

## 18. PRĘTY WYKONANE Z MATERIAŁU FIZYCZNIE NIELINIOWEGO



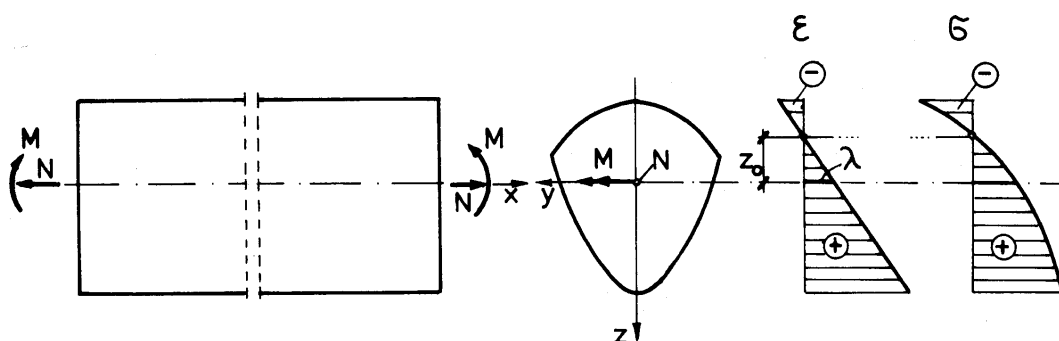
### 18.1. MATERIAŁ NIELINIOWO-SPRĘŻYSTY

Największą trudnością w badaniu zagadnień nieliniowych jest to, że nie obowiązuje zasada superpozycji. Jeśli na przykład w przekroju pręta wykonanego z materiału nieliniowego występują jednocześnie siła normalna  $N$  i moment zginający  $M$ , to przy wyznaczaniu naprężeń i przemieszczeń trzeba rozważać łączne działanie obu sił uogólnionych. Drugą dosyć kłopotliwą okolicznością jest tzw. znakoczułość materiału. Materiały znakoczule podczas wydłużania zachowują się inaczej niż podczas skracania. W materiałach wykazujących cechy plastyczne wiele trudności sprawia fakt, że odciążenie konstrukcji przebiega po innej drodze niż obciążenie.

W olbrzymiej większości przypadków, jak pokazuje doświadczenie, można jednak stosować znane hipotezy kinematyczne (np. hipotezę płaskich przekrojów). Tutaj omówimy zjawiska charakterystyczne dla materiałów fizycznie nieliniowych w zakresie małych odkształceń i przemieszczeń.

Rozważmy przykładowo jednoczesne działanie siły normalnej  $N$  i momentu zginającego  $M$  na przekrój pręta nieliniowo-sprężystego o jednej osi symetrii

(rys. 18.1). Dla uproszczenia zapisu przyjmijmy, że  $\varepsilon_x = \varepsilon$  oraz  $\sigma_x = \sigma$ , przy czym osie  $y$  i  $z$  są głównymi środkowymi osiami przekroju.



Rys. 18.1

Stosownie do hipotezy płaskich przekrojów Bernoulliego mamy:

$$\varepsilon(z) = kz + \lambda. \quad (18.1)$$

Położenie włókna obojętnego ( $\varepsilon = 0$ ), określa odległość  $z_0$ :

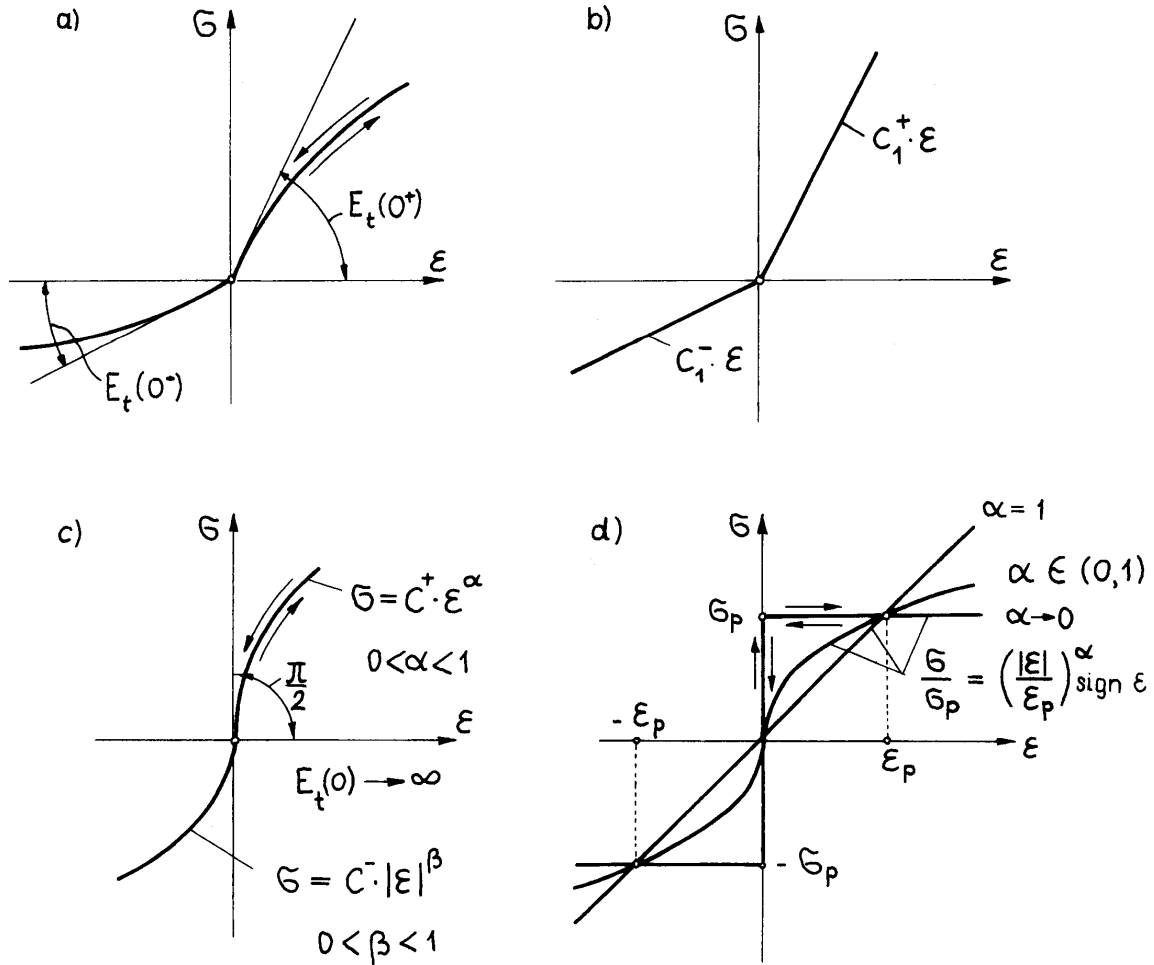
$$z_0 = -\frac{\lambda}{k} \quad (18.2)$$

Siły wewnętrzne  $N$  i  $M$  są zdefiniowane następująco:

$$N = \int_A \sigma dA = \int_A \sigma[\varepsilon(z)] dA(z); \quad M = \int_A \sigma[\varepsilon(z)] \cdot z dA(z). \quad (18.3)$$

W celu wyznaczenia naprężeń i przemieszczeń trzeba sprecyzować charakterystykę fizyczną materiału  $\sigma(\varepsilon)$  oraz kształt przekroju pozwalający określić funkcję  $dA(z)$ .

Proces sprężysty (również nieliniowy) charakteryzuje się tym, że krzywa obciążenia pokrywa się na wykresie  $\sigma(\varepsilon)$  z krzywą odciążenia (rys. 18.2a).



Rys. 18.2

Od charakterystyki  $\sigma(\varepsilon)$  wymagamy przede wszystkim, by rozciąganiu odpowiadało wydłużenie, a ścisaniu – skrócenie, tzn. by znak naprężeń odpowiadał znakowi odkształceń, czyli by  $\sigma \cdot \varepsilon \geq 0$ . Znakoczulość materiału objawia się w ten sposób, że  $\sigma(\varepsilon) \neq -\sigma(-\varepsilon)$ . Najprostszy materiał znakoczuloły opisuje funkcja  $\sigma(\varepsilon)$  składająca się z dwóch różnych zależności liniowych dla ścisania i rozciągania (rys. 18.2b):

$$\sigma = \begin{cases} C^+ \cdot \varepsilon, & \varepsilon \geq 0, \\ C^- \cdot \varepsilon, & \varepsilon \leq 0. \end{cases} \quad C^+ \neq C^-$$

Najczęściej stosuje się potęgowe prawo fizyczne (rys. 18.2c):

$$\sigma = \begin{cases} C^+ \cdot \varepsilon^\alpha, & \varepsilon > 0, \\ -C^- \cdot |\varepsilon|^\beta, & \varepsilon < 0, \end{cases} \quad (18.4)$$

przy czym  $C^+ > 0, C^- > 0, 0 < \alpha \leq 1, 0 < \beta \leq 1$ , gdzie  $\alpha$  i  $\beta$  oznaczają tzw. wskaźniki wzmocnienia.

Z zależności (18.4) jako przypadki szczególne otrzymujemy prawo liniowe ( $\alpha = \beta = 1, C^+ = C^- = E$ ) oraz funkcję schodkową ( $\alpha = \beta \rightarrow 0, C^+ = C^- = \sigma_p$ ), która odpowiada zależności:

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_0, & \varepsilon > 0, \\ -\sigma_0, & \varepsilon < 0. \end{cases}$$

Zasadniczą wadą zależności (18.4) jest to, że dla  $\varepsilon = 0$  wartości modułu stycznego  $E_t(0)$  dążą do nieskończoności:  $d\sigma/d\varepsilon|_{\varepsilon=0} = E_t(0) \rightarrow \infty$ . Takiej własności nie wykazuje żaden rzeczywisty materiał. Stosowanie zależności (18.4) ma zatem sens tylko dla dostatecznie dużych wartości odkształceń.

Bardzo ogólny przypadek nieliniowości fizycznej materiału sprężystego opisuje funkcja:

$$\sigma(\varepsilon) = \begin{cases} C_1^+ \cdot \varepsilon^1 + C_2^+ \cdot \varepsilon^2 + \dots + C_q^+ \cdot \varepsilon^q = \sum_{j=1}^q C_j^+ \cdot \varepsilon^j, & \varepsilon > 0, \\ C_1^- \cdot \varepsilon^1 + C_2^- \cdot \varepsilon^2 + \dots + C_r^- \cdot \varepsilon^r = \sum_{j=1}^r C_j^- \cdot \varepsilon^j, & \varepsilon < 0. \end{cases} \quad (18.5)$$

Współczynniki  $C_i^+$  oraz  $C_i^-$  muszą być tak obrane, by  $\sigma \cdot \varepsilon \geq 0$ . Ponieważ wytrzymałość i odkształcalność rzeczywistego materiału są ograniczone, dochodzą jeszcze dodatkowe ograniczenia na współczynniki  $C_i$  oraz obszar zmienności  $\varepsilon$ . Jak widać, dobór odpowiedniej idealizacji równania  $\sigma(\varepsilon)$  nie jest rzeczą prostą i wymaga każdorazowo gruntowej analizy.

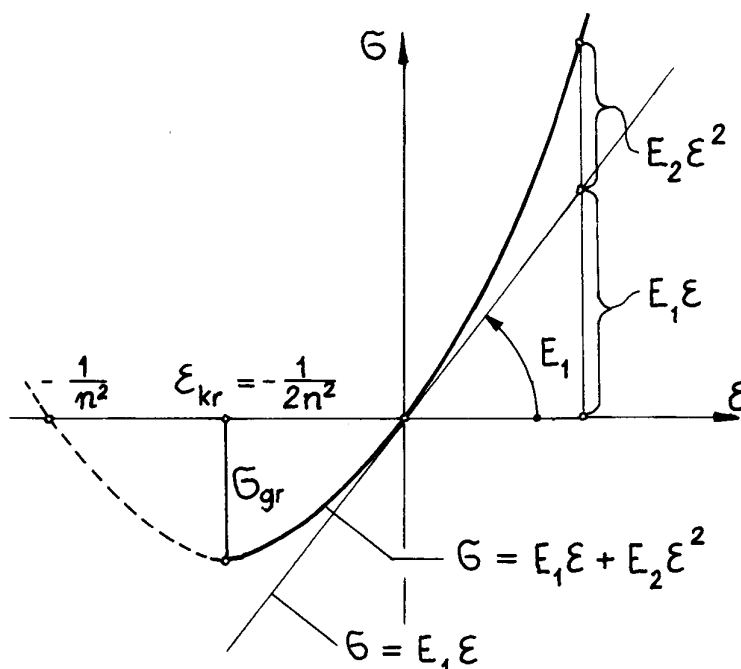
Dla opisu charakterystycznych cech pręta nieliniowo-sprężystego przyjmujemy możliwie najprostszą postać funkcji (18.5), a mianowicie  $C_1^+ = C_1^- = E_1$  oraz  $C_2^+ = C_2^- = E_2$ :

$$(a) \quad \sigma(\varepsilon) = E_1 \cdot \varepsilon + E_2 \cdot \varepsilon^2.$$

Funkcję tę przedstawia rysunek 18.3. Rozważany materiał jest znakoczuły, bo  $\sigma(\varepsilon) \neq -\sigma(-\varepsilon)$ . Moduł styczny  $E_t$  jest liniową funkcją odkształcenia:

$$(b) \quad E_t(\varepsilon) = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = E_1 + 2E_2\varepsilon,$$

z której wynika, że  $E_t(0^+) = E_t(0^-) = E_1$ . Oznacza to, że dla bardzo małych odkształceń znakoczułość materiału jest niewielka.



Rys. 18.3

Warunek nieujemności iloczynu  $\sigma \cdot \varepsilon$  prowadzi do nierówności:

$$\sigma \cdot \varepsilon = E_1 \varepsilon^2 + E_2 \varepsilon^3 \geq 0,$$

skąd

$$(c) \quad \varepsilon \geq -\frac{1}{n^2}, \quad n^2 = E_2 / E_1.$$

Największe naprężenie ściskające, jakie może przenieść badany materiał, odpowiada odkształceniu wynikającemu z warunku  $d\sigma/d\varepsilon = 0$ . Prowadzi on do równania:

$$E_1 + 2E_2 \varepsilon = 0,$$

z którego otrzymujemy:

$$\varepsilon = \varepsilon_{gr} = -\frac{E_1}{2E_2} = -\frac{1}{2n^2}.$$

Wartość ta odpowiada pewnemu naprężeniu granicznemu  $\sigma_{gr}$ :

$$\sigma\left(-\frac{1}{2n^2}\right) = \sigma_{gr} = -\frac{E_1}{4n^2}.$$

Każda próba przekroczenia naprężenia granicznego powoduje nagłe załamanie się materiału. Mówimy, że w punkcie granicznym (tj. gdy  $\sigma = \sigma_{gr}$ ) materiał traci stateczność. Utrata stateczności materiałowej może występować również podczas rozciągania. Zachodzi ona przykładowo dla  $\varepsilon_{gr} = 1/(2n^2)$ , jeśli przyjmiemy prawo fizyczne w postaci:  $\sigma(\varepsilon) = E_1 \cdot \varepsilon - E_2 \cdot \varepsilon^2$ .

Stwierdzamy zatem, że stosowalność nieliniowego prawa fizycznego (a) ograniczają warunki:

$$(d) \quad \begin{cases} \varepsilon \geq \varepsilon_{gr} = -\frac{1}{2n^2}, \\ \sigma \geq \sigma_{gr} = -\frac{E_1}{4n^2}. \end{cases}$$

Przejdziemy obecnie do analizy pręta wykonanego z przyjętego materiału nieliniowo-sprężystego. Wyraziwszy naprężenia wzorem (a) oraz przyjąwszy prawo płaskich przekrojów (18.1) możemy określić siłę normalną  $N$  i moment zginający  $M$  ze wzorów (18.3):

$$\begin{aligned} N &= \int_A \left[ E_1 \cdot (kz + \lambda) + E_2 \cdot (kz + \lambda)^2 \right] \cdot dA = \\ &= E_1 \left[ k \int_A z \, dA + \lambda \cdot \int_A dA \right] + E_2 \cdot \left[ k^2 \int_A z^2 \, dA + 2k\lambda \int_A z \, dA + \lambda^2 \int_A dA \right], \\ M &= \int_A \left[ E_1 \cdot z(kz + \lambda) + E_2 \cdot z(kz + \lambda)^2 \right] \cdot dA = \\ &= E_1 \left[ k \int_A z^2 \, dA + \lambda \cdot \int_A z \, dA \right] + E_2 \left[ k^2 \int_A z^3 \, dA + 2k\lambda \int_A z^2 \, dA + \lambda^2 \int_A z \, dA \right]. \end{aligned}$$

Ponieważ  $\int_A dA = A$ ,  $\int_A z \, dA = 0$ ,  $\int_A z^2 \, dA = J_y = J$ , więc

$$(e) \quad \begin{cases} N = E_1 A \lambda + E_2 (k^2 J + \lambda^2 A), \\ M = E_1 J k + E_2 \left[ k^2 \int_A z^3 dA + 2k\lambda J \right]. \end{cases}$$

Jeżeli dane są siły wewnętrzne  $N$  i  $M$ , to z układu równań (e) możemy wyznaczyć krzywiznę  $k(N, M)$  i wydłużenie osi pręta  $\lambda(N, M)$ . Pozwoli to określić odkształcenia  $\varepsilon(z)$  według wzoru (18.1) oraz naprężenia z prawa fizycznego (a).

Dalsze rozważania ograniczymy do prętów o przekroju bisymetrycznym, czyli o przekroju, w którym zarówno oś  $z$ , jak i oś  $y$  są osiami symetrii. Szerokość przekroju w tych przypadkach jest parzystą funkcją zmiennej  $z$  (tzn.  $b(z) = b(-z)$ ). Wówczas

$$\int_A z^3 dA = \int_{-a}^a z^3 b(z) dz = \int_{-a}^a g(z) dz = 0,$$

przy czym  $a = h/2$  i oznacza połowę wysokości przekroju, a  $g(z)$  jest nieparzystą funkcją zmiennej  $z$ . Dla przekrojów bisymetrycznych układ równań (e) upraszcza się zatem do postaci:

$$(f) \quad \begin{aligned} N(\lambda, k) &= E_1 A \lambda + E_2 (\lambda^2 A + k^2 J) = E_1 A \left[ \lambda + (n\lambda)^2 + (nki)^2 \right], \\ M(\lambda, k) &= E_1 J k + 2E_2 J k \lambda = E_1 J k (1 + 2n^2 \lambda), \end{aligned}$$

gdzie przez  $i = \sqrt{J/A}$  oznaczono promień bezwładności przekroju.

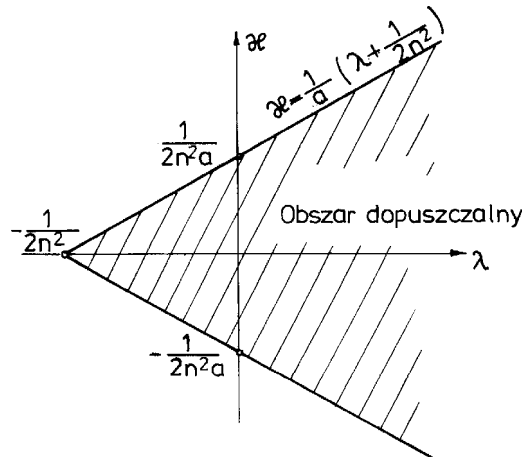
Jeżeli zachowanie się materiału w każdym punkcie przekroju ma być stateczne, to musi być spełniony jeden z warunków (d). Stosownie do prawa płaskich przekrojów największe skrócenia względne występują w skrajnych włóknach przekroju, tj. dla  $z = \pm a$ . Konsekwencją nierówności (d) jest zatem warunek:

$$\pm ka + \lambda \geq -\frac{1}{2n^2},$$

z którego otrzymujemy, że

$$(g) \quad -\frac{1}{a} \left( \lambda + \frac{1}{2n^2} \right) \leq k \leq \frac{1}{a} \left( \lambda + \frac{1}{2n^2} \right).$$

Nierówność (g) opisuje pewien obszar dopuszczalny w przestrzeni  $(\lambda, k)$ , ograniczony dwoma półprostymi (rys. 18.4).



Rys. 18.4

Sprawdźmy obecnie, czy istnieje taka funkcja energii odkształcenia  $W(\lambda, k)$ , która wykazuje własności potencjału dla sił wewnętrznych, tzn.

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda} = N(\lambda, k) \quad \text{ i } \quad \frac{\partial W}{\partial k} = M(\lambda, k).$$

Jeśli tak jest, to z ciągłości funkcji  $W(\lambda, k)$  wynikają zależności:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{\partial W}{\partial k} \right) = \frac{\partial}{\partial k} \left( \frac{\partial W}{\partial \lambda} \right)$$

lub

$$\frac{\partial M}{\partial \lambda} = \frac{\partial N}{\partial k}.$$

Nietrudno sprawdzić, że nasza teza jest prawdziwa, ponieważ na podstawie wzorów (f) otrzymujemy:

$$\frac{\partial M}{\partial \lambda} = 2E_2 J k \quad \text{ oraz } \quad \frac{\partial N}{\partial k} = 2E_2 J k.$$

Wobec tego

$$W(\lambda, k) = \int \frac{\partial W}{\partial k} d\lambda = \int N(\lambda, k) d\lambda = E_1 A \frac{\lambda^2}{2} + E_2 A \frac{\lambda^3}{3} + E_2 J \lambda k^2 + f_1(k)$$

i jednocześnie

$$W(\lambda, k) = \int \frac{\partial W}{\partial k} dk = \int M(\lambda, k) dk = E_1 A \frac{k^2}{2} + 2E_2 J \lambda \frac{k^2}{3} + f_2(\lambda).$$

Porównawszy obie postacie funkcji  $W(\lambda, k)$  stwierdzamy, że  $f_1(k) = E_1 J k^2 / 2$  oraz  $f_2(\lambda) = E_1 A \lambda^2 / 2 + E_2 A \lambda^3 / 3$ . Pozwala to określić funkcję  $W(\lambda, k)$ :

$$(h) \quad W(\lambda, k) = E_1 A \frac{\lambda^2}{2} + E_2 A \frac{\lambda^3}{3} + E_2 J \lambda k + E_1 J \frac{k^2}{2}.$$

W otoczeniu stanów równowagi funkcja  $W$  powinna być dodatnio określona. Warunek  $W(\lambda, k) > 0$  wyznacza pewien obszar w przestrzeni  $(\lambda, k)$ . Jeszcze inny obszar otrzymamy, wymagając, by  $\sigma \cdot \varepsilon \geq 0$ , co dla uogólnionych naprężeń  $N$  i  $M$  oraz uogólnionych odkształceń  $\lambda$  i  $k$  odpowiada warunkowi:

$$N(\lambda, k) \lambda + M(\lambda, k) k \geq 0.$$

Z nierówności tej wynika, że dla  $M = 0$  znaki wydłużenia i siły normalnej muszą być takie same, a dla  $N = 0$  znaki krzywizny i momentu zginającego muszą być takie same. Można sprawdzić, że najmniejszy obszar odpowiada nierówności (g), gwarantującej stateczne zachowanie się materiału w każdym punkcie przekroju.

Przejdziemy obecnie do wyznaczenia zależności  $\lambda(N, M)$  oraz  $k(N, M)$  na podstawie równań (f). Zwróćmy uwagę na to, że współczynnik  $E_1$  jest początkowym modułem sprężystości, odpowiednikiem modułu *Younga* w liniowej sprężystości. Stwarza to okazję do wprowadzenia wydłużenia  $\lambda_1$  oraz krzywizny  $k_1$ , które są zdefiniowane znanymi wzorami teorii liniowej:

$$(i) \quad \lambda_1 = \frac{N}{E_1 A}, \quad k_1 = \frac{M}{E_1 J}.$$

Wobec tego równania (f) można zapisać w postaci:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda + (n\lambda)^2 + (nki)^2, \\ k_1 = k(1 + 2n^2\lambda) \end{cases}$$

lub

$$\begin{cases} \lambda_1 = n^2 \left( \lambda + \frac{1}{2n^2} \right)^2 + n^2 (ki)^2 - \frac{1}{4n^2}, \\ k_1 = \frac{2n^2}{i} \cdot (ki) \cdot \left( \lambda + \frac{1}{2n^2} \right). \end{cases}$$

Rozwiązanie tego układu polega na obliczeniu pierwiastków dwóch równań dwukwadratowych:

$$\begin{cases} (nki)^4 - \left( \lambda_1 + \frac{1}{4n^2} \right) \cdot (nki)^2 + \left( \frac{k_1 i}{2} \right)^2 = 0 \\ \left[ n \left( \lambda + \frac{1}{2n^2} \right) \right]^4 - \left( \lambda_1 + \frac{1}{4n^2} \right) \cdot \left[ n \left( \lambda + \frac{1}{2n^2} \right) \right]^2 + \left( \frac{k_1 i}{2} \right)^2 = 0. \end{cases}$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$(j) \quad \begin{cases} k[\lambda_1(N), k_1(M)] \cdot a = \pm \frac{a}{in\sqrt{2}} \sqrt{\left( \lambda_1 + \frac{1}{4n^2} \right) \mp \sqrt{\left( \lambda_1 + \frac{1}{4n^2} \right)^2 - (k_1 i)^2}}, \\ \lambda[\lambda_1(N), k_1(M)] = \frac{1}{2n^2} \left( \frac{k_1}{k} - 1 \right) = \\ = \frac{1}{2n^2} \left[ -1 \pm \sqrt{2n} \sqrt{\left( \lambda_1 + \frac{1}{4n^2} \right) \pm \sqrt{\left( \lambda_1 + \frac{1}{4n^2} \right)^2 - (k_1 i)^2}} \right]. \end{cases}$$

Rozwiązanie to ma sens tylko wówczas, gdy liczby występujące pod pierwiastkami są nieujemne, tzn. jeśli  $|k_1 i| \leq \lambda_1 + 1/4n^2$ .

