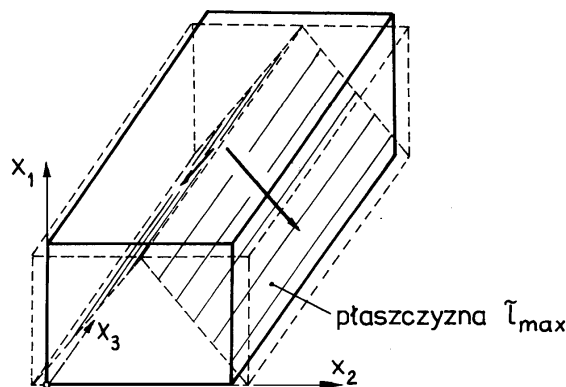
Uzyskany rezultat wskazuje, że płaskiemu stanowi naprężenia odpowiada trójwymiarowy stan odkształcenia. Odształcenie  $\varepsilon_3$  określa zmianę grubości płytki.

### Przykład 2

Pomiary odkształceń drugiej ławy betonowej wykazały, że:

$$\varepsilon_{11} = -0,100\%, \quad \varepsilon_{22} = 0,024\%, \quad \varepsilon_{33} = 0,$$

a kąty odkształcenia postaciowego są równe zeru (rys. 5.12). Obliczyć największe naprężenie styczne, jeśli  $E = 21\,000 \text{ MN/m}^2$  oraz  $\nu = 1/6$ .



Rys. 5.12

### Rozwiązanie

Z warunków zadania wynika, że osie  $x_1, x_2, x_3$  są głównymi osiami odkształcenia, a stan odkształcenia jest jednorodny. Wartości naprężeń głównych obliczymy bezpośrednio z równań (5.4):

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{21000}{1 + \frac{1}{6}} \cdot \left[ -0,001 + \frac{1}{6-2}(-0,001 + 0,00024) \right] = -21,4 \text{ MN/m}^2, \\ \sigma_{22} &= \frac{21000}{1 + \frac{1}{6}} \cdot \left[ 0,00024 + \frac{1}{6-2}(-0,001 + 0,00024) \right] = 0,9 \text{ MN/m}^2, \\ \sigma_{33} &= \frac{21000}{1 + \frac{1}{6}} \cdot \left[ 0 + \frac{1}{6-2}(-0,001 + 0,00024) \right] = -3,4 \text{ MN/m}^2.\end{aligned}$$

Uporządkowane naprężenia główne wynoszą:

$$\sigma_I = 0,9 \text{ MN/m}^2, \quad \sigma_{II} = -3,4 \text{ MN/m}^2, \quad \sigma_{III} = -21,4 \text{ MN/m}^2.$$

Maksymalne naprężenie styczne:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{III}) = \frac{1}{2} \cdot [0,9 - (-21,4)] = 11,15 \text{ MN} / \text{m}^2.$$

Naprężenia te działają na płaszczyznach prostopadłych do płaszczyzny  $x_1, x_2$ , nachylonych pod kątem  $45^\circ$  w stosunku do osi  $x_1, x_2$ . Warto zwrócić uwagę, że macierzy

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

opisującej płaski stan odkształcenia, odpowiada macierz

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix},$$

obrazująca trójosiowy stan naprężenia. Dodamy jeszcze, że płaski stan odkształcenia występuje właśnie w długich ławach lub murach oporowych, w których obciążenie nie zmienia się wzdłuż osi  $x_3$ . Duży wymiar ławy w tym kierunku uniemożliwia swobodne odkształcenie ( $\varepsilon_{33} = 0$ ), co sprawia, że pojawiają się naprężenia  $\sigma_{33}$ .