Z zależności (j) wynikają bezpośrednio wnioski dotyczące czystego rozciągania ( $M = 0, k_1 = 0$ ) oraz czystego zginania ( $N = 0, \lambda_1 = 0$ ):

–  $M = 0, (k_1 = 0)$

$$\lambda = -\frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n} \sqrt{\lambda_1 + \frac{1}{4n^2}}; \quad k = 0;$$

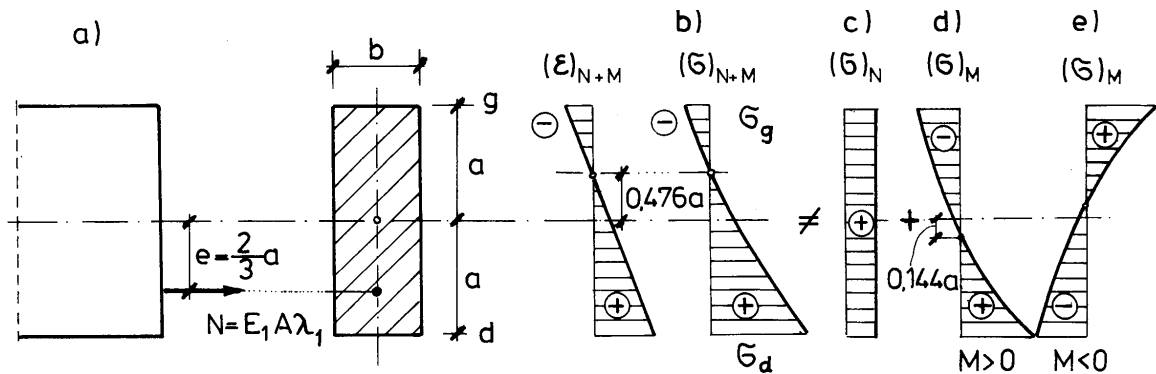
–  $N = 0, (\lambda_1 = 0)$

$$\lambda = -\frac{1}{2n^2} + \frac{1}{\sqrt{2n}} \cdot \sqrt{\frac{1}{4n^2} \pm \sqrt{\frac{1}{4n^2} - (k_1 i)^2}} \neq 0,$$

$$k = \pm \frac{1}{\sqrt{2ni}} \cdot \sqrt{\frac{1}{4n^2} \mp \sqrt{\frac{1}{4n^2} - (k_1 i)^2}}.$$

Widzimy zatem, że podczas czystego zginania oś obojętna nie pokrywa się z osią ciężkości przekroju. W przekrojach bisymetrycznych zjawisko to występuje tylko dla materiałów znakoczułych.

Łączne działanie siły normalnej i momentu zginającego zilustrujemy przykładem mimośrodowego rozciągania pręta o przekroju prostokątnym siłą  $N = E_1 A \lambda_1$  (rys. 18.5).



Rys. 18.5

Przyjmijmy, że wartość siły  $N$  jest określona przez wydłużenie  $\lambda_1 = 0,0002$ , a mimośród tej siły  $e = 2a/3$ . Nieliniowość materiału pręta charakteryzuje tutaj współczynnik  $n = 30$ . Naprężenia skrajne obliczone jak dla materiału liniowo-sprężystego wyraża wzór:

$$\sigma^0 = \frac{N}{A} \pm \frac{M}{W} = \frac{N}{A} \cdot \left(1 \pm \frac{ea}{i^2}\right) = E_1 \lambda_1 \left(1 \pm \frac{ea}{i^2}\right).$$

Ponieważ dla prostokąta  $i = \sqrt{J/A} = h/\sqrt{12} = a/\sqrt{3}$ , więc

$$\sigma_d^0 = E_1 \lambda_1 \left(1 + \frac{2}{3} \cdot 3\right) = 3E_1 \lambda_1 = 6 \cdot 10^{-4} E_1,$$

$$\sigma_g^0 = E_1 \lambda_1 (1 - 2) = -E_1 \lambda_1 = -2 \cdot 10^{-4} E_1.$$

Ze wzorów (j) otrzymujemy  $(k_1 = M/(E_1 J) = \lambda_1 e/i^2 = 2\lambda_1/a)$ :

$$ka = \frac{\sqrt{1,5}}{30} \cdot \sqrt{0,0002 + 3600^{-1} - \sqrt{\left(2 \cdot 10^{-4} + 3600^{-1}\right)^2 - \left(\frac{2 \cdot 2 \cdot 20^{-4}}{\sqrt{3}}\right)^2}} = 3,15 \cdot 10^{-4},$$

$$\lambda = \frac{1}{1800} \left(\frac{2 \cdot 0,0002}{0,000366} - 1\right) = 1,50 \cdot 10^{-4}.$$

Odształcenia skrajnych włókien wynoszą:

$$\varepsilon_d = \varepsilon(a) = ka + \lambda = -4,65 \cdot 10^{-4},$$

$$\varepsilon_d = \varepsilon(-a) = -ka + \lambda = -1,65 \cdot 10^{-4} > \varepsilon_{gr} = -\frac{1}{2n^2} = -5,56 \cdot 10^{-4},$$

skąd

$$\sigma_d = E_1 \varepsilon_d (1 + n^2 \varepsilon_d) = 6,59 \cdot 10^{-4} E_1,$$

$$\sigma_g = E_1 \varepsilon_g (1 + n^2 \varepsilon_g) = -1,40 \cdot 10^{-4} E_1.$$

Położenie osi obojętnej określa wartość  $z_0$ :

$$z_0 = -\frac{\lambda}{k} = -\frac{1,50}{3,15} \cdot a = -0,476a.$$

W materiale liniowo-sprężystym

$$z_0^0 = -\frac{\lambda_1}{k_1} = -0,500a.$$

Obliczymy jeszcze naprężenia dla każdej z obu sił wewnętrznych działających osobno. Gdy działa tylko siła normalna  $N = E_1 A \lambda_1$ , otrzymujemy:

$$\begin{aligned}(\lambda)_N &= (\varepsilon)_N = -1800^{-1} + \frac{1}{30} \cdot \sqrt{0,0002 + 3600^{-1}} = 1,73 \cdot 10^{-4}, \\ (\sigma)_N &= E_1 \cdot (\varepsilon)_N \cdot \left[1 + n^2 \cdot (\varepsilon)_N\right] = 2,0 \cdot 10^{-4} E_1.\end{aligned}$$

Gdy działa tylko moment zginający ( $M = E_1 J k_1$ ,  $k_1 = 2\lambda_1 / \sqrt{3}$ ), otrzymujemy:

$$\begin{aligned}(ka)_M &= \frac{\sqrt{1,5}}{30} \sqrt{3600^{-1} - \sqrt{3600^{-2} - \frac{4}{3} \cdot 0,0002}} = 4,535 \cdot 10^{-4} \\ (\lambda)_M &= -1800^{-1} + \frac{1}{30\sqrt{2}} \sqrt{3600^{-1} + \sqrt{3600^{-2} - \frac{4}{3} \cdot 0,0002^2}} = -0,655 \cdot 10^{-4}, \\ (z_0) &= \frac{0,655}{4,535} a = 0,144a, \\ (\varepsilon_d)_M &= (4,535 - 0,655) \cdot 10^{-4} = 3,88 \cdot 10^{-4}, \\ (\varepsilon_g)_M &= (-4,535 - 0,655) \cdot 10^{-4} = -5,19 \cdot 10^{-4} > \varepsilon_{gr} = -5,56 \cdot 10^{-4}, \\ (\sigma_d)_M &= E_1 \cdot (\varepsilon_d)_M \cdot \left[1 + n^2 \cdot (\varepsilon_d)_M\right] = 5,23 \cdot 10^{-4} E_1, \\ (\sigma_g)_M &= E_1 \cdot (\varepsilon_g)_M \cdot \left[1 + n^2 \cdot (\varepsilon_g)_M\right] = -2,77 \cdot 10^{-4} E_1.\end{aligned}$$

Przeprowadzone wyżej rachunki pokazują, że

$$(\varepsilon)_{N+M} \neq (\varepsilon)_N + (\varepsilon)_M \quad \text{oraz} \quad (\sigma)_{N+M} \neq (\sigma)_N + (\sigma)_M,$$

co potwierdza fakt, że w problemach nieliniowych zasada superpozycji nie obowiązuje. Wartości naprężeń dla czystego zginania odbiegają dosyć znacznie od wartości obliczonych według teorii liniowej. Wykresy naprężeń przedstawiono na rys. 18.5b, c, d. Na rysunkach 18.5d, e pokazano rozkład naprężeń podczas działania ujemnego momentu zginającego, rozciągającego górne włókna przekroju. Zmiana znaku sił wewnętrznych pociąga za sobą zmianę znaków pierwiastków kwadratowych we wzorach (j). Przyjęcie właściwego znaku wymaga dodatkowej analizy.

Warto zwrócić uwagę na to, że kształt wykresów naprężeń normalnych  $\sigma(z)$  odpowiada wykresowi  $\sigma(\varepsilon)$  obróconemu o  $90^\circ$ . Podobieństwo tych wykresów zachodzi tylko wówczas, gdy obowiązuje hipoteza *Bernoulliego*. Stosownie do tej hipotezy  $z = z_0 + \varepsilon / k$ , a funkcja  $\sigma(z) = \sigma(z_0 + \varepsilon / k)$ . Wynika stąd, że dla ustalonych wartości  $\lambda$  i  $k$  rozkład naprężeń  $\sigma(z)$  jest odpowiednio przeskalowanym wykresem  $\sigma(\varepsilon)$ .

Omówione wyżej zadanie ma charakter czysto akademicki. Niemniej jednak bardzo dobrze ilustruje ono rozległość problematyki pojawiającej się z chwilą odejścia od klasycznego modelu materiału liniowo-sprężystego.

Na zakończenie poświęcimy nieco uwagi zginaniu poprzecznemu pręta wykonanego z materiału o charakterystyce potęgowej (por. rys. 18.2d). Przyjawszy we wzorze (18.4), że  $C^+ = C^- = E_\alpha$ , otrzymujemy:

$$(k) \quad \sigma(\varepsilon) = \text{sgn}(\varepsilon) \cdot E_\alpha \cdot |\varepsilon|^\alpha.$$

Przyjęty materiał nie wykazuje czułości na znak odkształcenia, ponieważ  $\sigma(\varepsilon) = -\sigma(-\varepsilon)$ . Jeżeli ograniczymy się tylko do przekrojów bisymetrycznych, to podczas zginaniu oś obojętna pokrywa się zawsze z osią ciężkości przekroju. Wówczas

$$(l) \quad \varepsilon(z) = kz$$

oraz

$$(m) \quad \sigma(z) = \operatorname{sgn}(kz) \cdot E_\alpha |kz|^\alpha.$$

Po uwzględnieniu wzorów (l) i (m) w definicji momentu zginającego otrzymujemy:

$$M = \int_A \sigma z \, dA = E_\alpha \int_A |kz|^\alpha \cdot z \cdot \operatorname{sgn}(kz) \, dA = E_\alpha J_\alpha |k|^\alpha \cdot \operatorname{sgn} k,$$

gdzie

$$(n) \quad J_\alpha = \int_A |z|^{\alpha+1} \, dA.$$

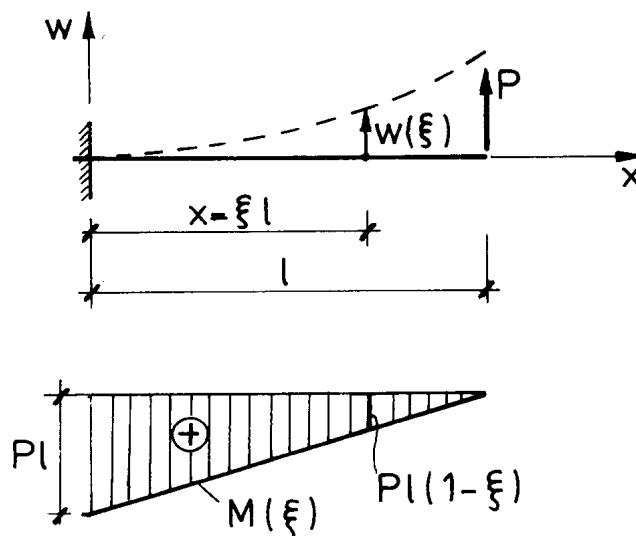
Wobec powyższego krzywizna osi pręta:

$$(o) \quad k = \operatorname{sgn}(M) \left( \frac{|M|}{E_\alpha J_\alpha} \right)^{1/\alpha}.$$

Wzór (o) jest uogólnieniem znanej zależności wiążącej krzywiznę z momentem zginającym dla materiału liniowo-sprężystego, dla którego  $\alpha = 1$ . Rozkład naprężeń  $\sigma(z)$  na wysokości przekroju wynika ze wzorów (l), (m) i (o):

$$(p) \quad \sigma(z) = \begin{cases} \frac{M}{J_\alpha} \cdot z^\alpha, & 0 \leq z \leq a, \\ -\frac{M}{J_\alpha} \cdot |-z|^\alpha, & -a \leq z \leq 0. \end{cases}$$

Dla przykładu obliczymy największe ugięcie belki wspornikowej obciążonej na swobodnym końcu pionową siłą  $P$  (rys. 18.6).



Rys. 18.6

W przyjętym układzie współrzędnych  $x$ , z krzywizna jest określona zależnością:

$$k = \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{1}{l^2} \cdot \frac{d^2 w(\xi)}{d\xi^2} = \frac{1}{l^2} \cdot w''(\xi),$$

gdzie

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad ( )'' = \frac{d^2}{d\xi^2} ( ),$$

a moment zginający

$$M(\xi) = P(1 - \xi).$$

Po podstawieniu powyższych zależności do wzoru (o) otrzymujemy równanie różniczkowe linii ugięcia:

$$\frac{1}{l^2} \cdot w''(\xi) = \left[ \frac{Pl}{E_\alpha J_\alpha} \right]^{1/\alpha} \cdot (1 - \xi)^{1/\alpha}$$

lub

$$w''(\xi) = Cl(1 - \xi)^{1/\alpha},$$

gdzie

$$C = \left[ \frac{Pl^{1+\alpha}}{E_\alpha J_\alpha} \right]^{1/\alpha}.$$

Dwukrotne całkowanie prowadzi do wyniku:

$$w'(\xi) = -Cl \cdot \frac{(1 - \xi)^{1+1/\alpha}}{(1 + 1/\alpha)} + D_1,$$

$$w(\xi) = Cl \cdot \frac{(1 - \xi)^{2+1/\alpha}}{(1 + 1/\alpha) \cdot (2 + 1/\alpha)} \cdot D_1 \xi + D_2.$$

Stałe  $D_1$  i  $D_2$  obliczymy z warunków brzegowych:

$$- w'(0) = 0$$

$$D_1 = Cl \cdot \frac{1}{(1 + 1/\alpha)},$$

$$- w(0) = 0$$

$$D_2 = -Cl \cdot \frac{1}{(1 + 1/\alpha) \cdot (2 + 1/\alpha)}.$$

Największe ugięcie występuje dla  $\xi = 1$ :

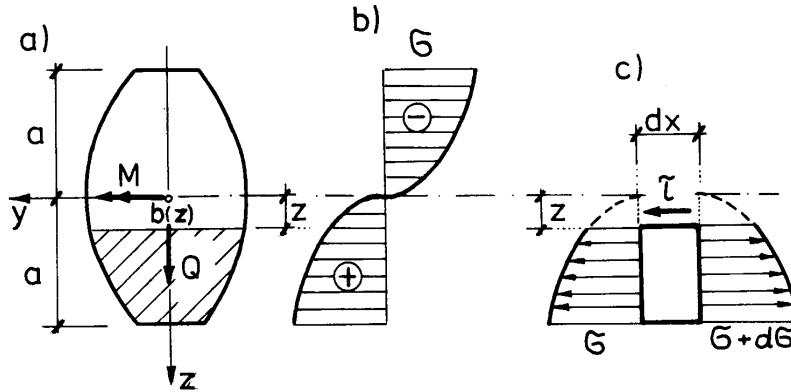
$$\Delta(P) = w_{\max} = w(1) = D_1 + D_2 = Cl \frac{\alpha}{1 + 2\alpha} = \frac{\alpha l}{1 + 2\alpha} \cdot \left[ \frac{Pl^{1+\alpha}}{E_\alpha J_\alpha} \right]^{1/\alpha}.$$

Z budowy wzoru na ugięcie widać, że jeśli  $P = P_1 + P_2$ , to

$$\Delta(P) \neq \Delta(P_1) + \Delta(P_2).$$

Wynika stąd, że zasada superpozycji jest niesłuszna, z wyjątkiem przypadku liniowego, gdy  $\alpha = 1$ . Odnotujmy jednak, że w odniesieniu do naprężeń normalnych  $\sigma$  zasada ta jest słuszna, gdyż ze wzoru (p) wynika, że:

$$\sigma(P) = \sigma(P_1) + \sigma(P_2).$$



Rys. 18.7

Rozkład średnich naprężeń stycznych  $\tau = \bar{\tau}_{xz}$  otrzymamy z równania równowagi elementu przedstawionego na rys. 18.7:

$$b(z)\tau \cdot dx = \left[ \int_z^a \frac{\partial \sigma}{\partial x} \cdot b(z) dz \right] \cdot dx.$$

Jeżeli pręt jest przyzmatyczny, to

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{dM}{dx} \cdot \frac{z^\alpha}{J_\alpha} = Q \frac{z^\alpha}{J_\alpha},$$

Po podstawieniu tego rezultatu do równania równowagi otrzymujemy:

$$\tau = \frac{Q(x)}{b(z) \cdot J_\alpha} \int_z^a b(z) z^\alpha \cdot dz.$$

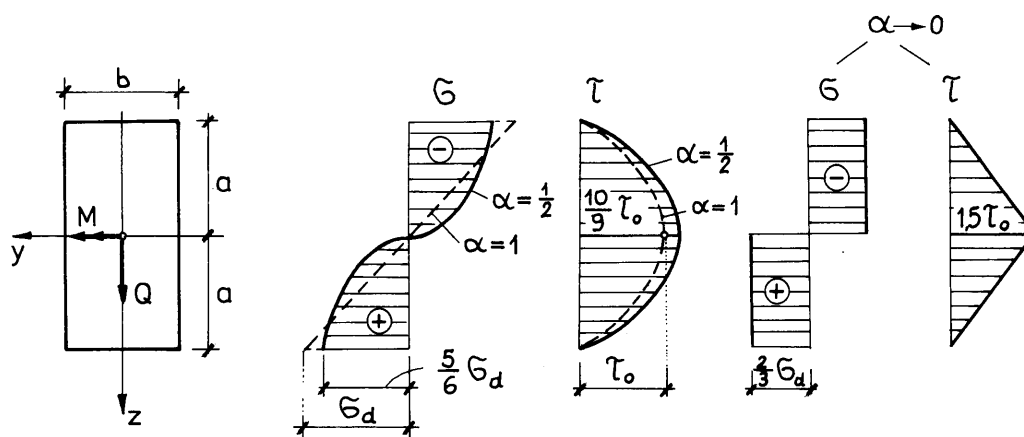
W przekroju prostokątnym  $b(z) = b = \text{const}$ ,  $J_\alpha = 2ba^{\alpha+2} / (\alpha + 2)$ , a naprężenia styczne  $\tau$  określa wzór:

$$\tau = \frac{Q(x)}{J_\alpha} \int_z^a z^\alpha dz = \frac{Q(x)}{A} \cdot \frac{\alpha + 2}{\alpha + 1} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{z}{a} \right)^{\alpha+1} \right], \quad A = bh.$$

Dla kompletu podamy jeszcze wzór na naprężenia normalne w przekroju prostokątnym:

$$\sigma(z) = -\sigma(-z) = \frac{Pl}{2ab^2} (\alpha + 2) \cdot \left| \frac{z}{a} \right|^\alpha.$$

Wykresy naprężeń  $\sigma$  i  $\tau$  w belce o przekroju prostokątnym dla  $\alpha = 1$ ,  $\alpha = 0,5$  oraz  $\alpha \rightarrow 0$  przedstawia rys. 18.8.



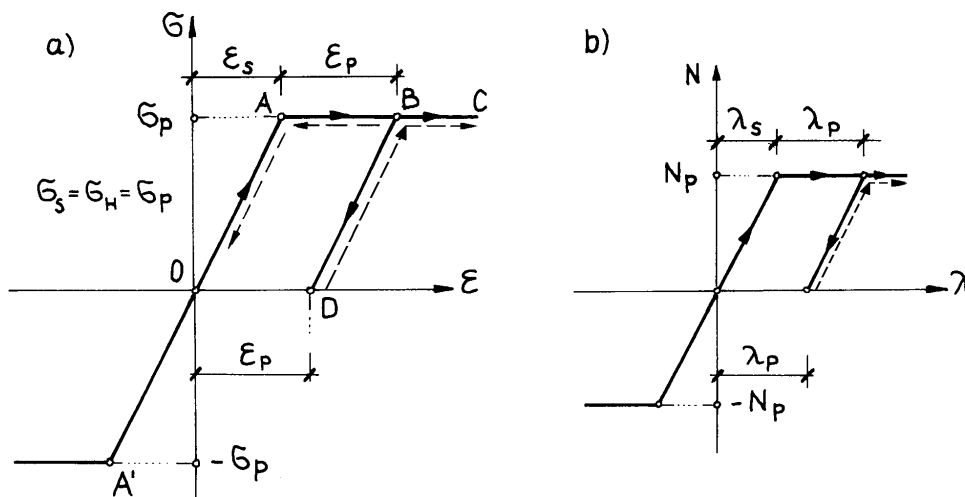
Rys. 18.8

Zauważmy jeszcze, że dla wykładnika potęgowego  $\alpha \rightarrow 0$   $\sigma_{\max} = 2\sigma_{0\max} / 3$  oraz  $\tau_{\max} = 1,5\tau_{0\max}$ , przy czym  $\sigma_{0\max}$  i  $\tau_{0\max}$  oznaczają naprężenia obliczone dla przypadku liniowego ( $\alpha = 1$ ).

## 18.2. MATERIAŁ SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNY

### 18.2.1. Uwagi ogólne

W celu zilustrowania charakterystycznych cech procesów sprężysto-plastycznych przyjmujemy najprostszy model materiału sprężysto-idealnie plastycznego bez wzmocnienia (rys. 18.9a).



Rys. 18.9

W modelu takim zakłada się, że granice proporcjonalności ( $\sigma_H$ ), sprężystości ( $\sigma_S$ ) i plastyczności ( $\sigma_P$ ) pokrywają się, a wykresy  $\sigma(\epsilon)$  dla rozciągania i ściskania są identyczne, czyli  $\sigma(\epsilon) = -\sigma(-\epsilon)$ :

$$\sigma(\epsilon) = \begin{cases} E \cdot \epsilon, & |\epsilon| \leq \epsilon_S \\ \sigma_P \cdot \text{sgn } \epsilon, & |\epsilon| \geq \epsilon_S. \end{cases}$$

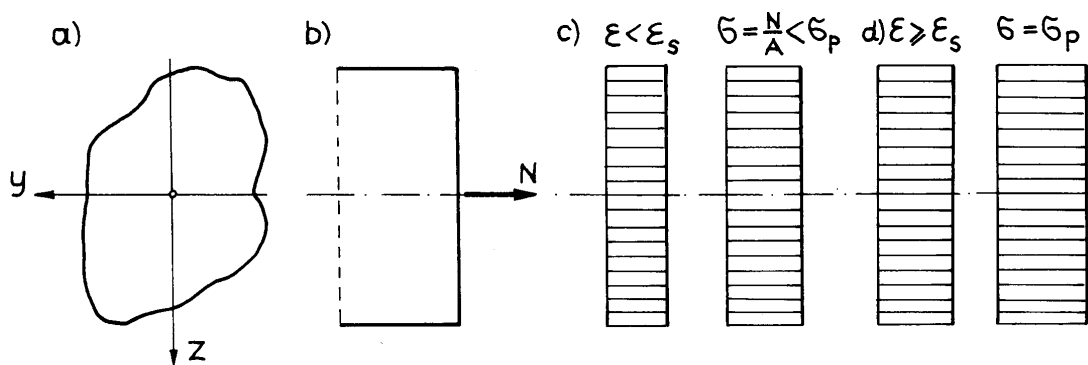
W czasie obciążenia, jeżeli  $|\epsilon| \leq \epsilon_S$ , materiał jest w stanie sprężystym. Przekroczenie odkształcenia  $\epsilon_S$  odpowiada przejściu w stan plastyczny, w którym odkształcenia narastają przy stałej wartości naprężenia  $\sigma = \sigma_P$ . Jeżeli odkształcenia nadal rosną, to nie ma żadnej różnicy między materiałem sprężysto-

plastycznym a materiałem nieliniowo-sprężystym. Różnica między nimi uwidacznia się dopiero podczas odciążenia. W materiale nieliniowo-sprężystym krzywa obciążenia  $OAB$  (rys. 18.9a) pokrywa się z krzywą odciążenia  $BAO$ , a proces ma charakter całkowicie odwracalny. Tymczasem cechą charakterystyczną zjawisk związanych z odkształceniami plastycznymi jest ich nieodwracalność. Odciążenie przebiega wzdłuż linii prostej (odcinek  $BD$ ) o nachyleniu odpowiadającym początkowemu modułowi sprężystości. Po usunięciu obciążenia pozostają trwałe odkształcenia plastyczne  $\varepsilon_p$ . Pole  $OABD$  odpowiada energii rozproszonej (tzw. dyssypacji) w procesie odkształceń plastycznych. Proces ponownego obciążenia przebiega wzdłuż linii przerywanej zaznaczonej na rys. 18.9a. Procesowi temu towarzyszą odkształcenia plastyczne wytworzone w czasie pierwszego obciążenia.

Przejdziemy do omówienia zachowania się prętów wykonanych z materiału idealnie sprężysto-plastycznego. Dla odkształceń liniowych obowiązuje tu nadal hipoteza płaskich przekrojów ( $\varepsilon(z) = kz + \lambda$ ).

### 18.2.2. Działanie siły normalnej

Przypadek działania siły normalnej jest trywialny, gdyż  $\varepsilon = \lambda$ , a naprężenia  $\sigma$  są równomiernie rozłożone w obrębie przekroju, czyli  $N = \sigma A$  (rys. 18.10). Wobec tego



Rys. 18.10

wykres zależności  $N(\lambda)$  ma taki sam kształt jak wykres  $\sigma(\varepsilon)$ , (rys. 18.9b). Największa wartość siły normalnej, jaką może przenieść przekrój pręta

$$N_{\max} = N_P = \sigma_P \cdot A.$$

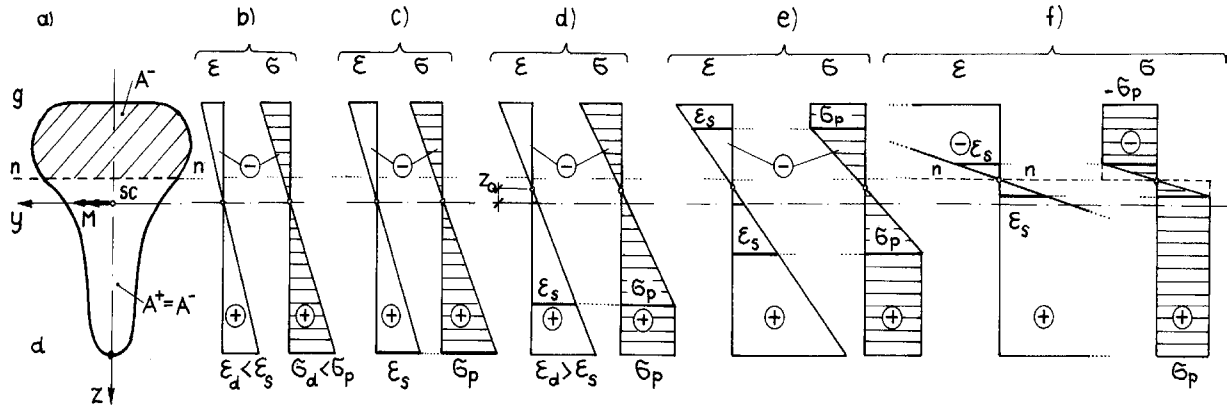
Siła  $N_P$  odpowiada tzw. nośności granicznej przekroju podczas działania siły normalnej. Osiągnięciu nośności granicznej towarzyszy uplastycznienie wszystkich włókien przekroju. Wydłużenia pręta narastają przy stałej wartości siły normalnej; obserwujemy wówczas tzw. płynięcie plastyczne. Na zakończenie należy stwierdzić, że w procesie osiowego rozciągania (ściskania) występują dwa stany:

- sprężysty, gdy  $|\lambda| \leq \lambda_S$ ,  $|N| \leq N_P$ ,
- plastyczny, gdy  $|\lambda| > \lambda_S$ ,  $|N| = N_P$ .

Zależności powyższe są słuszne tylko podczas obciążenia pręta jeszcze nieodkształconego plastycznie. Ponowne obciążenie – podobnie jak na poziomie punktu (por. p. 18.2.1) – przebiega wzdłuż linii przerywanej zaznaczonej na rys. 18.9b, w obecności trwałych odkształceń plastycznych wytworzonych w trakcie pierwszego obciążenia.

### 18.2.3. Zginanie

Działanie momentu zginającego omówimy na przykładzie pręta o jednej osi symetrii (rys. 18.11a). Oś środkową oznaczmy przez  $y, z$ , przy czym oś  $z$  jest osią symetrii przekroju. Proces zginania prześledzimy podczas stopniowego zwiększania momentu  $M = M_y$ .



Rys. 18.11

W obszarze sprężystym, gdy  $|\varepsilon| < \varepsilon_S$ , oś obojętna pokrywa się z osią ciężkości  $y$ . Odpowiednie rozkłady odkształceń i naprężeń przedstawia rys. 18.11b. Gdy największe odkształcenie, występujące w skrajnych dolnych włóknach ( $z_d > z_g$ ), osiągnie wartość  $\varepsilon_S$ , wówczas naprężenie normalne w tych włóknach  $\sigma = \sigma_P$ .

(rys. 18.11c). Odpowiada temu moment zginający  $M = M_S$ :

$$M_S = \sigma_P \cdot W^{(S)}, \quad (18.7)$$

gdzie  $W^{(S)}$  oznacza „sprężysty” wskaźnik wytrzymałości dla dolnych włókien przekroju,  $W^{(S)} = J_y/z_d$ . Powiększanie momentu zginającego powoduje wzrost odkształceń i jednostronne uplastycznienie dolnych włókien przekroju (rys. 18.11d).

Z definicji sił wewnętrznych dla czystego zginania:

$$N = \int_A \sigma \, dA = 0, \quad M_y = \int_A \sigma \cdot z \, dA = M,$$

wynika, że w przekroju o jednej osi symetrii oś obojętna nie pokrywa się już z osią ciężkości ( $\lambda \neq 0$ ). Dalszemu wzrostowi momentu towarzyszy dalszy wzrost odkształceń i zmiana położenia osi obojętnej. Z chwilą, gdy w skrajnych górnych włóknach przekroju odkształcenie osiągnie wartość  $-\varepsilon_S$  (tzn.  $\varepsilon(-z_g) = -\varepsilon_S$ ), rozpoczyna się dwustronne uplastycznienie przekroju (rys. 18.11e). Stan sprężysty występuje wówczas tylko w strefie wewnętrznej przekroju, sąsiadującej z osią obojętną.

Gdy odkształcenia są duże, strefa sprężysta (tzw. jądro sprężyste) obejmuje niewielką część przekroju (rys. 18.11f). Można wówczas przyjąć, że uplastyczniony jest cały przekrój. W strefie ściskanej występują stałe naprężenia o wartości  $-\sigma_P$ , a w strefie rozciąganej naprężenia o wartości  $+\sigma_P$  (por. rys. 18.12). Położenie osi obojętnej ustalamy z warunku, że  $N = 0$ :

$$N = \int_A \sigma \, dA = \int_{A^+} \sigma_P \, dA - \int_{A^-} \sigma_P \, dA = 0.$$

Widzimy zatem, że pole strefy ściskanej  $A^-$  jest równe polu strefy rozciąganej  $A^+ = A/2 = A^-$ . Wynika stąd, że w chwili osiągnięcia nośności granicznej na zginanie oś obojętna dzieli przekrój na połowy. Nośność ta jest największą wartością momentu zginającego, jaka może przenieść przekrój pręta:

$$|M|_{\max} = M_P = \int_A \sigma(z) z \, dA,$$

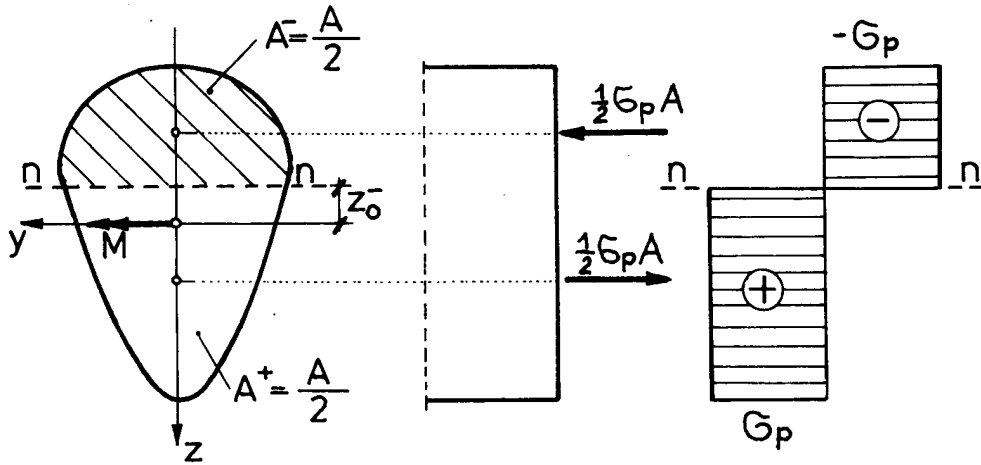
gdzie

$$\sigma(z) = \begin{cases} \sigma_P, & z_0 \leq z \leq z_d, \\ -\sigma_P, & -z_g \leq z \leq z_0, \end{cases}$$

przy czym  $z_0$  oznacza tutaj odległość osi obojętnej od osi ciężkości (por. rys. 18.11g). Wobec tego

$$M_P = \sigma_P \int_{A^+} (z - z_0) dA - \sigma_P \int_{A^-} (z - z_0) dA = \sigma_P [S_n(A^+) - S_n(A^-)].$$

Wielkości  $S_n(A^+)$  i  $S_n(A^-)$  przedstawiają momenty statyczne pól  $A^+$  i  $A^-$  względem osi obojętnej  $n$ , dzielącej na pół całkowite pole przekroju  $A = A^+ + A^-$  (rys. 18.12).



Rys. 18.12

Nietrudno pokazać, że  $S_n(A^+) - S_n(A^-) = 2S_y(A^+)$ , gdzie  $2S_y(A^+)$  oznacza moment statyczny połowy przekroju względem osi ciężkości  $y$ . Stwierdzenie to uzasadnimy rachunkiem:

$$\begin{aligned} S_n(A^+) - S_n(A^-) &= \int_{A^+} (z - z_0) dA - \int_{A^-} (z - z_0) dA = \\ &= \int_{A^+} z dA - z_0 \cdot \int_{A^+} dA - \int_{A^-} z dA + z_0 \cdot \int_{A^-} dA = \int_{A^+} z dA - \int_{A^-} z dA = \\ &= \int_{A^+} z dA - \left( \int_A z dA - \int_{A^+} z dA \right) = 2 \int_{A^+} z dA = 2S_y(A^+). \end{aligned}$$

W podsumowaniu stwierdzamy, że nośność graniczną przekroju podczas zginania określa wzór:

$$M_P = \sigma_P \cdot W^{(P)}, \quad (18.8)$$

gdzie

$$W^{(P)} = S_n(A^+) - S_n(A^-) = 2S_y(A^+). \quad (18.9)$$

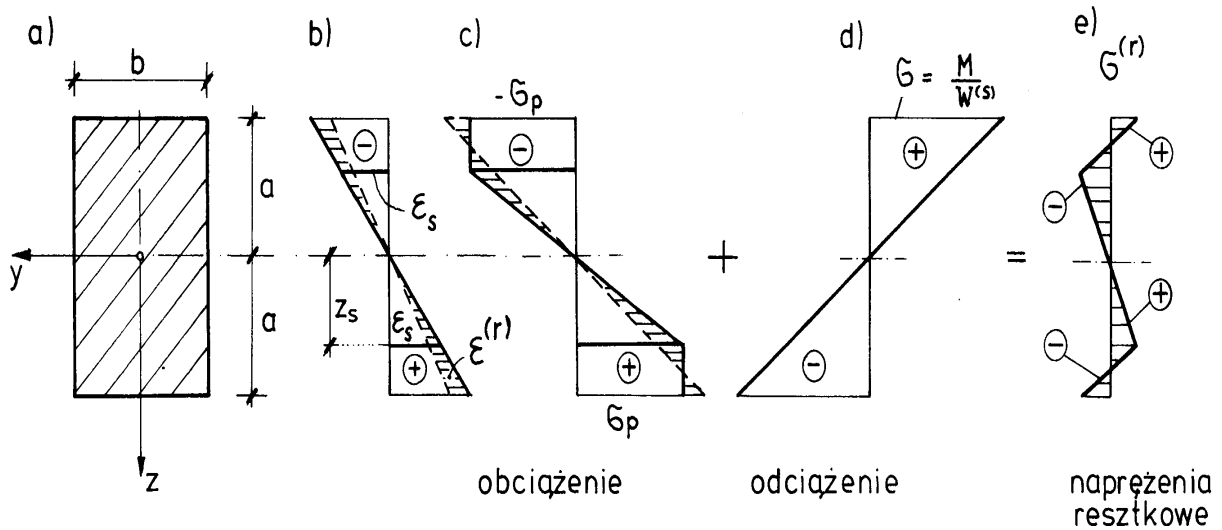
Przez analogię do wzoru (18.7)  $W^{(P)}$  nazywamy plastycznym wskaźnikiem wytrzymałości przekroju, przy czym  $W^{(P)} \geq W^{(S)}$ .

Z chwilą osiągnięcia granicznego momentu plastycznego  $M_P$  obserwujemy narastanie kąta obrotu przekroju przy stałej wartości momentu zginającego ( $M = M_P$ ).

Na podstawie rys. 18.11 stwierdzamy, że w procesie zginania przekroju pręta można wyróżnić trzy stany:

- sprężysty, gdy  $M < M_S$  (rys. 18.11b, c),
- sprężysto-plastyczny (jedno- i dwustronne uplastycznienie, rys. 18.11d, e), gdy  $M_S < M < M_P$ ,
- graniczny, gdy  $M = M_P$  (rys. 18.11f, rys. 18.12).

Uzyskane dotychczas rezultaty zastosujemy do badania obciążenia i odciążenia pręta zginanego o przekroju prostokątnym (rys. 18.13).



Rys. 18.13

W przekrojach bisymetrycznych, a więc i w przekroju prostokątnym, uplastycznienie obu skrajnych włókien następuje równocześnie, gdyż  $\sigma(\epsilon) = -\sigma(-\epsilon)$ , a oś obojętna w procesie zginania pokrywa się zawsze z osią ciężkości. Granicę między stanem sprężystym a sprężysto-plastycznym wyznacza moment  $M_S$ :

$$M_S = \sigma_P \cdot W^{(S)} = \frac{b(2a)^2}{6} \cdot \sigma_P = \frac{2}{3} ba^2 \cdot \sigma_P,$$

któremu odpowiada krzywizna

$$(a) \quad \kappa_S = \frac{M_S}{EJ} = \frac{\sigma_P}{Ea}.$$

Graniczny moment plastyczny

$$M_P = \sigma_P \cdot W^{(P)},$$

gdzie

$$W^{(P)} = 2S_y(A^+) = 2ab \frac{1}{2} a = ba^2 = 1,5 \cdot W^{(S)},$$

skąd

$$M_P = ba^2 \cdot \sigma_P = 1,5 \cdot M_S.$$

Momentowi temu towarzyszy nieskończenie duża krzywizna. Przyjmijmy, że na przekrój działa moment zginający  $M$ , odpowiadający stanowi sprężysto-plastycznemu ( $M_S < M < M_P$ ). Wyznamy teraz zależność między momentem  $M$  a krzywizną  $k$ . Z rysunku 18.13c widzimy, że

$$M = b\sigma_P \left( 2a \cdot \frac{1}{2}a - 2 \cdot \frac{1}{2}z_S \cdot \frac{1}{3}z_S \right) = b\sigma_P \left( a^2 - \frac{1}{3}z_S^2 \right),$$

gdzie

$z_S$  - określa zasięg jądra sprężystego.

Wykorzystując wzory na  $M_S$  i  $M_P$ , zależność powyższą można zapisać jeszcze inaczej:

$$(b) \quad M = M_P \cdot \left[ 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{z_S}{a} \right)^2 \right] = M_S \cdot \left[ 1,5 - \frac{1}{2} \left( \frac{z_S}{a} \right)^2 \right].$$

Z prawa płaskich przekrojów wynika zależność:

$$k \cdot z_S = \varepsilon_S = \frac{\sigma_P}{E},$$

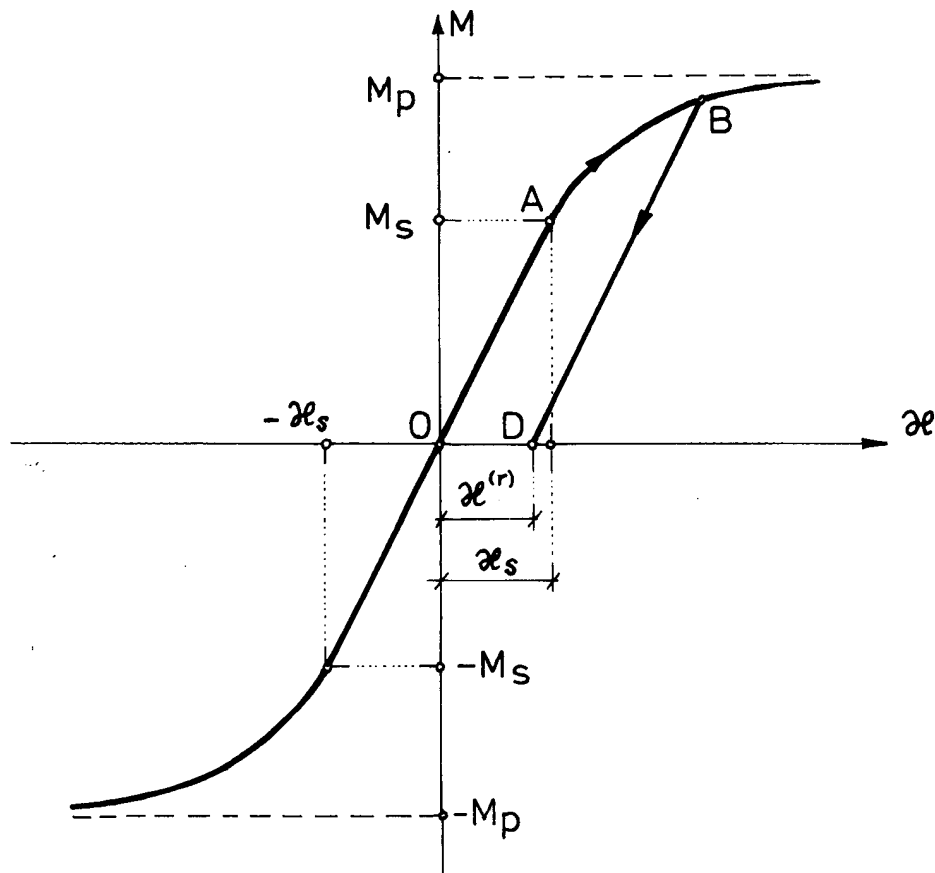
skąd po wykorzystaniu równania (a):

$$(c) \quad z_S = \frac{\sigma_P}{Ek} = \frac{k_S \cdot a}{k}.$$

Z zależności (b) i (c) otrzymujemy poszukiwany związek między momentem a krzywizną w obszarze sprężysto-plastycznym:

$$(d) \quad M = \begin{cases} kEJ, & |k| \leq |k_S|, \\ M_P \cdot \left[ 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{k_S}{k} \right)^2 \right] \operatorname{sgn}(k), & |k| \geq |k_S|. \end{cases}$$

Obrazem zależności (d) jest rys. 18.14. Na rysunku tym linia  $OAB$  odpowiada obciążeniu, a prosta  $BD$  – odciążeniu. Odcinek  $CD$  przedstawia krzywiznę reszkową (trwałą)  $k^{(r)}$ , pozostającą po usunięciu momentu zginającego. Bardzo istotne jest jednak to, że po odciążeniu w przekroju pozostają również samorównoważące się naprężenia reszkowe (residualne)  $\sigma^{(r)}$ . Naprężenia te pozostają zatem w równowadze z zerowym obciążeniem. Wyznaczenie naprężeń reszkowych w tym przypadku nie jest trudne. Odciążenie, jak wiemy, ma charakter czysto sprężysty. Po obciążeniu momentem  $M$  wykres naprężeń jest taki jak na rys. 18.13c. Odciążenie odpowiada dodaniu liniowego wykresu naprężeń spowodowanego działaniem momentu przeciwnego znaku,  $-M$  (rys. 18.13d). W efekcie pozostają naprężenia reszkowe przedstawione na rys. 18.13e. Podczas ponownego obciążenia przekroju oprócz odkształceń trwałych trzeba jeszcze uwzględnić naprężenia residualne. Aktualny stan naprężenia zależy zatem od historii obciążenia. Naszkicowane tutaj zjawiska występujące w stanie sprężysto-plastycznym przy obciążeniach zmiennych są przedmiotem badań tzw. teorii przystosowania konstrukcji. Istotę tych problemów omówimy w p. 18.5.



Rys. 18.14

Rozważmy teraz zginanie poprzeczne belek sprężysto-plastycznych. Założymy przy tym, że wpływ sił poprzecznych (naprężeń stycznych) na uplastycznienie przekroju jest pomijalnie mały. Przeanalizujemy belkę wspornikową o przekroju prostokątnym, obciążoną pionową siłą skupioną  $P$  usytuowaną na końcu swobodnym (rys. 18.15a).

Maksymalny moment zginający wynosi:

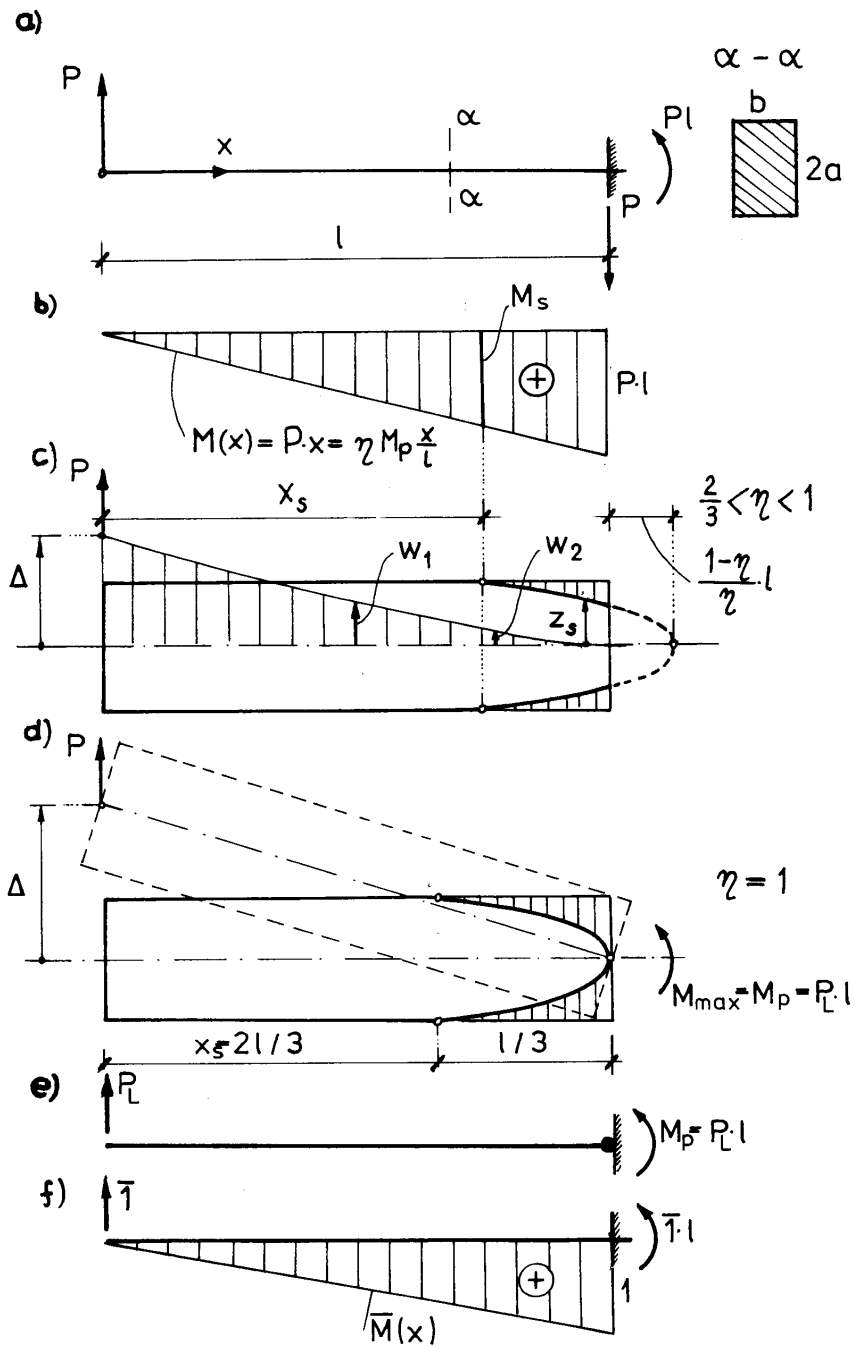
$$M_{\max} = P \cdot l = \eta(P) \cdot M_P,$$

przy czym dla zakresu sprężysto-plastycznego musi być spełniona nierówność:

$$\frac{2}{3} < \eta(P) < 1, \quad \text{gdzie} \quad \eta(P) = P \cdot l / M_P.$$

Równanie momentu zginającego można zapisać następująco:

$$M(x) = P \cdot x = \eta(P) \cdot M_P \frac{x}{l}.$$



Rys. 18.15

Gdy  $\eta < 2/3$ , w każdym punkcie belki występuje jeszcze stan sprężysty i  $M_{\max} < M_S$ , natomiast w stanie granicznym, gdy  $\eta = 1$ ,  $M_{\max} = M_P$ . Dla pośrednich wartości  $\eta$  uplastycznienie skrajnych włókien zachodzi w przekroju  $x = x_S$ . Wartość  $x_S$  wyznaczymy z warunku, że  $M(x_S) = M_S = 2M_P/3$ :

$$M(x_S) = P \cdot x_S = \eta \cdot M_P \cdot \frac{x_S}{l} = \frac{2}{3} M_P,$$

skąd

$$x_S = \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{\eta} = \frac{2}{3} \frac{M_P}{P}.$$

W przekrojach odpowiadających odciętej  $x > x_S$  na podstawie równania (b) otrzymujemy:

$$M(x) = \eta \cdot M_P \frac{x}{l} = M_P \left[ 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{z_S}{a} \right)^2 \right],$$

zatem

$$x = \frac{l}{\eta} \cdot \left[ 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{z_S}{a} \right)^2 \right].$$

Zależność ta jest równaniem tzw. frontu plastycznego, czyli granicy między strefą plastyczną a jądrem sprężystym. Równanie to przedstawia parabolę drugiego stopnia (rys. 18.15c), której wierzchołek leży poza belką w odległości  $l/\eta$  od swobodnego końca belki. W miarę powiększania siły  $P$  rośnie również współczynnik  $\eta$ . Gdy  $\eta \rightarrow 1$ , tzn.  $(1/\eta) \rightarrow 1$ , to w przekroju utwierdzenia osiągamy nośność graniczną. Krzywizna w tym przekroju dąży do nieskończoności i rozpoczyna się jednostajny ruch obrotowy całej belki wokół osi obojętnej w przekroju utwierdzenia; belka przekształca się w mechanizm (rys. 18.15d). Obciążenie graniczne towarzyszące osiągnięciu pełnego uplastycznienia przekroju  $P = P_L = M_P/l$ . Jest to największe obciążenie  $P$ , jakie może przenieść belka.

Obliczmy jeszcze ugięcie belki w stanie sprężysto-plastycznym  $((2/3) < \eta < 1)$ . Do tego celu służy wzór (d). Dla małych wartości ugięć  $w(x)$  otrzymujemy:

$$k(x) = \frac{d^2 w}{dx^2} = \begin{cases} \frac{M(x)}{EJ} = \frac{\eta \cdot M_P}{EJl} \cdot x = \frac{3}{2} \cdot k_S \eta \frac{x}{l}, & x \leq x_S, \\ k_S \sqrt{\frac{M_P}{3[M_P - M(x)]}} = k_S \sqrt{\frac{1}{3[1 - \eta \cdot (x/l)]}}, & x_S \leq x \leq l, \end{cases}$$

przy czym

$$k_S = \frac{M_S}{EJ} = \frac{2}{3} \frac{M_P}{EJ}.$$

Rozwiązanie ogólne tego równania różniczkowego jest następujące:

$$w(x) = \begin{cases} w_1(x), & 0 \leq x \leq x_S \\ w_2(x), & x_S \leq x \leq l, \end{cases}$$

gdzie

$$w_1(x) = -\frac{1}{4} k_S \frac{\eta}{l} x^3 + C_1 x + D_1,$$

$$w_2(x) = \frac{4}{3\sqrt{3}} k_S \left( \frac{l}{\eta} \right)^2 \left( 1 - \eta \cdot \frac{x}{l} \right)^{3/2} + C_2 x + D_2.$$

Stałe  $C_2$  i  $D_2$  wyznacza się z warunków brzegowych:  $w_2(l) = 0$ ;  $w_2'(l) = 0$ , a stałe  $C_1$  i  $D_1$  – z warunków ciągłości:  $w_1(x_S) = w_2(x_S)$ ;  $w_1'(x_S) = w_2'(x_S)$ . Kształt linii ugięcia obrazuje rys. 18.15c. Interesujący jest wykres zależności między maksymalnym ugięciem belki  $\Delta = w(0)$  a siłą  $P$ . Zależność tę ustalimy za pomocą równania pracy wirtualnej, przyjąwszy, że statycznie dopuszczalne pole sił wirtualnych odpowiada obciążeniu swobodnemu końca belki siłą skupioną  $\bar{P} = \bar{1}$  (rys. 18.15e, f):

$$\bar{1} \cdot \Delta = \int_0^l \bar{M}(x) \cdot k(x) dx,$$

gdzie

$$\bar{M}(x) = \bar{1} \cdot x.$$

Uwzględnivszy wzór na krzywiznę rzeczywistą  $k(x)$  otrzymujemy:

$$\Delta = \int_0^{x_S} x \frac{3}{2} k_S \eta \frac{x}{l} dx + \int_{x_S}^l x \frac{k_S}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{\eta}{l} x\right)^{-\frac{1}{2}} dx = k_S \left(\frac{l}{\eta}\right)^2 \left[ \frac{4}{27} + \left( \frac{16}{27} - \frac{2(2+\eta)}{3\sqrt{3}} \sqrt{1-\eta} \right) \right],$$

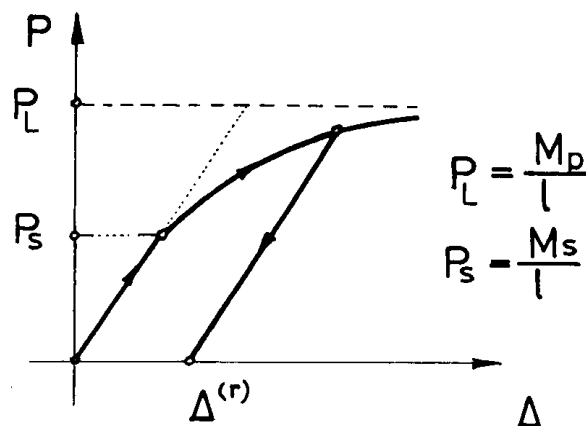
przy czym mnożnik  $4/27$  oznacza udział ugięcia sprężystej części belki ( $0 \leq x \leq x_S$ ), a wartość w nawiasie okrągłym – ugięcia części sprężysto-plastycznej ( $x_S \leq x \leq l$ ). Zależność  $\Delta(P)$  można ostatecznie zapisać, jak następuje:

$$\Delta(P) = \begin{cases} \frac{Pl^3}{3EJ}, & Pl \leq M_S = \sigma_P \cdot W_S \\ \frac{Pl^3}{EJ} \cdot \frac{1}{\eta^2} \left[ \frac{20}{27} - \frac{2(2+\eta)}{3\sqrt{3}} \sqrt{1-\eta} \right], & M_S \leq Pl \leq M_P, \end{cases}$$

gdzie

$$\eta = \eta(P) = \frac{Pl}{M_P}.$$

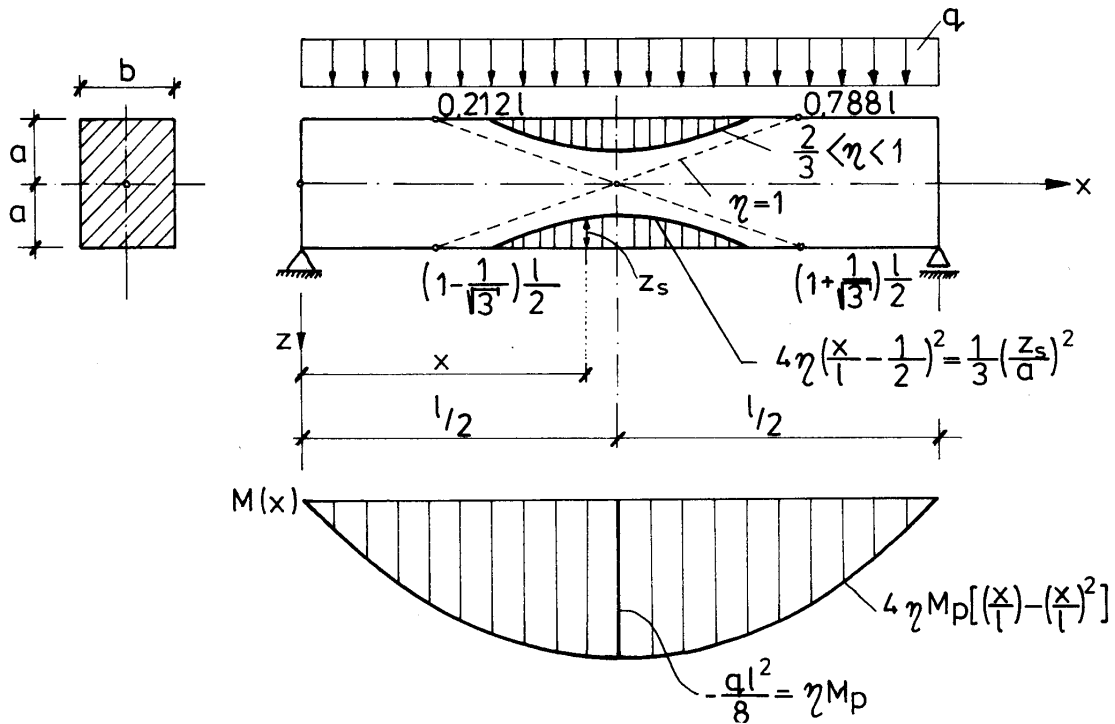
Wykres funkcji  $\Delta(P)$  wraz z linią odciążenia podano na rys. 18.16. Na rysunku zauważamy, że osiągnięcie nośności granicznej wiąże się z dosyć znacznymi ugięciami. Okoliczność ta sprawia, że podczas projektowania na nośność graniczną sprawdzenie sztywności konstrukcji jest szczególnie ważne.



Rys. 18.16

Gdy usuniemy obciążenie w zakresie sprężysto-plastycznym, nie osiągając nośności granicznej ( $(2/3) < \eta < 1$ ), belka wykaże trwałe ugięcie resztkowe  $\Delta^{(r)}$ , a w przekrojach obszaru sprężysto-plastycznego ( $x_S < x \leq l$ ) pozostaną również naprężenia resztkowe  $\sigma^{(r)}$ . Jeżeli badany układ jest statycznie wyznaczalny, to naprężenia te są samorównoważące się. Inaczej jest na ogół w konstrukcjach statycznie niewyznaczalnych, w których po odciążeniu pozostają resztkowe siły wewnętrzne będące w równowadze z zerowym obciążeniem zewnętrznym. Ilustracją tego może być wykres momentów resztkowych przedstawiony na rys. 18.38f.

Powracając do problemu frontu plastycznego, warto odnotować, że moduł sprężystości  $E$  ma tylko wpływ na wartość ugięcia, natomiast nie ma wpływu na przebieg frontu plastycznego. Postać równania frontu plastycznego zależy w istotny sposób od schematu statycznego belki oraz charakteru obciążenia. W przypadku belki swobodnie podpartej o przekroju prostokątnym i obciążonej równomiernie równanie frontu plastycznego jest hiperbolą. Asymptoty hiperboli odpowiadają osiągnięciu nośności granicznej. Szczegóły tego przypadku podano na rys. 18.17.



Rys. 18.17

#### 18.2.4. Zginanie ze ścinaniem

W omawianym przypadku na płaszczyźnie przekroju pręta oprócz naprężeń normalnych  $\sigma_x$  występują naprężenia styczne  $\tau_{xz}$ . Rozgraniczenie stanów sprężystego i plastycznego zależy zatem od przyjętego warunku plastyczności. W płaskim stanie naprężenia, gdy  $\sigma_x = \sigma \neq 0$ ,  $\sigma_y = 0$  oraz  $\tau_{xz} = \tau \neq 0$ , stosownie do warunku *Treski-Guesta* (TG) stany sprężyste określa nierówność:

$$\sigma_{\text{red}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} < \sigma_P, \quad (18.10)$$

a dla warunku *Hubera-Misesa-Hencky'ego* (HMH):

$$\sigma_{\text{red}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} < \sigma_P. \quad (18.11)$$

Jeżeli charakterystykę  $\sigma(\varepsilon)$  z rys. 18.9 uogólnimy w ten sposób, że  $\sigma$  oznacza naprężenie zredukowane, a  $\varepsilon$  – odkształcenie zredukowane, to dla czystego ścinania obowiązuje związek fizyczny:

$$\tau(\gamma) = \begin{cases} G\gamma, & |\gamma| \leq \gamma_S \\ \tau_P \cdot \text{sgn}(\gamma), & |\gamma| \geq \gamma_S, \end{cases} \quad (18.12)$$

gdzie  $G$  jest modułem *Kirchhoffa*,  $\gamma$  – całkowitym kątem odkształcenia postaciowego, a

$$\gamma_S = \frac{\tau_P}{G},$$

przy czym stosownie do wzorów (18.10) i (18.11):

$$\tau_P = \begin{cases} \frac{1}{2}\sigma_P & \text{– dla warunku TG,} \\ \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_P & \text{– dla warunku HMH.} \end{cases} \quad (18.13)$$

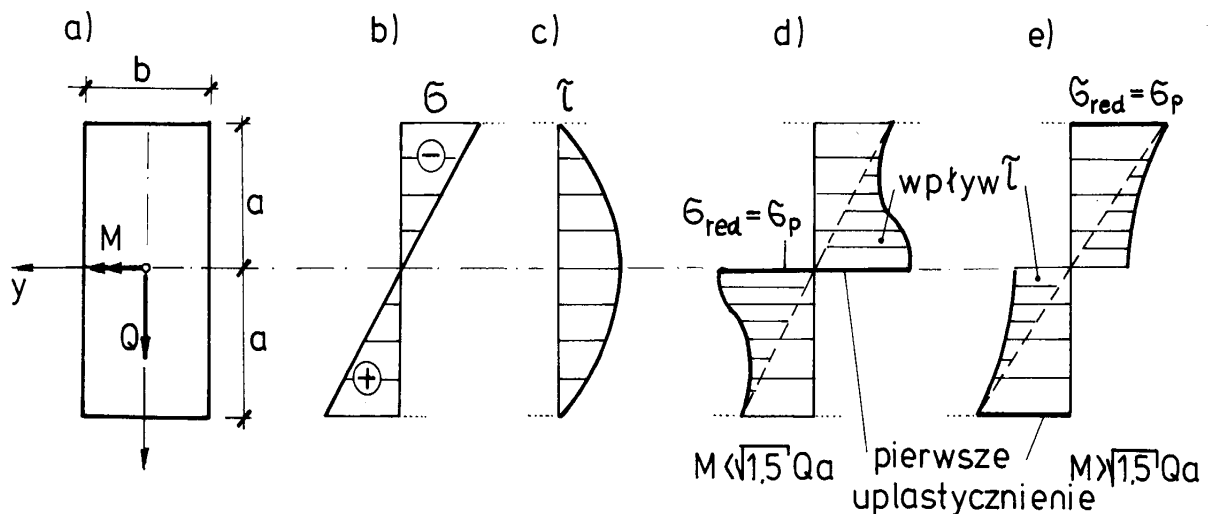
Siłę poprzeczną – jak wiadomo – towarzyszy zawsze zmiana momentu zginającego. Dlatego udział siły poprzecznej w procesie uplastycznienia przekroju rozważa się zazwyczaj łącznie z działaniem momentu zginającego. Przypadek ten jest niewątpliwie najtrudniejszy, i to głównie z tego powodu, że ściśle określenie naprężeń w danym przekroju wymaga analizy naprężeń w całym pręcie, gdyż stan naprężenia na długości pręta nie jest jednorodny. Trzeba jeszcze dodać, że trudność samą w sobie stanowi wyznaczenie naprężeń sprężysto-plastycznych przy czystym ścinaniu, wywołanym przez wyłączone działanie siły poprzecznej  $Q$ . Dalsze komplikacje wynikają z faktu, że nie obowiązuje już założenie płaskich przekrojów. Wszystkie wyżej wymienione okoliczności sprawiają że nawet dla przekroju prostokątnego dysponujemy tylko rozwiązaniami przybliżonymi.

Na wstępie omówimy obciążenia powodujące pierwsze uplastycznienie przekroju prostokątnego. Założmy, że obowiązuje warunek plastyczności  $HMH$  (18.11). Naprężenia normalne przy zginaniu poprzecznym  $\sigma$  i styczne  $\tau$  dla stanu czysto sprężystego określają wzory:

$$\sigma = \frac{M}{J} z, \quad \tau = \frac{3Q}{2A} \left[ 1 - \left( \frac{z}{a} \right)^2 \right].$$

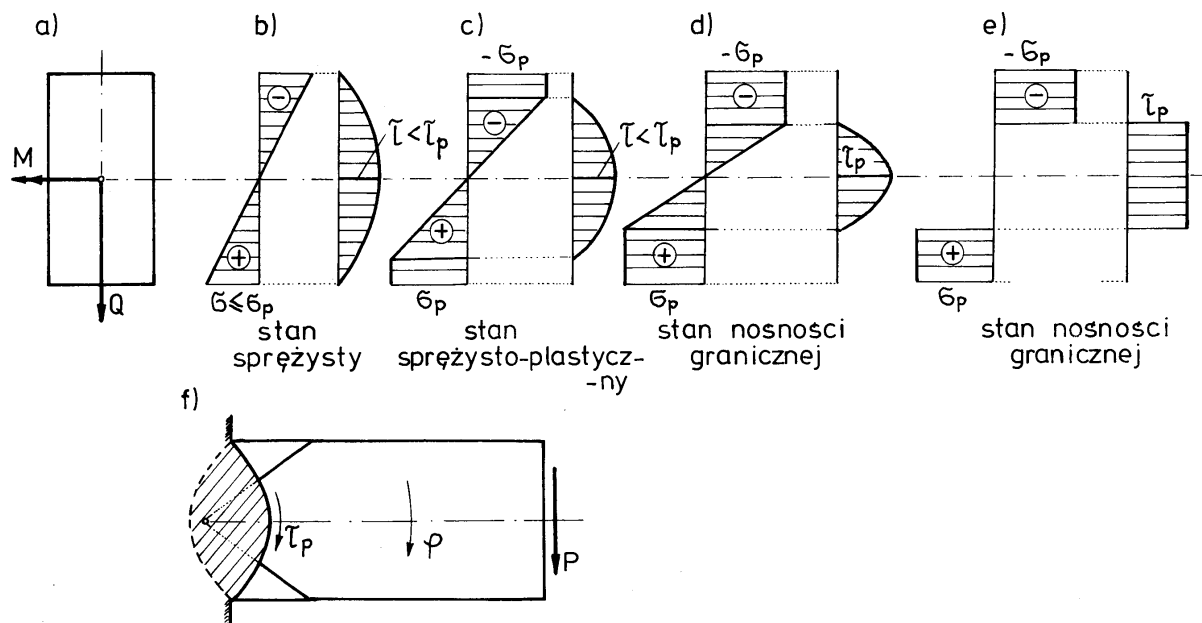
Wobec tego stan sprężysty zachodzi wówczas, gdy

$$\sigma_{\text{red}} = \sqrt{\left( \frac{M}{J} z \right)^2 + 3 \left( \frac{3Q}{2A} \right)^2 \left[ 1 - \left( \frac{z}{a} \right)^2 \right]^2} < \sigma_p.$$



Rys. 18.18

Szczegółowa analiza tej nierówności prowadzi do wniosku, że występują dwa istotne przypadki podane na rys. 18.18d, e. Dla bardzo dużych sił poprzecznych i niewielkich momentów zginających pierwsze uplastycznienie zachodzi we włóknach wewnętrznych leżących na osi obojętnej (rys. 18.18d). Gdy na całej długości pręta  $M < \sqrt{1,5} Qa$  oraz  $Q = \text{const}$ , pierwsze uplastycznienie warstw wewnętrznych powoduje wzajemny poślizg na granicy tych warstw i jednoczesne osiągnięcie nośności granicznej. Warunki takie występują niezmiernie rzadko, i to w belkach bardzo krótkich i bardzo obciążonych.



Rys. 18.19

Omówiony przypadek dowodzi słuszności stwierdzenia, że procesy zginania sprężysto-plastycznego z uwzględnieniem wpływu sił poprzecznych mają charakter globalny, zależą bowiem od stanu naprężeń w całej belce. Drugi przypadek – znacznie częściej występujący w praktyce – odpowiada sytuacji podanej na rys. 18.19, w której moment zginający jest dostatecznie duży. Pierwsze uplastycznienie występuje wówczas w skrajnych zewnętrznych włóknach pręta. Dalsze powiększanie obciążenia powoduje uplastycznienie włókien leżących bliżej osi przekroju. Umowny stan nośności granicznej osiągamy wtedy, gdy naprężenia styczne na osi pręta osiągną wartość  $\tau_p$  (rys. 18.19d). Umowność tego stanu polega znowu na tym, że wyczerpania nośności nie można rozpatrywać tylko na poziomie przekroju, gdyż zależy on również od stanu panującego w innych przekrojach belki. Potwierdzeniem tego są badania teoretyczne i doświadczalne [19], które wykazały np., że osiągnięciu nośności granicznej szerokiej belki wspornikowej obciążonej siłą skupioną towarzyszy poślizg na krzywoliniowej krawędzi sprężystego jądra w okolicy utwierdzenia (rys. 18.19f). Naprężenia normalne  $\sigma$  i styczne  $\tau$  przedstawione na rys. 18.19c, d spełniają warunki statycznej dopuszczalności, czyli spełniają równania różniczkowe równowagi oraz nie naruszają warunku plastyczności ( $\sigma_{red} \leq \sigma_p$ ). Charakterystyczne jest to, że naprężenia styczne są przejmowane tylko przez wewnętrzną, nie uplastycznioną część przekroju, a ich rozkład opisuje znany wzór:

$$\tau = \frac{QS'}{b(z)J'},$$

gdzie  $S'$  oraz  $J'$  oznaczają odpowiednio moment statyczny i moment bezwładności sprężystej części przekroju. W celu ujednolicenia sposobu podejścia przyjmuje się czasami, że rozkład naprężeń normalnych i stycznych w chwili osiągnięcia nośności granicznej odpowiada rys. 18.19e. Rozkład naprężeń stycznych wykazuje jednak nieciągłość, która jest statycznie niedopuszczalna.

### 18.2.5. Skręcanie

W stanie sprężystym problem skręcania swobodnego opisuje równanie różniczkowe cząstkowe funkcji naprężeń  $F(y,z)$  (por. p. 12):

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = -2G\Theta, \quad (18.14)$$

przy czym na konturze przekroju pręta funkcja naprężeń musi spełniać warunek brzegowy:

$$F_c(y, z) = 0. \quad (18.15)$$

Warunek (18.15) wynika z wymagania, by pobocznica pręta była wolna od naprężeń. Naprężenia styczne  $\tau_{xy}$  i  $\tau_{xz}$  są powiązane z funkcją naprężeń następującymi zależnościami:

$$\tau_{xy} = \frac{\partial F}{\partial z}, \quad \tau_{xz} = -\frac{\partial F}{\partial y}. \quad (18.16)$$

Zależności te gwarantują spełnienie różniczkowych równań równowagi wewnętrznej. Wartość wypadkowego naprężenia stycznego ( $\tau_x = \tau_{xy} + \tau_{xz}$ ) wynosi zatem:

$$\tau_x = |\tau_x| = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2} = |\mathbf{grad} F|. \quad (18.17)$$

Naprężenie  $\tau_x$  w danym punkcie  $(y, z)$  jest więc równe tangensowi największego kąta nachylenia stycznej do powierzchni  $F(y, z)$ . Wartość momentu skręcającego, obliczona z równań statyki, odpowiada podwójnej objętości bryły ograniczonej powierzchnią  $F(y, z)$  i płaszczyzną  $F = 0$ :

$$\mathfrak{M} = 2 \int_A F(y, z) dA. \quad (18.18)$$

W obszarze odkształceń plastycznych oraz na granicy obszarów sprężystego i plastycznego wypadkowe naprężenie styczne równa się granicy plastyczności przy czystym ścinaniu ( $\tau_x = \tau_P$ ). Posługując się nadal koncepcją funkcji naprężeń warunek ten, stosownie do zależności (18.17), prowadzi do nieliniowego równania różniczkowego:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 = \tau_P^2. \quad (18.19)$$

W obszarze plastycznym słuszne są zatem wszystkie podane wyżej zależności, obowiązujące również w obszarze sprężystym, z tą tylko różnicą, że miejsce równania (18.14) zajmuje równanie (18.19). Równanie (18.19) można zapisać w postaci:

$$|\mathbf{grad} F| = \tau_P = \text{const}. \quad (18.19a)$$

Oznacza to, że w obszarze plastycznym kąt nachylenia stycznej do powierzchni funkcji naprężeń  $F(y, z)$  w każdym punkcie tego obszaru jest stały. Równanie (18.19a) wykazuje analogię do równania opisującego wzgórze usypane z idealnie sypanego piasku:

$$|\mathbf{grad} f| = \text{tg} \mu = \text{const}, \quad (18.20)$$

przy czym  $f = f(y, z)$  oznacza rzędne wzgórze piasku, a  $\mu$  jest kątem stoku naturalnego. Gdy przekrój pręta jest w pełni uplastyczniony, rzędne funkcji naprężeń  $F(y, z)$  odpowiadają rzędnym wzgórze usypanego z piasku na figurze płaskiej o kształcie badanego przekroju. **Analogię wzgórze piaskowego** zauważył *Nadai* w 1923 roku. Analogię tę – podobnie jak analogię błonową w stanach sprężystych – wykorzystuje się w badaniach doświadczalnych mających na celu ustalenie nośności granicznej przekrojów o skomplikowanych kształtach.

W stanach sprężysto-plastycznych obowiązuje tzw. **analogia dachu**. Jest to połączenie analogii błonowej z analogią wzgórze piaskowego. Analogię dachu wyobrażamy sobie następująco. Nad konturem rozpinamy przezroczysty „dach” o kształcie wynikającym z analogii wzgórze piaskowego. Na tym samym konturze wewnątrz dachu rozpinamy błonę i poddajemy ją wewnętrznemu ciśnieniu. Początkowo błona nie będzie stykała się z dachem, co odpowiada skręcaniu sprężystemu. Wzrost ciśnienia spowoduje, że w pewnych obszarach (tj. obszarach plastycznych) błona będzie przylegała do dachu. Przyleganie błony na całej powierzchni dachu odpowiada pełnemu uplastycznieniu pręta, czyli osiągnięciu nośności granicznej na skręcanie. Geometryczny sens opisanych analogii dla skręcania pręta o przekroju kołowym ilustruje rys. 18.20.

Stan sprężysty obserwujemy, gdy w skrajnych włóknach zewnętrznych naprężenie  $\tau_x$  nie przekracza wartości  $\tau_P$ , tzn. gdy

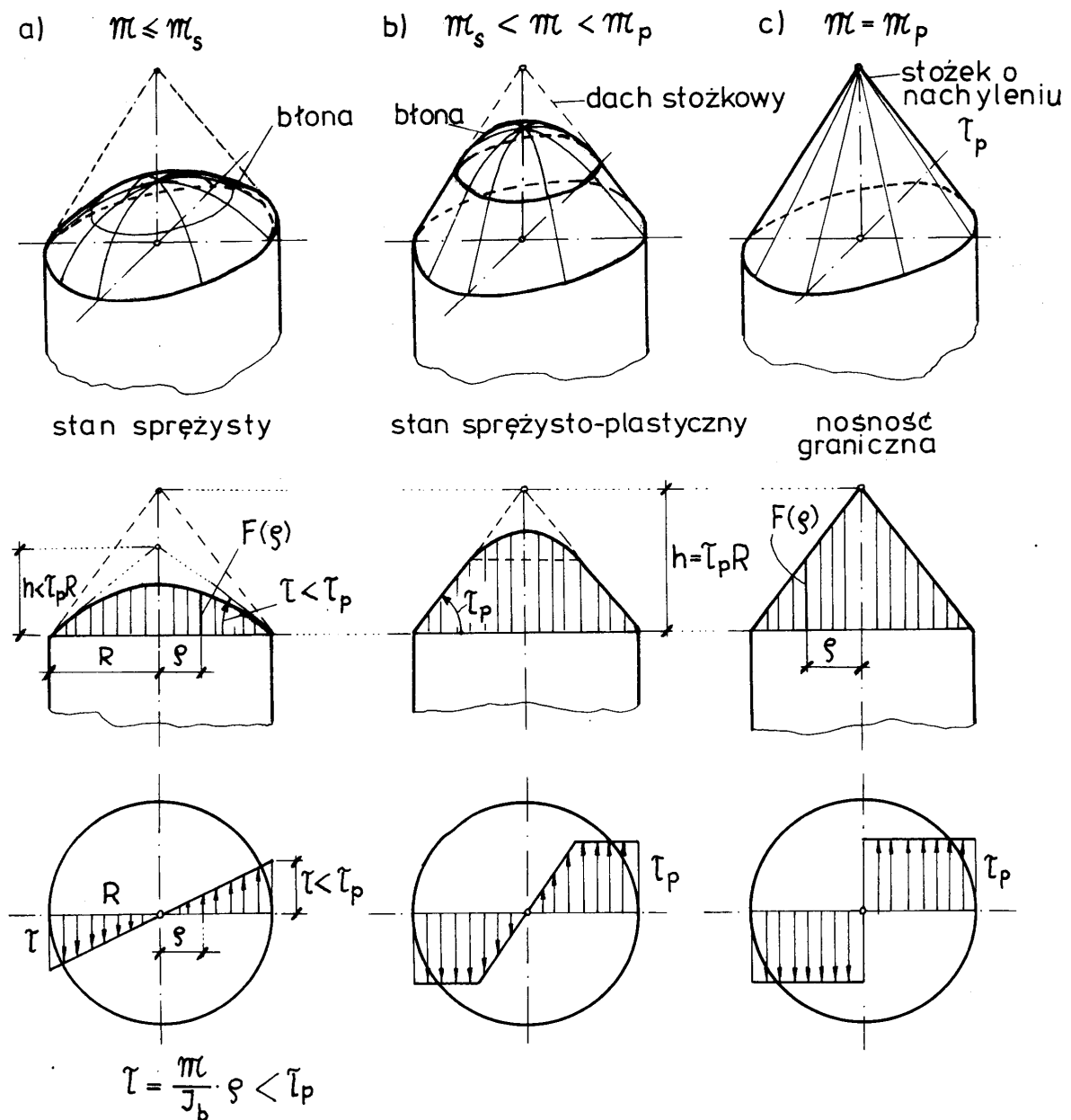
$$\mathfrak{M} \leq \mathfrak{M}_S = \tau_P \cdot W_S^{(s)},$$

przy czym  $W_S^{(s)} = J_b / R = \pi R^3 / 2$  i oznacza tu tzw. sprężysty wskaźnik wytrzymałości na skręcanie.

Graniczna wartość momentu plastycznego odpowiada podwójnej objętości wzgórza piaskowego, które dla przekroju kołowego ma kształt stożka o nachyleniu tworzących wynoszącym  $\tau_P$ :

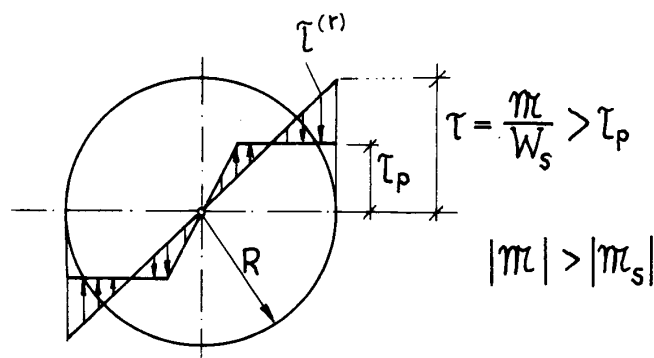
$$\mathfrak{M}_P = \frac{2}{3} \pi R^2 \cdot h = \frac{2}{3} \pi R^2 (R \tau_P) = \tau_P \cdot W_P^{(s)} = \frac{4}{3} \mathfrak{M}_S,$$

gdzie  $W_P^{(s)} = 2\pi R^3 / 3 = 4W_S^{(s)} / 3$  i oznacza tzw. plastyczny wskaźnik wytrzymałości na skręcanie.



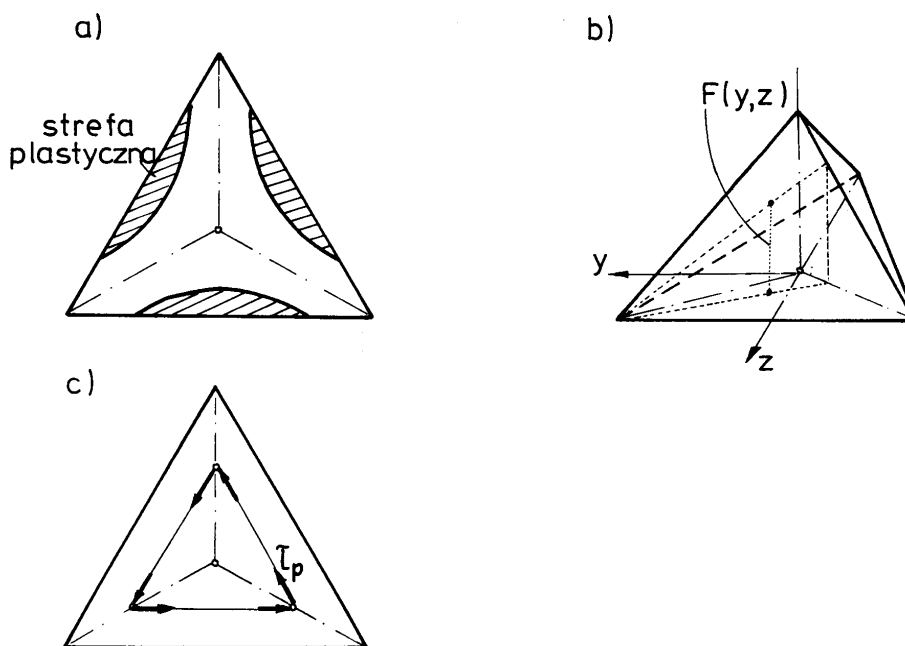
Rys. 18.20

W stanie sprężysto-plastycznym wykres naprężeń stycznych jest linią łamaną (por. rys. 18.20b). Po odciążeniu pręta powstają naprężenia resztkowe o przebiegu przedstawionym na rys. 18.21.



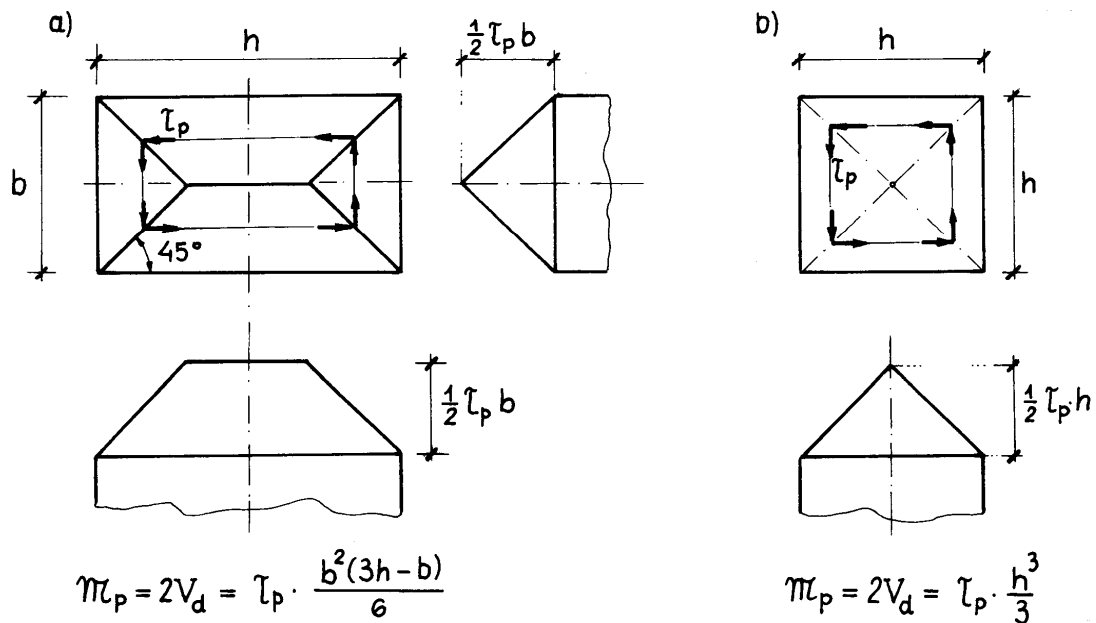
Rys. 18.21

Omówiony wyżej sposób postępowania można wykorzystać także do dla innych kształtów przekroju. Rysunek 18.22 ilustruje skręcanie pręta o przekroju trójkątnym. Zakres stref plastycznych przedstawia rys. 18.22a. W chwili osiągnięcia nośności granicznej wzgórze piaskowe ma kształt ostrosłupa o podstawie trójkątnej (rys. 18.22b). Charakterystyczne są tutaj linie nieciągłości naprężeń stycznych, wzdłuż których naprężenia wypadkowe  $\tau_x$  gwałtownie zmieniają kierunek (rys. 18.22c).



Rys. 18.22

Kształty funkcji naprężeń  $F(y, z)$  w chwili osiągnięcia nośności granicznej dla przekrojów prostokątnego i kwadratowego ilustruje rys. 18.23.

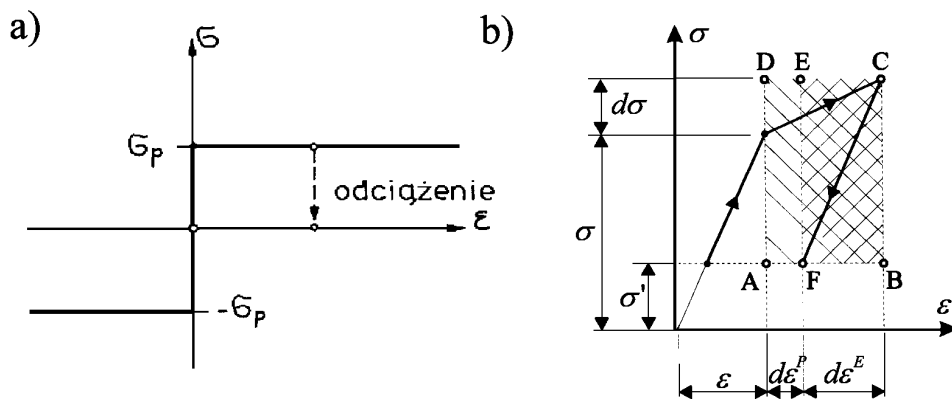


Rys. 18.23

### 18.3. PODSTAWY TEORII KONSTRUKCJI PLASTYCZNYCH. NOŚNOŚĆ GRANICZNA KONSTRUKCJI

#### 18.3.1. Podstawy teorii plastyczności

Charakterystykę materiału sztywno-idealnie plastycznego w przypadku jednoosiowym przedstawia rysunek 18.24a.



Rys. 18.24

Materiał ten nie wykazuje wzmocnienia, a jedyną przyczyną deformacji są odkształcenia plastyczne. Modelowi sztywno-plastycznemu poświęcono wiele uwagi i uzyskano bardzo użyteczne rezultaty, wykorzystywane głównie w ocenie nośności granicznej elementów i układów konstrukcyjnych. Jednakże, posługując się tym modelem, warto pamiętać o tym, że niemal każdy materiał wykazuje w rzeczywistości pewne cechy sprężyste. Koncepcja materiału idealnie plastycznego niesie ze sobą nie tylko pewne uproszczenia, ale również pewne subtelności pojęciowe. Problematyka materiałów i konstrukcji plastycznych jest obszernie omówiona w kilku polskich monografiach (por. [40], [41], [45], [56]).

Na wstępie przedstawimy pewne ogólne informacje dotyczące teorii ciał idealnie plastycznych. Do opisu zachowania się materiału plastycznego wprowadza się naprężenia  $\sigma_{ij}$ , prędkości (przyrosty) przemieszczeń  $\dot{u}_i$  oraz prędkości odkształceń plastycznych  $\dot{\epsilon}_{ij}^P$ , występujące podczas płynięcia plastycznego.

Budowa ogólnej teorii ciał idealnie plastycznych opiera się na definicji płynięcia plastycznego jako procesu, w którym **naprężenia nie zależą od skali czasu**. Oznacza to np., że w czasie prób jednoosiowego rozciągania przeprowadzanych z różnymi prędkościami odkształceń naprężenia są takie same i równają się granicy plastyczności. W języku matematyki niezależność naprężeń od skali czasu odpowiada przyjęciu, że naprężenia są jednorodną funkcją stopnia zero względem prędkości odkształceń plastycznych. Z teorii funkcji jednorodnych wynika przede wszystkim istnienie warunku plastyczności jako pewnej funkcji skalarnej wiążącej naprężenia,  $F(\boldsymbol{\sigma}) = 0$ . Oznacza to, że pojawienie się deformacji plastycznych jest uwarunkowane spełnieniem równania  $F(\boldsymbol{\sigma}) = 0$ . Jeżeli ponadto zaakceptujemy założenie, że

$$(a) \quad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \dot{\epsilon}_{kl}^P} = \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \dot{\epsilon}_{ij}^P},$$

które wydaje się oczywiste przynajmniej dla materiałów izotropowych, to można wykazać, że prędkości odkształceń plastycznych wyraża tzw. stowarzyszone prawo płynięcia:

$$(b) \quad \dot{\epsilon}_{ij}^P = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}},$$

gdzie  $\dot{\lambda}$  jest pewnym mnożnikiem skalarnym. Zależność (b) wskazuje, że wektor prędkości odkształceń jest prostopadły do powierzchni opisanej przez warunek plastyczności. „Stowarzyszenie” polega na tym, że rolę potencjału dla prędkości odkształceń plastycznych  $\dot{\epsilon}$  odgrywa tutaj funkcja  $F(\boldsymbol{\sigma})$ . Równanie (b) wiąże naprężenia z prędkościami odkształceń, ma zatem sens równania fizycznego dla ciał plastycznych.

Podstawową własnością procesów plastycznego płynięcia jest dyssypacja energii odkształceń plastycznych. Zakłada się więc, że rozpraszana moc na jednostkę objętości  $\dot{d}$  musi być nieujemna:

$$(c) \quad \dot{d} = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^P \geq 0.$$

Jeżeli ponadto materiał idealnie plastyczny jest nieściśliwy (tzn.  $\dot{\epsilon}_{kk}^P = 0$ ), a pomiędzy naprężeniami i odkształceniami występuje związek tensorowo-liniowy, to na podstawie nierówności (c) można łatwo wykazać, że mnożnik skalarny  $\dot{\lambda} \geq 0$ .

Z nieujemności dyssypacji oraz prawa płynięcia wnioskujemy ponadto, że obszar ograniczony warunkiem plastyczności musi być gwiaździsty, tzn. promień-wektor wyprowadzony z początku układu w przestrzeni naprężeń może tylko jeden raz przecinać powierzchnię plastyczności.

Dalsze ograniczenie na warunek plastyczności wynika z tzw. **postulatu Druckera** (1950 rok). Postulat ten głosi, że przyrost pracy wykonanej w cyklu naprężeniowym na nieskończenie małym przyroście odkształcenia jest nieujemny. Sens postulatu Druckera dla jednoosiowego przypadku obciążenia i odciążenia materiału sprężysto-plastycznego ze wzmocnieniem liniowym objaśnimy na wykresie  $\sigma$ – $\epsilon$  (por. rys. 18.24b, [15]). Naprężenie  $\sigma$  odpowiada punktowi powierzchni plastyczności, tzn.  $F(\sigma) = 0$ , a naprężenie  $\sigma'$  odpowiada dowolnemu stanowi dopuszczalnemu leżącemu wewnątrz lub na powierzchni plastyczności, tzn.  $F(\sigma') \leq 0$ . Symbolem  $d\sigma$  oznaczono infimezmalny przyrost naprężenia, a symbolami  $d\epsilon^E$  oraz  $d\epsilon^P$  oznaczono odpowiednio przyrosty odkształceń sprężystych i plastycznych wywołane przez przyrost naprężenia  $d\sigma$ . Z rys. 18.24b wynika jasno, że pole prostokąta  $BCEF$  jest nie większe niż pole prostokąta  $ABCD$ . Nierówność tę można zapisać w następujący sposób (por. [15]):

$$(\sigma - \sigma' + d\sigma)(d\epsilon^E + d\epsilon^P) - (\sigma - \sigma' + d\sigma)d\epsilon^E \geq 0$$

lub po redukcji wyrazów podobnych

$$(d) \quad (\sigma - \sigma')d\epsilon^P + d\sigma d\epsilon^P \geq 0.$$

Iloczyn  $d\sigma d\varepsilon^P$  w powyższym wzorze jako mała wartość wyższego rzędu może być pominięta. Wnioskujemy stąd, że

$$(e) \quad (\sigma - \sigma') d\varepsilon^P \geq 0$$

lub

$$(f) \quad \sigma d\varepsilon^P \geq \sigma' d\varepsilon^P.$$

Nierówność (e) jest esencją postulatu *Druckera*. Obowiązuje ona zarówno dla materiałów idealnie plastycznych, jak i materiałów ze wzmocnieniem plastycznym. W przypadku idealnej plastyczności, zgodnie ze wzorem (c) przyrost dyssypacji energii odkształceń plastycznych odpowiada iloczynowi  $\sigma d\varepsilon^P$ . W tym przypadku nierówność (f) wyraża sens **hipotezy maksymalnej pracy (mocy) plastycznej**, podanej w 1950 roku przez Hilla: *spośród wszystkich dopuszczalnych stanów naprężenia rzeczywisty stan naprężenia  $\sigma$  daje największy przyrost dyssypacji*.

Jeżeli  $\sigma = \sigma'$ , to nierówność (d) przybiera postać:

$$(g) \quad d\sigma d\varepsilon^P \geq 0.$$

Zależność (g) definiuje **stateczność materiału**: wzrostowi naprężenia towarzyszy zawsze wzrost odkształceń plastycznych. Znak równości występuje jedynie w przypadku idealnej plastyczności, kiedy przyrostowi odkształceń plastycznych nie towarzyszy przyrost naprężeń.

Uzyskane wyżej wyniki można uogólnić na trójosiowe stany naprężeń i odkształceń. Zastąpienie naprężeń  $\sigma$  przez  $\sigma_{ij}$ , odkształceń  $\varepsilon^P$  przez  $\varepsilon_{ij}^P$  oraz nieskończenie małych przyrostów przez ich prędkości, tzn.:  $d\sigma_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} dt$  i  $d\varepsilon_{ij}^P = \dot{\varepsilon}_{ij}^P dt$ , pozwala zapisać nierówności (e) i (f) w następujący sposób:

$$(h) \quad (\sigma_{ij} - \sigma'_{ij}) \dot{\varepsilon}_{ij}^P \geq 0,$$

$$(i) \quad \dot{\sigma}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^P \geq 0.$$

Jeżeli wykorzystamy prawo płynięcia (b), to nierówność (h) można zapisać następująco:

$$(j) \quad (\sigma_{ij} - \sigma'_{ij}) \cdot \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \geq 0,$$

co dowodzi, że obszar ograniczony warunkiem plastyczności przy akceptacji postulatu *Druckera* jest wypukły. Wypukłość warunku plastyczności przy danych prędkościach odkształceń plastycznych po spełnieniu stowarzyszonego prawa płynięcia gwarantuje jednoznaczność stanu naprężenia oraz zapewnia stateczność materiału.

### 18.3.2. Podstawowe zależności teorii plastycznych konstrukcji prętowych

W obliczeniach konstrukcji złożonych z elementów prętowych i powierzchniowych (płyty, powłoki) posługujemy się wielkościami uogólnionymi. Rolę uogólnionych naprężeń  $Y_i$  odgrywają zazwyczaj siły wewnętrzne (siły normalne i poprzeczne oraz momenty zginające i skręcające), a uogólnionymi prędkościami odkształceń  $\dot{\varepsilon}_i$  są prędkości odpowiednich wielkości kinematycznych (prędkość wydłużeń, kątów ścinania, krzywizn i jednostkowych kątów skręcania). Zależności podstawowe w przypadku elementów konstrukcyjnych otrzymuje się przez całkowanie odpowiednich zależności przytoczonych w p. 18.3.1, obowiązujących na poziomie punktu. Przyporządkowanie wielkości uogólnionych  $\mathbf{Y} = \{Y_i\}$  oraz  $\dot{\mathbf{e}} = \{\dot{\varepsilon}_i\}$  wynika z zasady równoważności mocy dyssypowanej:

$$\dot{D} = \int_A \sigma_{rs} \dot{\epsilon}_{rs} dA = \sum_j Y_j \dot{\epsilon}_j, \quad (18.21)$$

odniesionej do jednostki długości pręta lub jednostki powierzchni płyty bądź powłoki. W płaskich układach prętowych, gdzie  $\dot{Y} = \{N, Q, M, \mathfrak{M}\}$  oraz  $\dot{\epsilon} = \{\dot{\lambda}, \dot{\beta}, \dot{\kappa}, \dot{\mathfrak{M}}\}$ , jednostkowa moc dyssypowana wynosi:

$$\dot{D} = \int_A \sigma_{rs} \dot{\epsilon}_{rs} dA = \sum_j Y_j \dot{\epsilon}_j = N\dot{\lambda} + Q\dot{\beta} + M\dot{\kappa} + \mathfrak{M}\dot{\theta}. \quad (18.21a)$$

Wymaganie nieujemności mocy dyssypowanej odpowiada nierówności

$$\dot{D} \geq 0. \quad (18.22)$$

Wprowadzenie uogólnionych naprężeń wymaga określenia warunku plastyczności jako funkcji sił wewnętrznych. Warunek ten w przekroju pręta wyraża funkcja  $\Phi(Y_i)$ :

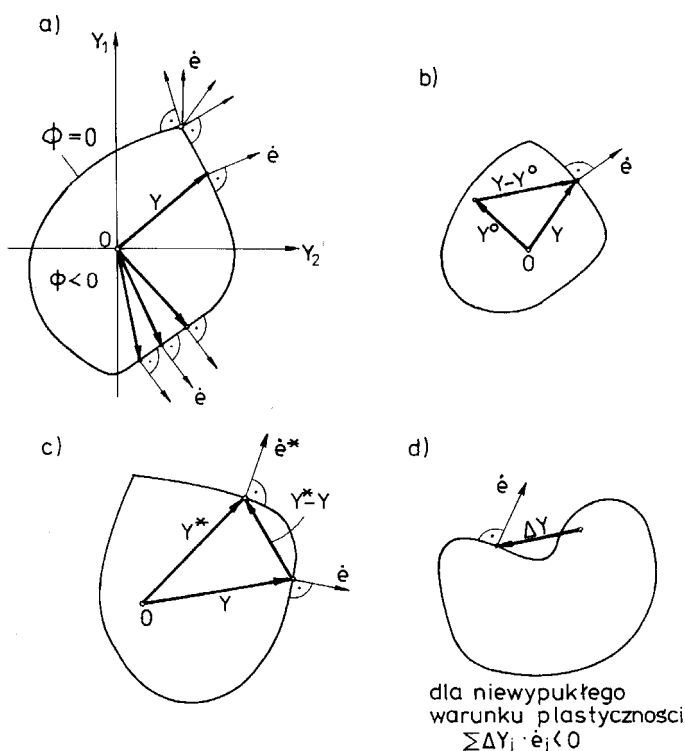
$$\Phi(Y_i) = 0. \quad (18.23)$$

Jeżeli  $\Phi(Y_i) < 0$ , to dany przekrój jest sztywny, a siły wewnętrzne są – ogólnie biorąc – nieokreślone. W pewnych szczególnych przypadkach można je obliczyć jedynie z równań równowagi danej części konstrukcji.

Stowarzyszone prawo można zapisać, jak następuje:

$$\dot{\epsilon}_i = \begin{cases} \dot{\nu} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial Y_i}, & \dot{\nu} \geq 0, \\ 0, & \Phi < 0. \end{cases} \quad (18.24)$$

Mnożnik  $\dot{\nu}$ , będący odpowiednikiem mnożnika  $\dot{\lambda}$  w teorii ośrodka plastycznego, może być funkcją położenia (np. w prętach  $\dot{\nu} = \dot{\nu}(x)$ ). Prawo płynięcia bywa nazywane również prawem normalności, gdyż wynika z niego, że wektory  $\dot{\epsilon}$  są normalne do powierzchni plastyczności (rys. 18.25). Gdy warunek plastyczności ma naroże, wówczas kierunek wektora  $\dot{\epsilon}$  nie jest ściśle określony. Można wówczas stwierdzić tylko tyle, że jest zawarty on między normalnymi do sąsiadujących fragmentów powierzchni plastyczności.



Rys 18.25

Teoria ciał idealnie plastycznych pozwala oszacować **nośność graniczną**, tzn. największe obciążenie, jakie może przenieść rozważana konstrukcja. Praktyczne znaczenie teorii nośności granicznej w projektowaniu i ocenie bezpieczeństwa konstrukcji trudno zatem przecenić. Znajomość funkcji  $\Phi(Y_i)$  odgrywa bardzo ważną rolę w tej teorii, gdyż pozwala określić, kiedy materiał przechodzi w stan plastyczny, a ponadto poprzez stowarzyszone prawo płynięcia precyzuje kinematykę płynięcia.

### 18.3.3. Dwa podstawowe twierdzenia nośności granicznej konstrukcji

W teorii nośności granicznej przyjmujemy, że obciążenie konstrukcji  $P_j$  jest proporcjonalne do pewnego mnożnika skalarnego  $\mu$  (jest to tzw. obciążenie proporcjonalne):

$$P_j = \mu p_j, \quad (18.25)$$

gdzie  $p_j$  oznacza pewne obciążenie porównawcze (np. eksploatacyjne). Przy pewnej wartości mnożnika  $\mu$  nośność konstrukcji zostanie wyczerpana; konstrukcja przekształca się w mechanizm. Stanowi temu odpowiada obciążenie graniczne wyznaczone przez graniczną wartość mnożnika  $\mu = \mu_L$ . Zasadniczym celem teorii nośności granicznej jest ustalenie granicznej wartości mnożnika obciążenia  $\mu$ .

**Statycznie dopuszczalne pole naprężeń uogólnionych  $Y_i^0$ :**

- spełnia równania równowagi wewnętrznej i naprężeniowe warunki brzegowe (tzn. jest w równowadze z obciążeniami  $\mu p_j$ ),
- nie narusza warunku plastyczności, czyli  $\Phi(Y_i^0) \leq 0$  (por. rys. 18.25b).

**Kinematycznie dopuszczalne pole prędkości  $\dot{u}_j^*$ :**

- spełnia kinematyczne warunki brzegowe oraz warunki ciągłości,
- pozwala ze związków geometrycznych  $\dot{e}_i^* = \dot{e}_i^*(\dot{u}_j^*)$  otrzymać niezerowe pole odkształceń,
- określa dodatnią moc obciążeń zewnętrznych  $\dot{L} = \mu \int p_j \dot{u}_j^* ds > 0$ .

Każdej prędkości odkształcenia  $\dot{e}_i^*$  musi odpowiadać takie pole uogólnionych naprężeń  $Y_i^*$ , by był spełniony warunek plastyczności, tzn.  $\Phi(Y_i^*) = 0$ , gdyż w przeciwnym razie nie zachodziłoby w konstrukcji rozpraszanie (dyssypacja) energii. Dodać trzeba, że wypukłość warunku plastyczności gwarantuje jednoznaczne przyporządkowanie uogólnionego naprężenia  $Y_i^*$  danej prędkości odkształcenia  $\dot{e}_i^*$ . Sytuację tę ilustruje rys. 18.25c. Istotne jest, że naprężenia  $Y_i^*$  nie muszą spełniać warunków równowagi wewnętrznej.

Skoro prędkościom przemieszczeń  $\dot{u}_j^*$  odpowiadają prędkości odkształceń  $\dot{e}_i^*$ , to wewnątrz konstrukcji następuje dyssypacja energii, gdyż  $Y_i^* \dot{e}_i^* > 0$ . Całkowitą moc dyssypowaną w konstrukcji wyraża się wtedy następująco:

$$\dot{\mathcal{D}} = \int_s \dot{D} ds = \int_V \sigma_{ij} \dot{e}_{ij}^* dV = \int_s \left( \sum Y_i^* \dot{e}_i^* \right) ds > 0.$$

Można zatem dla danego  $\dot{u}_j^*$  wyznaczyć taką intensywność obciążenia  $\mu_K p_j$ , że moc obciążeń zewnętrznych  $\dot{L}$  będzie równa wewnętrznej mocy dyssypowanej  $\dot{\mathcal{D}}$  (tzn.  $\dot{L} = \dot{\mathcal{D}}$ ). Mamy więc:

$$\mu_K \int_s p_j \dot{u}_j^* ds = \int_s \left( \sum Y_i^* \dot{e}_i^* \right) ds = \int_s \dot{D}(\mathbf{Y}^*, \dot{\mathbf{e}}^*) ds,$$

skąd otrzymujemy kinematyczny mnożnik obciążenia  $\mu_K$ :

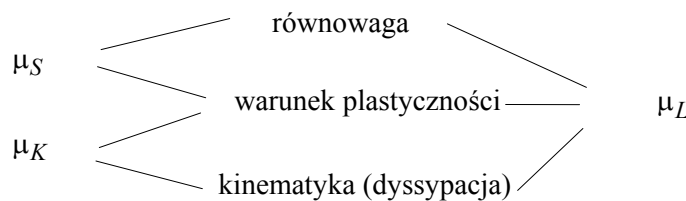
$$\mu_K = \frac{\int_S \dot{D}(\mathbf{Y}^*, \dot{\mathbf{e}}^*) ds}{\int_S p_j \dot{u}_j^* ds}. \quad (18.26)$$

Wyznaczenie statycznie dopuszczalnego pola naprężeń i kinematycznie dopuszczalnego pola prędkości odkształceń w chwili osiągnięcia nośności granicznej jest na ogół bardzo trudne. Zazwyczaj stosujemy jedno z dwóch podejść: statyczne lub kinematyczne.

**W podejściu statycznym** poszukujemy takiego mnożnika obciążenia  $\mu = \mu_S$ , które odpowiada statycznie dopuszczalnemu polu naprężeń  $Y_i^0$ .

**W podejściu kinematycznym** poszukujemy takiego mnożnika obciążenia  $\mu = \mu_K$ , które odpowiada kinematycznie dopuszczalnemu polu prędkości przemieszczeń  $\dot{u}_j^*$ .

Niżej przedstawiamy schemat ilustrujący, jakie zależności są spełnione przy obliczaniu mnożników  $\mu_S, \mu_K$  oraz ścisłej wartości mnożnika  $\mu_L$ , odpowiadającego tzw. rozwiązaniu pełnemu (kompletnemu):



Ocenimy wartości mnożników  $\mu_S$  i  $\mu_K$  w porównaniu z wartością ścisłą  $\mu_L$ . W tym celu przyjmujemy, że rozwiązanie pełne charakteryzują: obciążenie  $P_L = \mu_L p$ , naprężenia uogólnione  $\mathbf{Y}$ , prędkości przemieszczeń  $\dot{\mathbf{u}}$  oraz stowarzyszone z nimi prędkości odkształceń  $\dot{\mathbf{e}}$ .

Dla rozwiązania pełnego obowiązuje równanie mocy wirtualnej:

$$(a) \quad \int_S \left( \sum Y_i \dot{e}_i \right) ds = \mu_L \int_S p_j \dot{u}_j ds.$$

Dla **rozwiązania statycznego** również można ułożyć równanie mocy wirtualnej, w którym wprowadzamy statycznie dopuszczalne naprężenia uogólnione  $Y_i^0$  i prawdziwe wielkości kinematycznie dopuszczalne:

$$(b) \quad \int_S \left( \sum Y_i^0 \dot{e}_i \right) ds = \mu_S \int_S p_j \dot{u}_j ds.$$

Po odjęciu od siebie równań (a) i (b) otrzymujemy:

$$(c) \quad \int_S \left[ \sum (Y_i - Y_i^0) \dot{e}_i \right] ds = (\mu_L - \mu_S) \int_S p_j \dot{u}_j ds.$$

Na podstawie postulatu *Druckera* wnioskujemy, że wyrażenie  $(Y_i - Y_i^0) \dot{e}_i \geq 0$ . Widać to wyraźnie na rys. 18.25b, gdyż przedstawia ono iloczyn skalarny dwóch wektorów tworzących ze sobą kąt ostry. Lewa

strona równania (c) jest zatem nieujemna. Po prawej stronie tego równania całka  $\int p_j \dot{u}_j ds$  przedstawia wartość proporcjonalną do mocy sił zewnętrznych, która jest zawsze dodatnia. Wobec powyższego różnica mnożników  $\mu_L - \mu_S$  jest zawsze nieujemna, stąd na podstawie równania (c) otrzymujemy:

$$(d) \quad \mu_S \leq \mu_L.$$

W **rozwiązaniu kinematycznym** równanie bilansu mocy dyssypowanej (nie jest to równanie mocy wirtualnej!) dla rozwiązania kinematycznego ma postać:

$$(e) \quad \int_S \sum Y_i^* \dot{e}_i^* ds = \mu_K \int_S p_j \dot{u}_j^* ds.$$

Ponieważ w rozwiązaniu kinematycznym wielkości  $u_j^*$  oraz  $e_i^*$  są kinematycznie dopuszczalne, a wielkości  $Y_i$  w rozwiązaniu ścisłym są statycznie dopuszczalne, słuszne jest również następujące równanie mocy wirtualnej:

$$(f) \quad \int_S \sum Y_i \dot{e}_i^* ds = \mu_L \int_S p_j \dot{u}_j^* ds.$$

Po odjęciu równania (f) od równania (e) otrzymujemy:

$$(g) \quad \int_S \left[ \sum (Y_i^* - Y_i) \dot{e}_i^* \right] ds = (\mu_K - \mu_L) \int_S p_j \dot{u}_j^* ds.$$

Ponieważ  $(Y_i^* - Y_i) \dot{e}_i^*$  na podstawie postulatu *Druckera* jest nieujemne oraz  $\int p_j \dot{u}_j^* ds > 0$ , zatem różnica  $\mu_K - \mu_L \geq 0$ , stąd

$$(h) \quad \mu_K \geq \mu_L.$$

Z przytoczonych wywodów wynikają dwa bardzo ważne twierdzenia.

**Twierdzenie o ocenie dolnej** (ocena statyczna):

*Rzeczywista intensywność obciążenia granicznego jest określona przez największy spośród mnożników obciążenia dla wszystkich statycznie dopuszczalnych pól naprężeń, tzn.:*

$$\mu_L = \sup \mu_S. \quad (18.27)$$

**Twierdzenie o ocenie górnej** (ocena kinematyczna):

*Rzeczywista intensywność obciążenia granicznego jest określona przez najmniejszy spośród mnożników obciążenia dla wszystkich kinematycznie dopuszczalnych pól prędkości przemieszczeń, tzn.:*

$$\mu_K = \inf \mu_S. \quad (18.28)$$

Twierdzenie o ocenie dolnej wynika ze wzoru (d), a twierdzenie o ocenie górnej – ze wzoru (h). Z obu powyższych twierdzeń wnioskujemy, że zachodzi nierówność jednoczesna:

$$\mu_S \leq \mu_L \leq \mu_K. \quad (18.29)$$

Z analizy twierdzeń o ocenie dolnej i ocenie górnej wynikają m. in. następujące wnioski praktyczne:

- dodanie nieważkiego materiału bez zmiany warunków brzegowych nie prowadzi do zmniejszenia obciążenia granicznego,
- podwyższenie granicy plastyczności materiału nie obniża nośności konstrukcji,
- osłabienie więzów kinematycznych nie prowadzi do podwyższenia nośności granicznej.

### 18.3.4. Warunki plastyczności wyrażone przez naprężenia uogólnione

Rozważymy jednoczesne działanie siły normalnej i momentu zginającego na przekrój prostokątny (rys. 18.26a, b). Rozkład naprężeń w chwili osiągnięcia nośności granicznej podano na rys. 18.26c. Z definicji sił wewnętrznych  $N$  i  $M$  otrzymujemy:

$$(a) \quad \begin{cases} N = \int_s \sigma dA = [(a - z_0) - (a + z_0)]b\sigma_P = 2z_0b\sigma_P = N_P \frac{z_0}{a}, \\ M = \int_s \sigma z dA = (a - z_0)[2a - (a - z_0)]b\sigma_P = (a^2 - z_0^2)b\sigma_P = M_P \left[1 - \left(\frac{z_0}{a}\right)^2\right], \end{cases}$$

gdzie

$N_P$  i  $M_P$  oznaczają odpowiednio normalną siłę plastyczną i moment plastyczny:

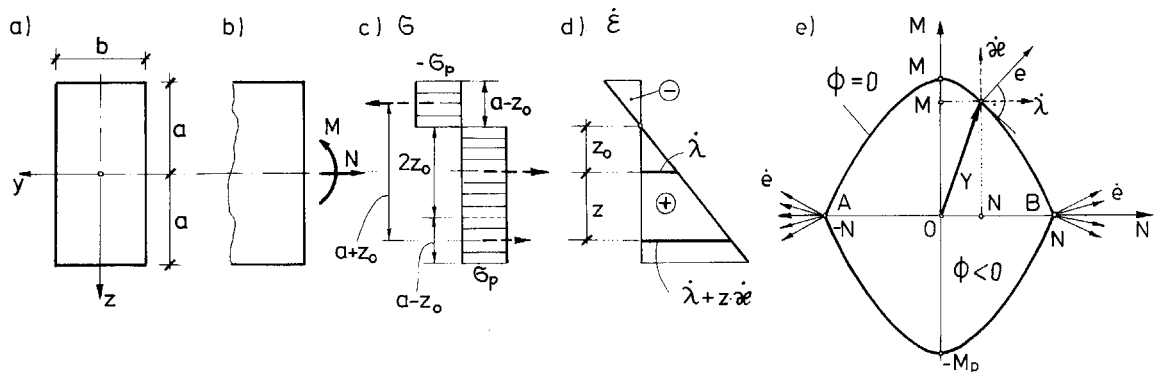
$$N_P = A\sigma_P = 2ab\sigma_P, \quad M_P = W^{(P)}\sigma_P = a^2b\sigma_P,$$

z kolei  $z_0 = -Na / N_P$  i oznacza odległość osi obojętnej od środka ciężkości przekroju (por. rys. 18.26c, d). Po wyeliminowaniu z równań (a) parametru  $z_0$  otrzymujemy warunek plastyczności wyrażony przez uogólnione naprężenia:

$$\Phi(N, M) = \frac{|M|}{M_P} + \left(\frac{N}{N_P}\right)^2 - 1 = 0. \quad (18.30)$$

Zależność (18.30) często przedstawia się w postaci bezwymiarowej po wprowadzeniu oznaczeń:  $n = N / N_P$  oraz  $m = M / M_P$ . Wówczas

$$\Phi(n, m) = |m| + n^2 - 1 = 0. \quad (18.30a)$$



Rys. 18.26

Rozkład prędkości odkształcenia w obrębie przekroju wynika z hipotezy *Bernoulliego*:  $\varepsilon = kz + \lambda$ . Po zróżniczkowaniu tej zależności  $\dot{\varepsilon} = k\dot{z} + \dot{\lambda}$ . Związki między prędkością wydłużenia  $\dot{\lambda}$  i prędkością krzywizny  $\dot{k}$  wynikają ze stowarzyszonego prawa płynięcia:

$$\dot{\lambda} = \dot{v} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial N} = \dot{v} \cdot \frac{2N}{N_P^2}, \quad \dot{k} = \dot{v} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial M} = \pm \dot{v} \cdot \frac{1}{M_P},$$

skąd

$$\dot{\lambda} = |\dot{k}| \cdot \frac{2N}{N_P^2} \cdot M_P = 2n \cdot \frac{M_P}{N_P} |\dot{k}| = an|\dot{k}| = z_0 \dot{k}.$$

Rozkład prędkości odkształceń  $\dot{\varepsilon}$  przedstawia rys. 18.26d, a warunek plastyczności (18.30) oraz interpretację geometryczną prawa płynięcia ilustruje rys. 18.26e. Każdemu punktowi krzywej granicznej  $\Phi(N, M) = 0$  odpowiada pewna para wartości  $N$  i  $M$ , która powoduje uplastycznienie przekroju. Punkty leżące wewnątrz obszaru granicznego odpowiadają stanowi sztywnemu ( $\Phi < 0$ ). W punktach  $A$  i  $B$  występują naroża. Wnioskujemy stąd, że przy wyłącznym działaniu siły normalnej oprócz prędkości wydłużeń mogą również występować dodatnie lub ujemne prędkości krzywizn.

Duże znaczenie teoretyczne i praktyczne w badaniach mimośrodowego działania siły normalnej ma idealny przekrój dwuteowy (rys. 18.27a). Całkowite pole przekroju jest skoncentrowane w półkach. Grubość tych półek jest tak mała, że za wysokość przekroju  $2a$  można uważać odległość między środkami ciężkości półek. Wówczas:

$$A = 2A_p, \quad J = 2A_p \cdot a^2, \quad W^{(S)} = W^{(P)} = 2A_p a,$$

oraz

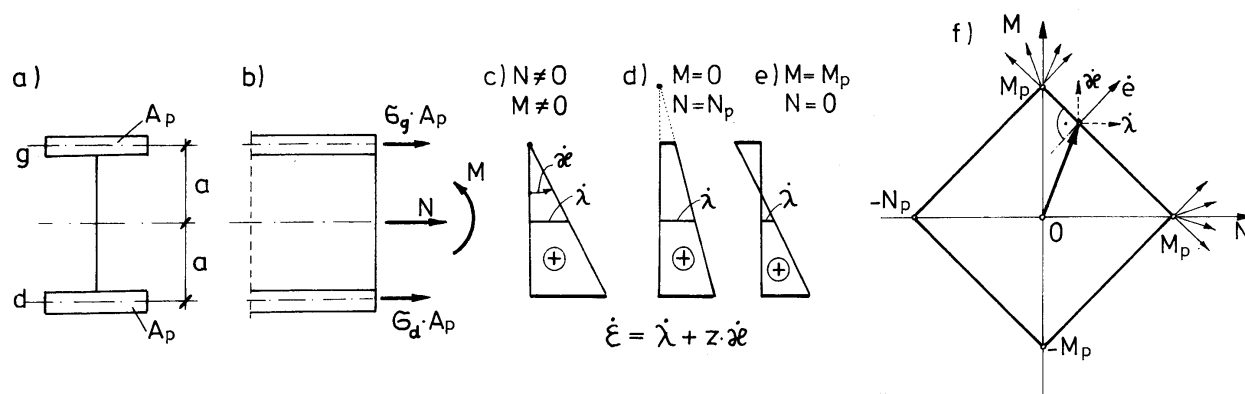
$$N_P = 2A_p \cdot \sigma_P \quad \text{ i } \quad M_P = 2A_p a \sigma_P = N_P a,$$

gdzie  $A_p$  oznacza pole jednej półki. Siłę normalną i moment zginający określają zależności:

$$N = (\sigma_d + \sigma_g) \cdot A_p,$$

$$M = (\sigma_d - \sigma_g) \cdot a A_p.$$

Gdy  $N \neq 0$  i jednocześnie  $M \neq 0$ , osiągnięcie nośności granicznej objawia się w ten sposób, że jedna z półek jest sztywna i wokół niej następuje obrót całego przekroju. Na rysunku 18.27c zilustrowano kinematykę tego przypadku: dla  $N > 0$  i  $M > 0$  dolna półka płynie ( $\sigma_d = \sigma_P$ ), a górna jest sztywna ( $-\sigma_P < -\sigma_g < \sigma_P$ ). Rysunki 18.27d, e odpowiadają przypadkom:  $N = N_P$ ,  $M = 0$  ( $\sigma_d = \sigma_g = \sigma_P$ ) oraz  $N = 0$ ,  $M = M_P$  ( $\sigma_d = \sigma_P$ ,  $\sigma_g = -\sigma_P$ ).



Rys. 18.27

Rozważymy uplastycznienie idealnego przekroju dwuteowego, gdy  $N > 0$ ,  $M > 0$  ( $\sigma_d = \sigma_P, \sigma_g = \sigma$ ). Wówczas

$$N = (\sigma_P + \sigma)A_P, \quad M = (\sigma_P - \sigma)aA_P.$$

Po rozpisaniu wyrażenia na moment zginający otrzymujemy:

$$M = (\sigma_P - \sigma) \cdot A_P a = 2\sigma_P A_P a - (\sigma_P + \sigma)aA_P = M_P - Na$$

i stąd otrzymujemy warunek plastyczności:

$$\Phi(N, M) = \frac{M}{M_P} + \frac{N}{N_P} - 1 = 0.$$

Analiza pozostałych możliwości ( $N > 0, M < 0$ ;  $N < 0, M > 0$ ;  $N < 0, M < 0$ ) prowadzi do następującej zależności granicznej:

$$\Phi(N, M) = \frac{|M|}{M_P} + \frac{|N|}{N_P} - 1 = 0$$

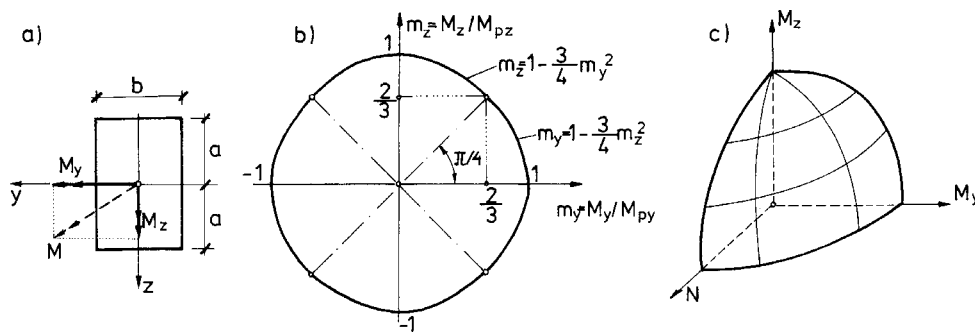
lub w postaci bezwymiarowej

$$\Phi(n, m) = |m| + |n| - 1 = 0.$$

Zależność tę przedstawia rys. 18.27f. Z prawa płynięcia wynika, że (por. także rys. 18.27c):

$$|\dot{\lambda}| = |\dot{k}| \cdot a.$$

Dla jednoczesnego działania dwóch momentów zginających  $M_y$  i  $M_z$  ustalenie postaci warunku plastyczności wymaga już nieco dokładniejszej analizy. Ostateczny kształt odpowiedniej krzywej granicznej dla przekroju prostokątnego podano na rysunku 18.28b. Jeżeli na przekrój działa jeszcze siła normalna, to warunek plastyczności w przestrzeni naprężeń uogólnionych ( $Y_1 = N$ ,  $Y_2 = M_y$ ,  $Y_3 = M_z$ ) jest wypukłą bryłą otaczającą początek układu współrzędnych (rys. 18.28c).



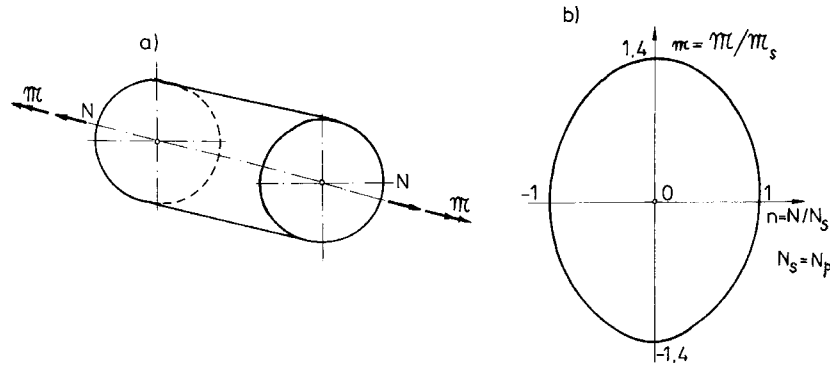
Rys. 18.28

Podamy jeszcze postać krzywej granicznej dla jednoczesnego rozciągania i skręcania pręta o przekroju kołowym (rys. 18.29):

$$\Phi(m, n) = \frac{9}{16}m^2 + \frac{3}{4}n^2 + \frac{1}{4}n^3 - 1 = 0,$$

gdzie  $m = \mathfrak{M} / \mathfrak{M}_S$ ,  $n = N / N_S$ , przy czym  $N_S = N_P$ .

Jeśli występuje większa liczba sił wewnętrznych, powierzchnia plastyczności jest bryłą w przestrzeni o wymiarze odpowiadającym liczbie sił wewnętrznych. Dzieje się tak w prętach dwukierunkowo zginanych, rozciąganych i skręcanych (przestrzeń czterowymiarowa) oraz w płytach i powłokach, w odniesieniu do których warunki plastyczności zapisuje się nawet w przestrzeniach sześciowymiarowych.



Rys. 18.29

Na zakończenie omówimy warunki plastyczności dla prętów wykonanych z materiałów znakoczułych i zbrojonych.

Warunki plastyczności dla materiałów znakoczułych nie wykazują symetrii względem układu osi oznaczających siły wewnętrzne. Rozważmy przykładowo pręt wykonany z materiału o charakterystyce fizycznej podanej na rys. 18.30a. Na przekrój pręta działają siła normalna  $N$  i moment zginający  $M_y = M$  (rys. 18.30b). Przyjąwszy prawo płaskich przekrojów:  $\varepsilon = kz + \lambda$ , otrzymujemy cztery przypadki rozkładu naprężeń normalnych, które odpowiadają następującym siłom wewnętrznym:

- 1)  $\dot{\lambda} < 0, |z_0| > a$ :  $N = -2ba\sigma_P^-$ ,  
 $M = 0$ ,
- 2)  $\dot{\lambda} > 0, |z_0| < a$ :  $N = -b(a + z_0)\sigma_P^- + b(a - z_0)\sigma_P^+$ ,  
 $M = \frac{1}{2}b(a + z_0) \cdot (a - z_0)\sigma_P^- + \frac{1}{2}b(a - z_0) \cdot (a + z_0)\sigma_P^+$ ,
- 3)  $\dot{\lambda} < 0, |z_0| < a$ :  $N = b(a + z_0)\sigma_P^+ - b(a - z_0)\sigma_P^-$ ,  
 $M = -b(a + z_0)\sigma_P^+ - b(a - z_0) \cdot (a + z_0)\sigma_P^-$ ,
- 4)  $\dot{\lambda} > 0, |z_0| > a$ :  $N = 2ba\sigma_P^+$ ,  
 $M = 0$ .

Wprowadzenie oznaczeń:

$$\zeta_0 = z_0 / a; \quad \sigma_{Psr} = \frac{1}{2}(\sigma_P^+ + \sigma_P^-), \quad \Delta\bar{\sigma} = \frac{\sigma_P^+ - \sigma_P^-}{\sigma_P^+ + \sigma_P^-},$$

$$N_{Psr} = 2ba\sigma_{Psr}; \quad M_{Psr} = ba^2\sigma_{Psr}$$

pozwala zapisać powyższe równania w nader prostej postaci:

$$\begin{cases} N = N_{Psr} \cdot (\Delta\bar{\sigma} - \zeta_0) \\ M = M_{Psr} \cdot (1 - \zeta_0^2), \end{cases} \quad -1 \leq \zeta_0 \leq 1.$$

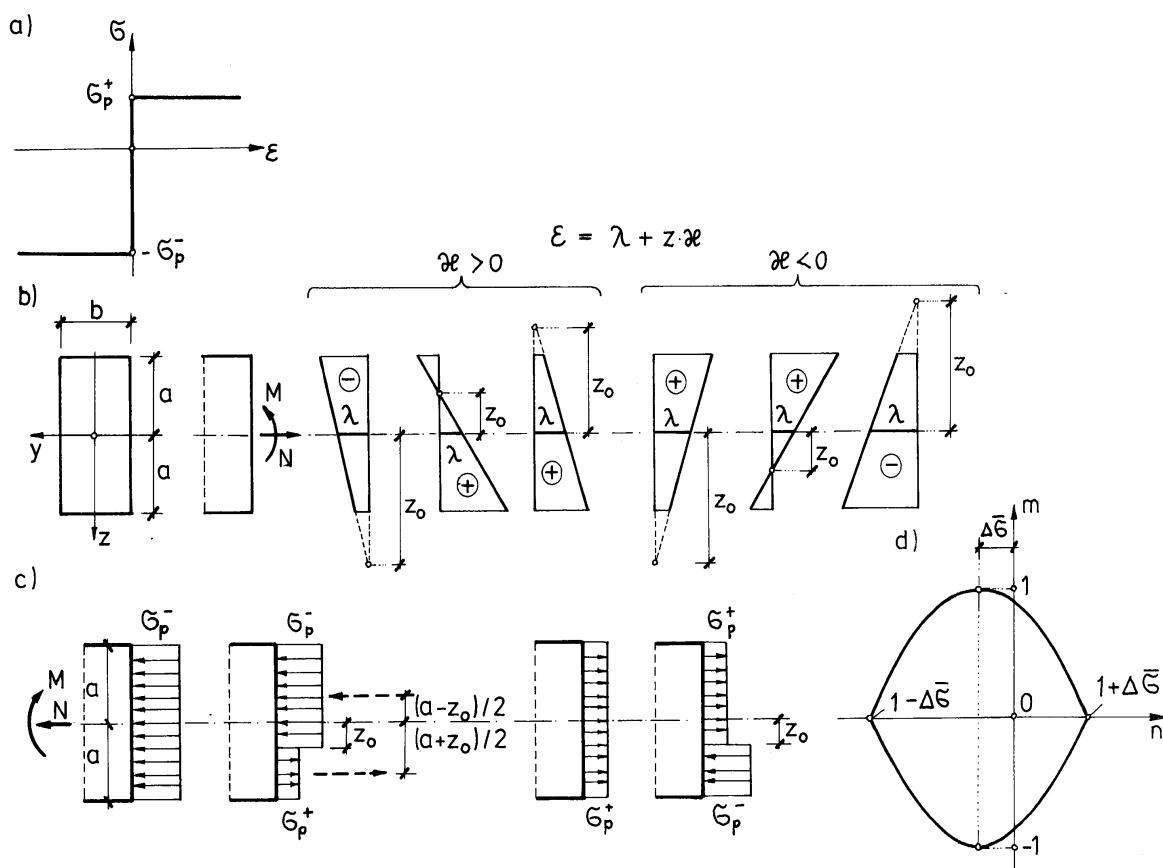
Jest to parametryczna postać warunku plastyczności. Po wyeliminowaniu parametru  $\zeta_0$  otrzymujemy równanie poszukiwanej krzywej granicznej:

$$\Phi(m, n) = |m| + (n - \Delta\bar{\sigma})^2 - 1 = 0, \quad (18.30b)$$

gdzie  $m = M/M_{Psr}$ ,  $n = N/N_{Psr}$ .

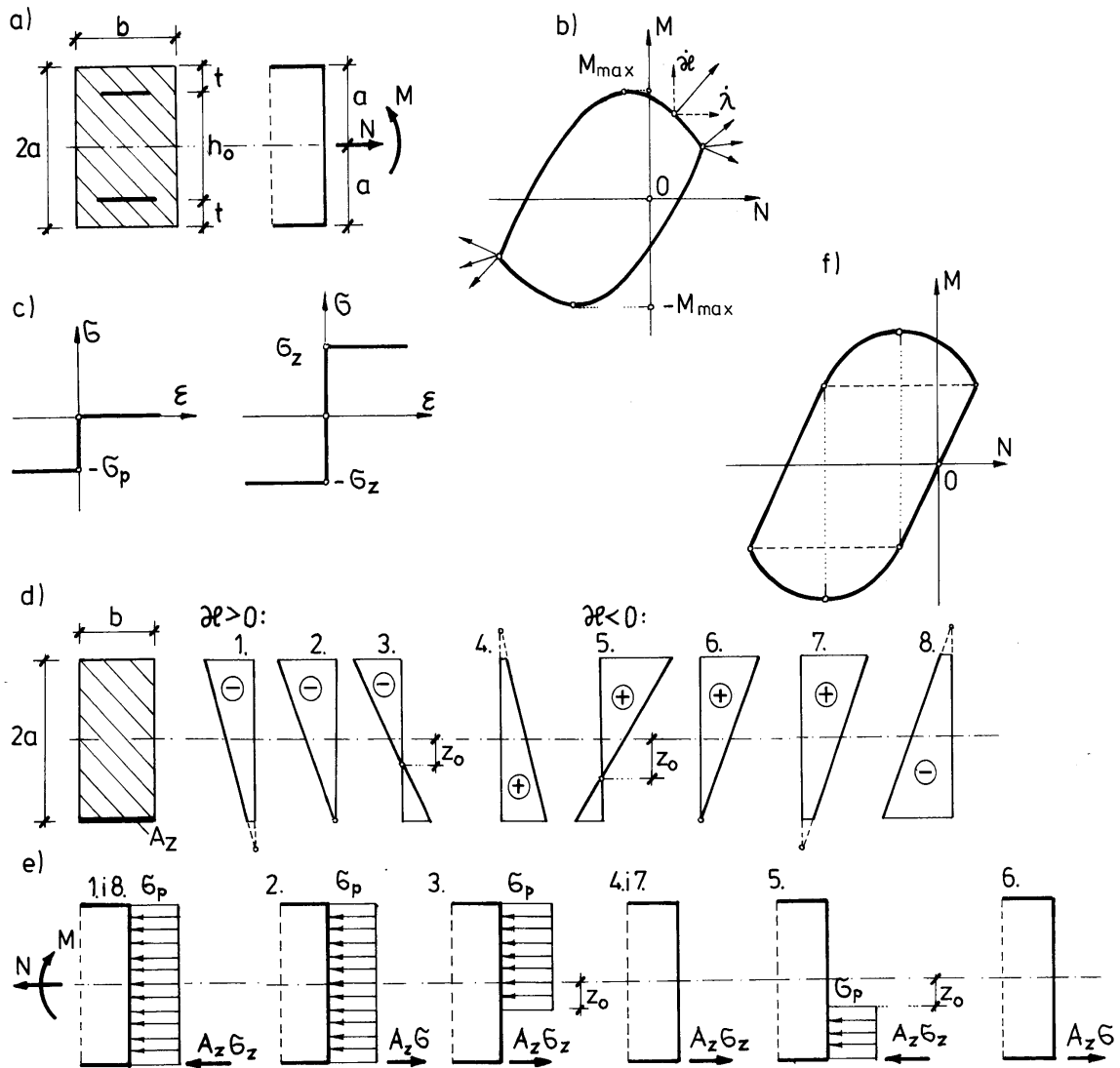
Krzywą graniczną (18.30b) obrazuje rys. 18.30d. Łatwo zauważyć, że równanie (18.30a) jest szczególnym przypadkiem równania (18.30b).

Bardzo duże znaczenie praktyczne mają pręty zbrojone włóknami (wkładkami) wykazującymi tylko sztywność na rozciąganie i ściskanie. Jako materiał rodzimy stosuje się najczęściej tworzywa sztuczne, drewno lub beton. Zbrojenie stanowią włókna węglowe lub cienkie pręty stalowe. Jeżeli materiałowi rodzimemu i włóknom zbrojenia przypiszemy cechy materiału sztywno-plastycznego, to dla takiego kompozytu można ustalić warunek plastyczności. Wymaga to jednak dosyć drobiazgowej analizy. Ostatecznie otrzymuje się dalsze modyfikacje kształtu krzywych granicznych. Przykład takiej krzywej granicznej podano na rysunku 18.31b. Warunek plastyczności dotyczy tu podwójnie zbrojonego przekroju prostokątnego (rys. 18.31a), poddanego jednoczesnemu działaniu siły normalnej i momentu zginającego. Krzywa graniczna w tym przypadku jest opisana dziesięcioma równaniami (por. Janas [17]).



Rys. 18.30

Sposób wyznaczania warunku plastyczności zilustrujemy na przykładzie mimośrodowego działania siły normalnej na przekrój prostokątny, w którym jest tylko jedna warstwa zbrojenia usytuowana na dolnej zewnętrznej warstwie krawędzi przekroju. Przyjmijmy, że granice plastyczności zbrojenia dla rozciągania i ściskania są równe i wynoszą  $\sigma_z$ , natomiast w materiale rodzimym dla rozciągania  $\sigma_p^+ = 0$ , a dla ściskania  $\sigma_p^- = \sigma_p$ , stąd  $\Delta \bar{\sigma} = -1$  (por. rys. 18.31c).



Rys. 18.31

Dla każdego przypadku rozkładu naprężeń stowarzyszonego z deformacjami przekroju otrzymujemy następujące wartości sił wewnętrznych:

- 1)  $N = -2ab\sigma_P - A_z\sigma_z$ ,  $M = -A_z a\sigma_z$ ,
- 2)  $N = -2ab\sigma_P + A_z\sigma_z$ ,  $M = A_z a\sigma$ ,  $-\sigma_z \leq \sigma \leq \sigma_z$ ,
- 3)  $N = -ab\sigma_P \cdot (1 + \zeta_0) + A_z \cdot \sigma_z$ ,  $M = \frac{1}{2}ba^2 \cdot \sigma_P (1 - \zeta_0^2) + A_z a\sigma_z$ ,
- 4)  $N = A_z\sigma_z$ ,  $M = A_z a\sigma_z$ ,
- 5)  $N = -ab\sigma_P \cdot (1 - \zeta_0) - A_z\sigma_z$ ,  $M = -\frac{1}{2}ba^2 \cdot \sigma_P (1 - \zeta_0^2) - A_z a \cdot \sigma_z$ ,
- 6)  $N = A_z\sigma$ ,  $M = A_z a\sigma$ ,  $-\sigma_z \leq \sigma \leq \sigma_z$ .

Na uwagę zasługują przypadki 2) i 6), w których odkształcenie włókien zbrojenia równa się zero. Naprężenia w zbrojeniu mieszczą się wówczas w przedziale  $< -\sigma_z, \sigma_z >$ . Po wprowadzeniu oznaczeń:

$$n = \frac{N}{ab\sigma_P} = \frac{N}{N_{Psr}}, \quad m = \frac{M}{(ba^2\sigma_P/2)} = \frac{M}{M_{Psr}}, \quad \alpha = \frac{A_z}{2ab} \cdot \frac{\sigma_z}{\sigma_P}$$

oraz wyeliminowaniu parametru  $\zeta_0$  otrzymujemy sześć zależności opisujących krzywą graniczną w postaci bezwymiarowej:

- 1)  $n = -2(1+\alpha), \quad m = -4\alpha,$
- 2)  $m = 2n + 4, \quad -2(1+\alpha) \leq n \leq -2(1-\alpha),$
- 3)  $m = (2\alpha - n)(2 - 2\alpha + n) + 4\alpha$
- 4)  $n = 2\alpha, \quad m = 4\alpha,$
- 5)  $m = (2\alpha + n)(2 + 2\alpha + n) - 4\alpha,$
- 6)  $m = -2n, \quad -2\alpha \leq n \leq 2\alpha.$

Zależności 1) i 4) wyznaczają punkty, zależności 2) i 6) przedstawiają równania prostych, a zależności 3) i 5) opisują równania parabol drugiego stopnia. Wykres zależności krzywej granicznej podano na rys. 18.31f. Interesujące jest, że maksymalne i minimalne wartości momentu zginającego w przekroju zbrojonym są takie same:  $M_{\max} = -M_{\min}$ . Wartościom tym odpowiadają jednak różne wartości sił podłużnych.

### 18.3.5. Przeguby plastyczne. Obliczanie obciążenia granicznego

W rozważaniach dotyczących zginania prętów sprężysto-plastycznych zwróciliśmy uwagę na to, że osiągnięciu nośności granicznej w danym przekroju towarzyszą nieskończone krzywizny. Deformacje belki objawiają się w ten sposób, że występuje obrót sąsiednich części pręta względem osi obojętnej rozważanego przekroju (rys. 18.32a). Podobnie jest w materiale sztywno-plastycznym. W przekroju krytycznym obserwujemy bardzo dużą koncentrację odkształceń na bardzo małym obszarze (rys. 18.32b).

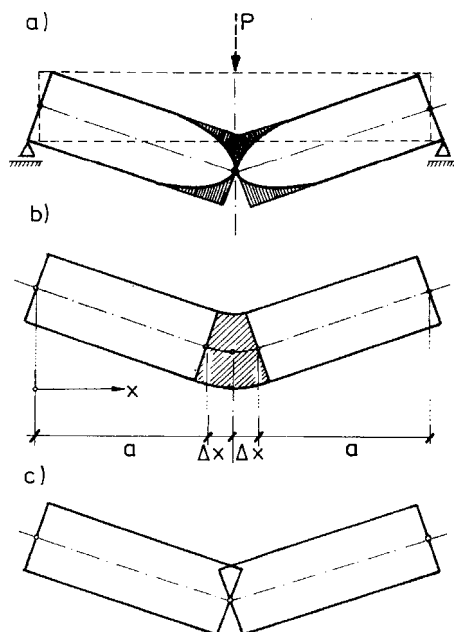
W celu obliczenia całkowitej wewnętrznej dyssypacji prędkość krzywizny wygodnie jest wyrazić za pomocą funkcji *Diraca*  $\delta(x-a)$ :

$$(a) \quad \dot{\kappa}(x) = \dot{\phi} \cdot \delta(x-a),$$

gdzie  $\dot{\phi}$  jest prędkością wzajemnego kąta obrotu sąsiednich części belki. Jeżeli jedyną niezerową prędkością uogólnionego odkształcenia jest właśnie prędkość krzywizny, to stosownie do wzoru (18.21a) i własności filtracji funkcji *Diraca* otrzymujemy:

$$\int_{-a}^a \dot{D} dx = \int_{-a}^a M \dot{\kappa} dx = \int_{-a}^a M(x) \dot{\phi} \cdot \delta(x-a) dx = M(a) \cdot \dot{\phi} = M_P \cdot \dot{\phi}, \quad (18.31)$$

gdzie  $M_P$  oznacza moment plastyczny rozważanego przekroju. Wzór (18.31) można również uzyskać, wykonując przejście graniczne, odpowiadające założeniu, że wymiary obszaru koncentracji krzywizny zmierzają do zera, tzn.  $\Delta x \rightarrow 0$ .

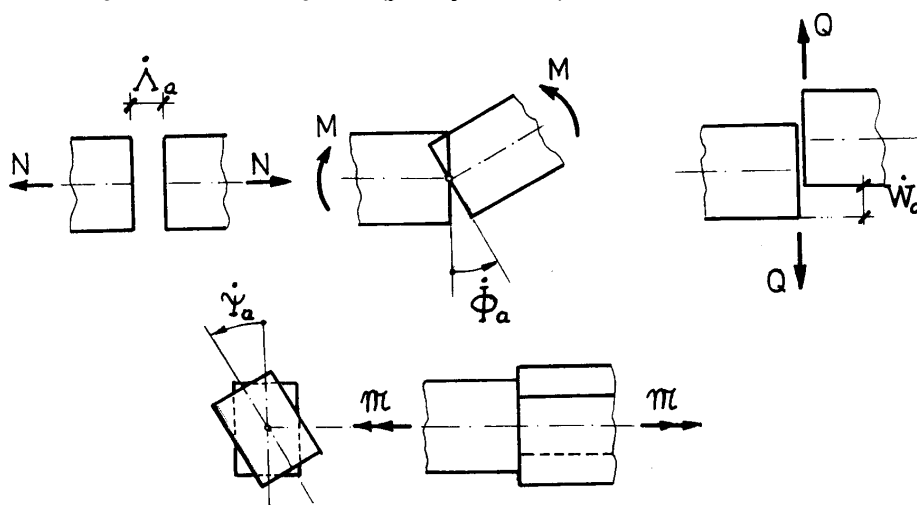


Rys. 18.32

Uproszczony mechanizm zniszczenia belki przedstawia rys. 18.32c. Można więc przyjąć, że w przekroju krytycznym powstał pewnego rodzaju przegub. Nosi on nazwę przegubu plastycznego. Przegub plastyczny jest uogólnieniem pojęcia przegubu sprężystego. Przegub sprężysty przenosi bowiem stałą wartość momentu zginającego równą zero, a przegub plastyczny przenosi stały moment zginający równy momentowi plastycznemu  $M_P$ . W obu przegubach występuje możliwość obrotu. Koncepcję przegubu plastycznego można rozszerzyć również na pozostałe składowe prędkości odkształcenia. Jeżeli prędkości te są skoncentrowane w przekroju  $x = a$ , to można je zapisać następująco:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\lambda}(x) &= \dot{\Lambda}_a \cdot \delta(x-a) \\ \dot{\beta}(x) &= \dot{W}_a \cdot \delta(x-a) \\ \dot{\kappa}(x) &= \dot{\phi}_a \cdot \delta(x-a) \\ \dot{\theta}(x) &= \dot{\psi}_a \cdot \delta(x-a) \end{aligned} \right\} \quad (18.32)$$

gdzie  $\dot{\Lambda}_a, \dot{W}_a, \dot{\phi}_a, \dot{\psi}_a$  oznaczają odpowiednio prędkości (przyrosty) wzajemnych przesunięć podłużnych i poprzecznych oraz kątów obrotu i skręcenia (por. rys. 18.33).



Rys. 18.33

Całkowitą moc dyssypowaną w obrębie takiego uogólnionego przegubu plastycznego określa wyrażenie:

$$\int_{a-\Delta x}^{a+\Delta x} \dot{D} dx = N \dot{\Lambda}_a + Q \dot{W}_a + M \dot{\phi}_a + \mathfrak{M} \dot{\psi}_a > 0. \quad (18.33)$$

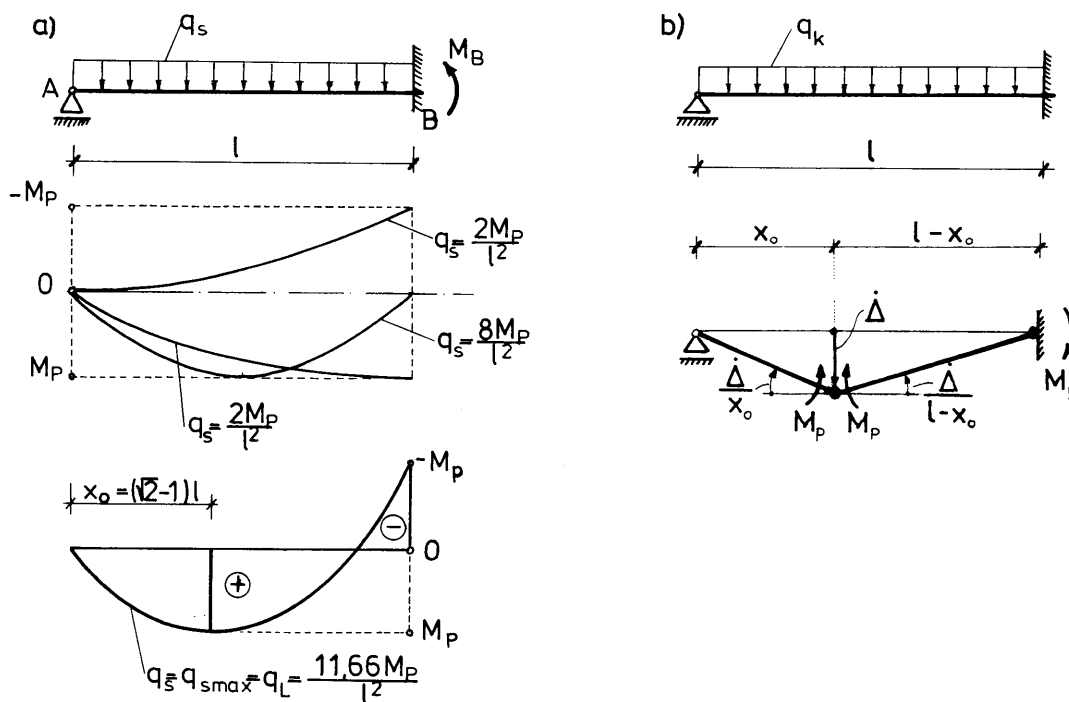
Zwróćmy uwagę, że naprężenia uogólnione  $N$ ,  $Q$ ,  $M$  i  $\mathfrak{M}$  występujące we wzorze (18.33) muszą spełniać warunek plastyczności  $\Phi(N, Q, M, \mathfrak{M}) = 0$ .

W dalszym ciągu będziemy rozważać tylko płaskie konstrukcje prętowe, w których dominującą rolę w procesie uplastycznienia odgrywają momenty zginające. Wpływ sił normalnych jest zazwyczaj niewielki, a wpływ sił poprzecznych objawia się tylko w bardzo szczególnych, nielicznych przypadkach i jest trudny do oszacowania. W zależnościach kinematycznych pomija się na ogół prędkości wydłużenia  $\dot{\Lambda}_a$  i poprzecznego przemieszczenia  $\dot{W}_a$ . Upraszcza to znakomicie analizę deformacji konstrukcji. Pominięcie wydłużeń nie oznacza koniecznie pominięcia wpływu sił normalnych na uplastycznienie; ponieważ można dodatkowo wykorzystać zależność graniczną  $\Phi(N, M) = 0$ .

Jeśli jednak poprzestaniemy tylko na uwzględnieniu momentów zginających, to warunek plastyczności przyjmie postać:

$$|M| = M_P. \quad (18.34)$$

W celu ilustracji twierdzeń o ocenach dolnej i górnej obliczymy obciążenie graniczne belki pryzmatycznej ( $M_P = \text{const}$ ) przedstawionej na rys. 18.34.



Rys. 18.34

Zastosujemy najpierw podejście statyczne. Pole momentów musi spełniać warunki brzegowe i równania równowagi. Wymagają one, by moment był równy zero na podporze  $A$  oraz by był parabolą II stopnia. Poza tym statycznie dopuszczalne pole momentów nie może naruszać warunku plastyczności:  $-M_P \leq M(x) \leq M_P$ . Statycznie dopuszczalnych wykresów momentów jest więc nieskończenie wiele. Niektóre z nich podano na rys. 18.34a. Zgodnie z twierdzeniem o ocenie dolnej rozwiązanie ściśle odpowiada największej wartości obciążenia  $q_s$ . Funkcję  $M(x)$ , spełniającą równanie równowagi, zapiszemy następująco:

$$M(x) = \left( \frac{q_S l}{2} + \frac{M_B}{l} \right) x - \frac{q_S x^2}{2},$$

gdzie

$M_B$  - oznacza nieznaną moment na podporze  $B$ .

Zadanie polega na znalezieniu  $q_S = q_{S\max}$  przy spełnieniu ograniczeń:

$$-M_P \leq \left( \frac{q_S l}{2} + \frac{M_B}{l} \right) x - \frac{q_S x^2}{2} \leq M_P, \quad 0 \leq x \leq l.$$

Wbrew pozorom tak sformułowany problem nie jest matematycznie elementarny. Jego rozwiązanie można uzyskać metodami wariacyjnymi, metodami programowania matematycznego lub sterowania optymalnego. W rozważanym zadaniu mamy jednak dodatkowe informacje natury fizycznej. Wiadomo, że osiągnięciu nośności graficznej towarzyszy pojawienie się przegubów plastycznych, umożliwiające przejście konstrukcji w mechanizm. Ponieważ układ jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalny, do utworzenia geometrycznie zmiennego mechanizmu zniszczenia muszą powstać dwa przeguby. Jeden z nich odpowiada momentowi ujemnemu na podporze  $B$ , a drugi – dodatniemu w obrębie przęsła belki. Wobec tego

$$M_B = -M_P, \quad M_{\max} = M(x_0) = M_P, \quad 0 < x_0 < l.$$

Wartość  $x_0$  obliczamy z warunku  $M'(x_0) = Q(x_0) = 0$ :

$$x_0 = \frac{1}{2} + \frac{M_B}{q_S l} = \frac{1}{2} - \frac{M_P}{q_S l}.$$

Zatem

$$M_{\max} = M(x_0) = \left( \frac{q_S l}{2} - \frac{M_P}{l} \right) \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{M_P}{q_S l} \right) - \frac{1}{2} q_S \left( \frac{1}{2} - \frac{M_P}{q_S l} \right)^2 = M_P,$$

skąd otrzymujemy równanie kwadratowe ze względu na  $q_S$ :

$$q_S^2 l^4 - 12 q_S l^2 M_P + 4 M_P^2 = 0.$$

Dodatni pierwiastek tego równania jest poszukiwanym obciążeniem granicznym  $q_L$ :

$$q_{S\max} = q_L = \frac{2 M_P}{l^2} (3 + 2\sqrt{2}) = 11,66 \frac{M_P}{l^2}.$$

Wartości tej odpowiada  $x_0 = l(\sqrt{2} - 1)$ .

Dodajmy jeszcze, że w konstrukcjach statycznie wyznaczalnych jest tylko jedno statycznie dopuszczalne pole naprężeń i właśnie ono odpowiada ściślemu rozwiązaniu zadania.

Podejście kinematyczne jest bardziej rozpowszechnione. Rozpatruje się tutaj tylko mechanizm zniszczenia konstrukcji. W rozważanym zadaniu nieokreślone jest tylko położenie przegubu przęsłowego. Kinematycznie dopuszczalne pole prędkości przemieszczeń opisują zależności (rys. 18.34b):

$$\dot{w}(x) = \begin{cases} \frac{x}{x_0} \cdot \dot{\Delta}, & 0 \leq x \leq x_0, \\ \frac{l-x}{l-x_0} \cdot \dot{\Delta}, & x_0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

Wobec tego równanie mocy dyssypowanej przyjmuje postać:

$$q_K x_0 \cdot \frac{\dot{\Delta}}{2} + q_K (l - x_0) \cdot \frac{\dot{\Delta}}{2} = M_P \cdot \frac{\dot{\Delta}}{x_0} + 2 M_P \cdot \frac{\dot{\Delta}}{l - x_0},$$

skąd

$$q_K = q_K(x_0) = \frac{2 M_P}{l} \cdot \left( \frac{1}{x_0} + \frac{2}{l - x_0} \right).$$

Z twierdzenia o ocenie górnej wiadomo, że każdej „złej” kinematyce odpowiada obciążenie graniczne większe od wartości prawdziwej. W celu uzyskania rozwiązania ścisłego trzeba więc obrać takie  $x_0$ , które minimalizuje wartość  $q_K$ . Z warunku istnienia ekstremum  $dq_K / dx_0 = 0$  otrzymujemy:

$$\frac{dq_K}{dx_0} = \frac{2 M_P}{l} \cdot \left[ -\frac{1}{x_0^2} + \frac{2}{(l - x_0)^2} \right] = 0,$$

skąd

$$x_0^2 + 2lx_0 - l^2 = 0 \quad \text{oraz} \quad x_0 = l(\sqrt{2} - 1) > 0.$$

Wynik ten pokrywa się z rozwiązaniem ścisłym uzyskanym metodą statyczną. Ponieważ

$$\frac{d^2 q_K}{dx_0^2} = \frac{2 M_P}{l} \cdot \left[ \frac{2}{x_0^3} + \frac{4}{(l - x_0)^3} \right] > 0,$$

więc

$$q_K(x_0) = q_{K \min} = q_L = \frac{2 M_P}{l^2} \cdot (3 + 2\sqrt{2}).$$

Z rozwiązanego przykładu widać, że wyznaczanie obciążenia granicznego jest stosunkowo łatwe. Dużo większe trudności napotykamy jednak, gdy mechanizmy zniszczenia mają większą liczbę stopni swobody oraz w przypadkach konstrukcji o zmiennych przekrojach, w których  $M_P = M_P(x)$ .

### 18.3.6. Wyznaczanie nośności granicznej metodą superpozycji mechanizmów podstawowych

Rozwiązanie zupełne problemu nośności granicznej wymaga:

- spełnienia równań równowagi wewnętrznej,
- nieprzekroczenia warunku plastyczności ( $\Phi \leq 0$ ),
- przekształcenia konstrukcji w mechanizm.

Aby  $n$ -krotnie statycznie niewyznaczalna konstrukcja prętowa przekształciła się w mechanizm o co najmniej jednym stopniu swobody, warunek graniczny  $\Phi = 0$  musi być spełniony w co najmniej  $n + 1$  przekrojach. W konstrukcji zginanej powinno zatem wystąpić co najmniej  $r = n + 1$  przegubów plastycznych typu „zgięciowego”, jeżeli występuje wyczerpanie nośności konstrukcji jako całości. Gdy  $r < n + 1$ , to w pewnych przypadkach może również zdarzyć się, że tylko fragment konstrukcji przekształci się w mechanizm i wystąpi zniszczenie częściowe.

W przypadku *zniszczenia całkowitego*, gdy liczba przegubów

$$(a) \quad r = n + 1,$$

wykres momentów zginających jest jednoznacznie określony, bo  $n + 1$  związków pozwala wyznaczyć  $n$  wielkości nadliczbowych oraz mnożnik obciążenia granicznego  $\mu$ .

W przypadku *zniszczenia częściowego*, gdy liczba przegubów

$$(b) \quad r < n + 1,$$

pole sił wewnętrznych jest określone tylko w tych częściach konstrukcji, które przekształciły się w mechanizm. W obszarach sztywnych pole sił wewnętrznych nie jest określone jednoznacznie.

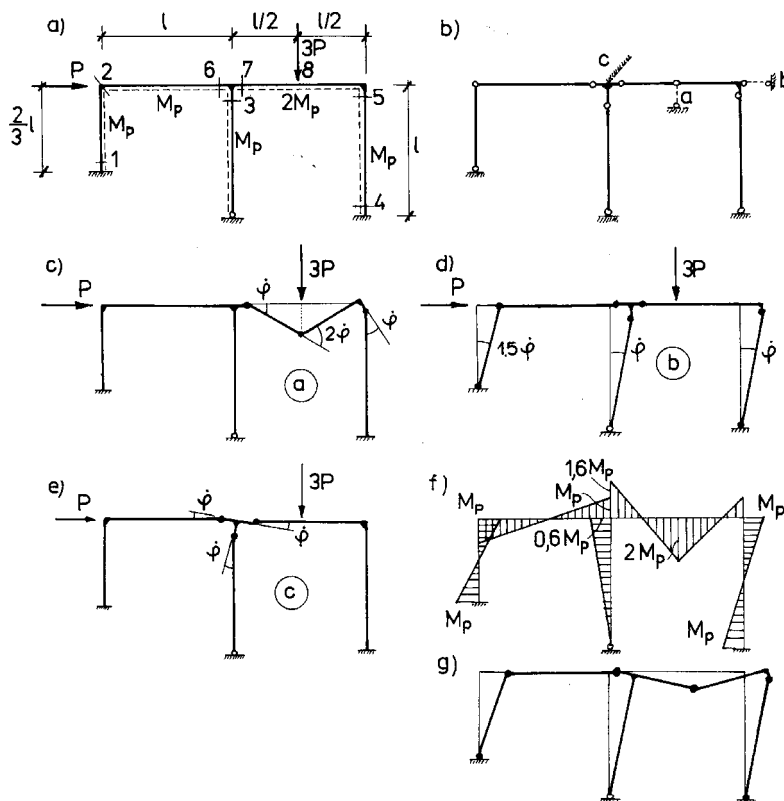
Rozważmy ramę zbudowaną z prętów pryzmatycznych. Schemat statyczny i obciążenie ramy przedstawia rys. 18.35a. Łatwo stwierdzić, że rama jest 5-krotnie statycznie niewyznaczalna ( $n = 5$ ). Pole momentów jest całkowicie opisane, jeżeli są znane momenty zginające w punktach 1, 2, 3, ..., 8. Punkty te określają położenie tzw. przekrojów krytycznych, w których mogą wytworzyć się przeguby plastyczne. Przyjmijmy wstępnie, że we wszystkich przekrojach krytycznych występują przeguby. Uzyskany w ten sposób układ geometrycznie zmienny jest złożony z idealnie sztywnych prętów połączonych między sobą przegubami (por. rys. 18.35b). Układ ten ma trzy stopnie swobody, gdyż właśnie tyle więzów trzeba wprowadzić w celu jego unieruchomienia. Więzy te oznaczono na rys. 18.35b literami *a*, *b* i *c*. Usuwać kolejno każdy z tych więzów otrzymujemy trzy niezależne mechanizmy, zwane **mechanizmami podstawowymi**. Mechanizmy te przedstawiają rys. 18.35c, d, e.

Liczbę mechanizmów podstawowych można ustalić jeszcze w inny sposób. Jeżeli liczba przekrojów krytycznych wynosi  $r$ , a stopień statycznej niewyznaczalności jest równy  $n$ , to liczba niezależnych mechanizmów wynosi:

$$(c) \quad s = r - n.$$

W rozważanym zadaniu  $s = 8 - 5 = 3$ , co pokrywa się z rezultatem uzyskanym wyżej.

Zasadniczy sens omawianej metody polega na wykorzystaniu spostrzeżenia, że rozwiązanie zupełne problemu nośności granicznej odpowiada pewnemu mechanizmowi zniszczenia, który można przedstawić jako superpozycję niezależnych mechanizmów podstawowych. Na podstawie twierdzenia o ocenie górnej wiadomo, że dla każdej „złej” kinematyki zniszczenia otrzymujemy obciążenie większe od ścisłej wartości granicznej. Wobec tego należy znaleźć taką kombinację liniową mechanizmów podstawowych, by obciążenie niszczące było najmniejsze. Mechanizmy łączymy w taki sposób, aby zamykało się możliwie dużo przegubów przy nie malejącej mocy obciążeń zewnętrznych.



Rys. 18.35

Lp.	Mecha- nizm	Momenty graniczne i prędkości kątów obrotu								Moc		Obciążenie graniczne
		$M_p$						$2M_p$		$\dot{L}$	D	
		1	2	3	4	5	6	7	8			
1	a					-1		-1	2	1,5Pl	7M <sub>p</sub>	4,67 M <sub>p</sub> /l
2	b	-1,5	1,5	-1	1	-1				Pl	6M <sub>p</sub>	6,00 M <sub>p</sub> /l
3	c			1			-1	1		—	4M <sub>p</sub>	—
4	a + c			1		-1	-1		2	1,5Pl	7M <sub>p</sub>	4,67 M <sub>p</sub> /l
5	b + c	-1,5	1,5		1	-1	-1	1		Pl	8M <sub>p</sub>	8,00 M <sub>p</sub> /l
6	a+b+c	-1,5	1,5		1	-2	-1		2	2,5Pl	11M <sub>p</sub>	4,40 M <sub>p</sub> /l

Rys. 18.35 (tablica)

W metodzie superpozycji mechanizmów podstawowych obciążenia niszczące oblicza się zazwyczaj tabelarycznie, przyrównując moc obciążeń zewnętrznych  $\dot{L}$  z mocą sił wewnętrznych  $\dot{D}$  dla poszczególnych mechanizmów podstawowych, a następnie dla mechanizmów złożonych. Obliczymy przykładowo obciążenie niszczące dla mechanizmu *a*:

$$3P\dot{\varphi} \cdot \frac{1}{2} = -\dot{\varphi}(-M_{P5}) - \dot{\varphi}(-M_{P7}) + 2\dot{\varphi}M_{P8}.$$

Ponieważ  $M_{P5} = M_P$ , a  $M_{P7} = M_{P8} = 2M_P$ , zatem

$$P = \frac{14}{3} \frac{M_P}{l} = 4,67 \frac{M_P}{l}.$$

Komplet obliczeń zawiera tablica zamieszczona na rys. 18.35. W tablicy tej zamiast prędkości kątów obrotu wpisano jedynie współczynniki stojące przy  $\dot{\varphi}$ . Zasada znakowania prędkości kątów jest taka sama jak zasada znakowania momentów zginających. W ten sposób w każdym przegubie dyssypacji  $M_{Pi} \cdot \dot{\varphi}_i$  jest nieujemna.

Jak widać z tablicy, najmniejsza wartość obciążenia granicznego odpowiada mechanizmowi zniszczenia będącego superpozycją wszystkich trzech mechanizmów podstawowych *a + b + c*. Przekonamy się, że jest to rozwiązanie zupełne. W tym celu trzeba sporządzić wykres momentów zginających. Momenty zginające w punktach 1, 2, 3, 4, 6 i 8 są znane, bo ich wartości bezwzględne są równe momentom granicznym, a znaki odpowiadają znakom prędkości kątów obrotu w tych przekrojach. Momenty zginające w punktach 3 i 7 można wyznaczyć z równań pracy wirtualnej lub z równań równowagi. Równanie pracy wirtualnej odpowiadające mechanizmowi *a* przybiera postać:

$$3P \cdot \frac{1}{2} \bar{\varphi} + M_7 \cdot \bar{\varphi} - 2M_8 \cdot \bar{\varphi} + M_5 \cdot \bar{\varphi} = 0,$$

skąd

$$M_7 = 2M_8 - M_5 - \frac{3}{2}Pl = 2(-2M_P) - (-M_P) - \frac{3}{2}Pl = 5M_P - \frac{3}{2} \cdot 4,40M_P = -1,6M_P.$$

Moment zginający w punkcie 3 obliczymy z równania równowagi węzła:

$$\begin{aligned} M_3 + M_7 - M_6 &= 0, \\ M_3 - (-1,6M_P) + (-M_P) &= 0,6M_P. \end{aligned}$$

Wartości obliczonych wyżej momentów nie naruszają warunku plastyczności, bo  $|M_7| < M_{P7} = 2M_P$  oraz  $|M_3| < M_{P3} = M_P$ . Ostateczny wykres momentów zginających przedstawiono na rys. 18.35f, a mechanizm zniszczenia na rys. 18.35g. Jak widać, uzyskane rozwiązanie spełnia wszystkie wymagania stawiane rozwiązaniu zupełnemu.

### 18.3.7. Ogólna metoda obliczania nośności granicznej ram płaskich

Naszukujemy pewną dość ogólną metodę obliczania nośności granicznej płaskich układów prętowych poddanych zginaniu. Wprowadzimy uproszczenie polegające na tym, że obciążenie konstrukcji stanowią tylko siły skupione. Za węzły obliczeniowe (przekroje krytyczne) będziemy uważać punkty przyłożenia obciążeń, skokowej zmiany przekroju, załamania osi, punkty przywęzłowe oraz przekroje przy podporach utwierdzonych. Odcinki międzywęzłowe składają się z prętów pryzmatycznych.

Mnożnik obciążenia granicznego  $\mu_L$ , zgodnie z twierdzeniem o ocenie górnej, wynosi:

$$(a) \quad \mu_L = \min \frac{\sum_{i=1}^r M_{Pi} \cdot |\dot{\phi}_i|}{\sum_{j=1}^s P_j \cdot \dot{\Delta}_j},$$

gdzie  $M_{Pi}$  jest momentem plastycznym przekroju  $i$ ,  $\dot{\phi}_i$  – prędkością kąta obrotu w przegubie  $i$ ,  $\dot{\Delta}_j$  – rzutem prędkości przemieszczenia punktu  $j$  na kierunek działania obciążenia skupionego  $P_j$ ,  $r$  – liczbą przekrojów krytycznych,  $s$  – liczbą punktów przyłożenia obciążeń  $P_j$ . Ponieważ prędkości przemieszczeń  $\dot{\Delta}_j$  są kinematycznie dopuszczalne, więc moc obciążeń zewnętrznych musi być dodatnia:

$$(b) \quad \sum_{j=1}^s P_j \cdot \dot{\Delta}_j > 0.$$

Powyższe sformułowanie można przedstawić jeszcze inaczej:

*Znaleźć*

$$(c) \quad \frac{1}{\mu_L} = \max \frac{\sum_{j=1}^s P_j \cdot \dot{\Delta}_j}{M_0},$$

*przy czym*

$$(d) \quad M_0 = \sum_{i=1}^r M_{Pi} \cdot |\dot{\phi}_i|.$$

Zgodnie z zasadą prac wirtualnych:

$$(e) \quad \sum_{j=1}^s P_j \cdot \dot{\Delta}_j = \sum_{i=1}^r M_i \cdot \dot{\phi}_i,$$

gdzie  $M_i$  oznacza dowolne pole momentów zginających będących w równowadze z obciążeniem  $P_j$ . Na przykład może to być układ momentów odpowiadających schematowi statycznie wyznaczalnemu. Wobec równania (e) zależności (c) zapiszemy następująco:

$$(f) \quad \frac{1}{\mu_L} = \max \frac{\sum_{i=1}^r M_i \cdot \dot{\phi}_i}{M_0}.$$

Jeżeli rama jest  $n$ -krotnie statycznie niewyznaczalna, to można zbudować  $n$  niezależnych rozkładów momentów pochodzących od sił nadliczbowych, zwanych również momentami resztkowymi lub własnymi. Momenty te są w równowadze z zerowym obciążeniem zewnętrznym w układzie statycznie niewyznaczalnym. Oznaczmy przez  $M_{ik}$  wartość momentu własnego w punkcie  $i$  wywołaną działaniem nadliczbowej  $X_k$ . Wówczas na podstawie równania pracy wirtualnej dostaniemy  $n$  równań zgodności kątów:

$$(g) \quad \sum_{i=1}^r M_{ik} \cdot \dot{\phi}_i = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Wprowadzimy wielkości bezwymiarowe:

$$(h) \quad \begin{cases} m_i = M_i / M_{Pi}, \\ m_{ik} = M_{ik} / M_{Pi}, \\ f_i = \dot{\phi}_i \cdot M_{Pi} / M_0. \end{cases}$$

Zadanie obliczania nośności granicznej ram płaskich formułujemy następująco: *Znaleźć taki wektor prędkości kątów  $f_i$ , by*

$$(i) \quad \sum_{i=1}^r m_i f_i \rightarrow \max \quad \text{przy ograniczeniach} \quad \sum_{i=1}^r m_{ik} f_i = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n; \quad \sum_{i=1}^r |f_i| = 1.$$

Jeżeli przyjmiemy, że

$$(j) \quad \begin{cases} f_i = f_i^+ - f_i^-, \\ \text{gdzie } f_i^+ \geq 0, f_i^- \geq 0 \quad \text{oraz} \quad f_i^+ \cdot f_i^- = 0, \end{cases}$$

to sformułowanie (i) da się przedstawić jako zadanie programowania liniowego, mającego bogatą bibliotekę w ośrodkach komputerowych. Zależność:  $f_i^+ \cdot f_i^- = 0$  nosi nazwę warunku ortogonalności i należy ją rozumieć jako informację, że w konkretnym wypadku realizuje się bądź kąt  $f_i^+$  bądź kąt  $f_i^-$ . Poszukiwany mnożnik obciążenia granicznego otrzymujemy ze wzoru (f) po wykorzystaniu oznaczeń (h):

$$(k) \quad \mu_L = \frac{1}{\sum_{i=1}^r m_i \cdot f_i}.$$

Jak widać, w celu przygotowania danych do obliczeń trzeba znać rozwiązanie układu podstawowego statycznie wyznaczalnego obciążonego siłami  $P_j$  oraz wykresy momentów pochodzących od sił nadliczbowych  $X_k = 1$ .

W celu zilustrowania przedstawionej metody rozwiążemy przykład liczbowy. Temat zadania oraz wykresy momentów w przyjętym układzie statycznie wyznaczalnym podano na rysunku 18.36.

Dla wygody rachunków oraz zachowania zgodności wymiarów przyjęto, że  $X_1 = M_P / l$  a  $X_2 = M_P$ . Na podstawie wzorów (h) i rys. 18.36 obliczamy wartości  $m_i$  oraz  $m_{ik}$ :

$$\begin{aligned} m_1 &= 0,50, & m_2 &= 0,50, & m_3 &= 0, & m_4 &= 0, \\ m_{11} &= -0,50, & m_{21} &= -0,50, & m_{31} &= -1, & m_{41} &= 0, \\ m_{12} &= 0, & m_{22} &= 0,25, & m_{32} &= 1, & m_{42} &= 1. \end{aligned}$$

Sformułowanie (i) przybiera postać: *Znaleźć  $\max 0,5 (f_1 + f_2)$  przy ograniczeniach*

$$\begin{aligned} -0,5f_1 - 0,5f_2 - f_3 &= 0 \\ 0,25f_2 + f_3 + f_4 &= 0, \\ |f_1| + |f_2| + |f_3| + |f_4| &= 1. \end{aligned}$$

Po weliminowaniu z dwóch pierwszych ograniczeń  $f_3$  i  $f_4$  otrzymujemy:

$$|f_1| + |f_2| + |-0,5(f_1 + f_2)| + |-0,25(f_1 + f_2)| = 1.$$

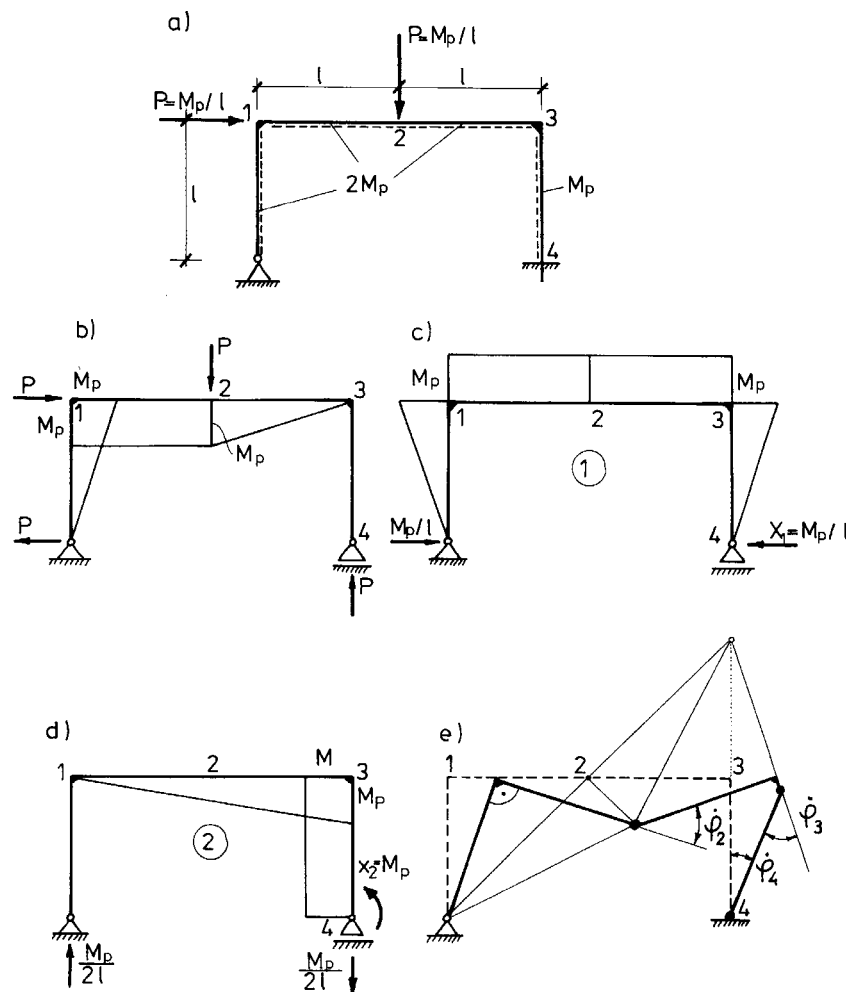
Zależność powyższa przedstawia szesnaście równań liniowych. Każde z nich odpowiada innej kombinacji znaków wyrażeń występujących pod symbolami wartości bezwzględnych. Analiza tych równań prowadzi do rozwiązania maksymalizującego sumę  $f_1 + f_2$ :

$$f_1 = 0, \quad f_2 = \frac{1}{1,75}, \quad f_3 = -\frac{1}{3,5}, \quad f_4 = \frac{1}{7}.$$

Wobec powyższego mnożnik obciążenia granicznego  $\mu_L$ , stosownie do wzoru (k)

$$\mu_L = \frac{1}{0,5 \cdot \frac{1}{1,75}} = 3,5.$$

Mechanizm zniszczenia ma jeden stopień swobody, bo przegub w punkcie 1 jest zamknięty ( $\phi_1 = 0$ ). Kinematykę tego mechanizmu objaśnia rys. 18.36e.

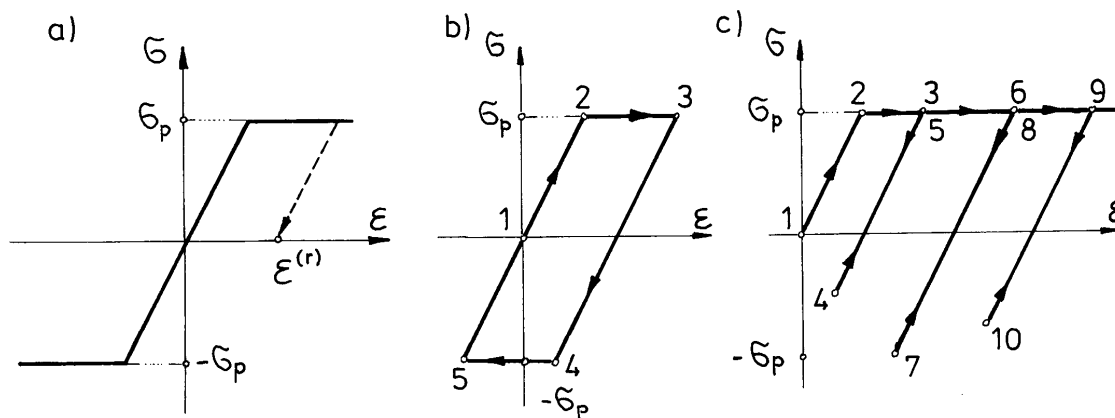


Rys. 18.36

## 18.4. O PRZYSTOSOWANIU KONSTRUKCJI SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYCH

### 18.4.1. Istota problemu

Problem przystosowania (ang. *shakedown*) pojawia się w konstrukcjach sprężysto-plastycznych poddanych obciążeniom zmiennym. Obciążenia te w rzeczywistości nie zmieniają się proporcjonalnie. W takich przypadkach trzeba uwzględnić fakt, że konstrukcja częściowo uplastyczniona po obciążeniu może ponownie reagować czysto sprężysto.



Rys. 18.37

W celu przedstawienia istoty problemu posłużymy się modelem ciała idealnie sprężysto-plastycznego bez wzmocnienia (rys. 18.37a). Podczas cyklicznego obciążenia odkształcenia plastyczne mogą być przemienne, mogą pojawiać się i znikać w każdym cyklu (rys. 18.37b) lub przyrastać w każdym cyklu, powodując ciągłą kumulację deformacji trwałych, czyli tzw. *ratchetting* (rys. 18.37c).

W efekcie przemennych odkształceń plastycznych następuje zniszczenie na skutek niskocyklowego zmęczenia plastycznego po niewielkiej liczbie cykli (por. wzór *Coffina* p. 4.8). Zjawisko to (tzw. *alternating plasticity*) obserwujemy np. w czasie wielokrotnego zginania cienkiego drutu; po kilkunastu zgięciach, w których powstają deformacje trwałe (plastyczne), drut pęka.

Z kolei, gdy w każdym cyklu przyrastają trwałe odkształcenia plastyczne, obserwujemy nieograniczony wzrost przemieszczeń (tzw. *incremental collapse*), równoznaczny z utratą właściwości użytkowych konstrukcji. Problem ten jest szczególnie widoczny, gdy działają obciążenia stałe, którym towarzyszy cykliczna zmiana temperatury.

Zmienne obciążenie konstrukcji jest opisane przez tzw. program obciążenia, czyli siły powierzchniowe i masowe jako funkcje położenia i czasu:

$$p_i = p_i(x, t), \quad G_i = G_i(x, t). \quad (18.35)$$

Przystosowanie konstrukcji do danego programu obciążenia występuje wtedy, gdy po pewnym czasie ustabilizuje się pewne pole odkształceń trwałych  $\varepsilon_{ij}^{(r)}$ . Odkształcenia te powodują wytworzenie się niezmiennego w czasie pola naprężeń reszkowych  $\sigma_{ij}^{(r)}$ , natomiast reakcja konstrukcji na obciążenia jest czysto sprężysta. Wobec tego, zgodnie z twierdzeniem *Melana* z 1938 roku przystosowanie ma miejsce wówczas, gdy suma

$$\sigma_{ij}^E(x, t) + \sigma_{ij}^{(r)}(x)$$

nie narusza nigdzie warunku plastyczności, tzn. gdy

$$\Phi[\sigma_{ij}^E(x, t) + \sigma_{ij}^{(r)}(x)] \leq 0. \quad (18.36)$$

Symbolem  $\sigma_{ij}^E(x, t)$  oznaczono naprężenia wywołane przez dany program obciążenia i obliczone jak dla ciała idealnie sprężystego.

Kryterium (18.36) ma charakter statyczny. W podejściu kinematycznym postuluje się, by energia zużyta na odkształcenia plastyczne w całym okresie pracy konstrukcji była wartością skończoną:

$$\int_V \left[ \int_0^\infty \sigma_{ij} \cdot \dot{\varepsilon}_{ij}^P dt \right] dV < \infty, \quad (18.37)$$

gdzie

$\dot{\varepsilon}_{ij}^P$  - oznacza prędkość odkształceń plastycznych,

$\sigma_{ij}$  - jest polem naprężeń stowarzyszonym z polem prędkości odkształceń plastycznych.

Z kryterium kinematycznego (18.37) wynika twierdzenie *Neala* z 1950 roku<sup>\*)</sup> dotyczące belek i ram zginanych.

#### 18.4.2. Przystosowanie belek i ram

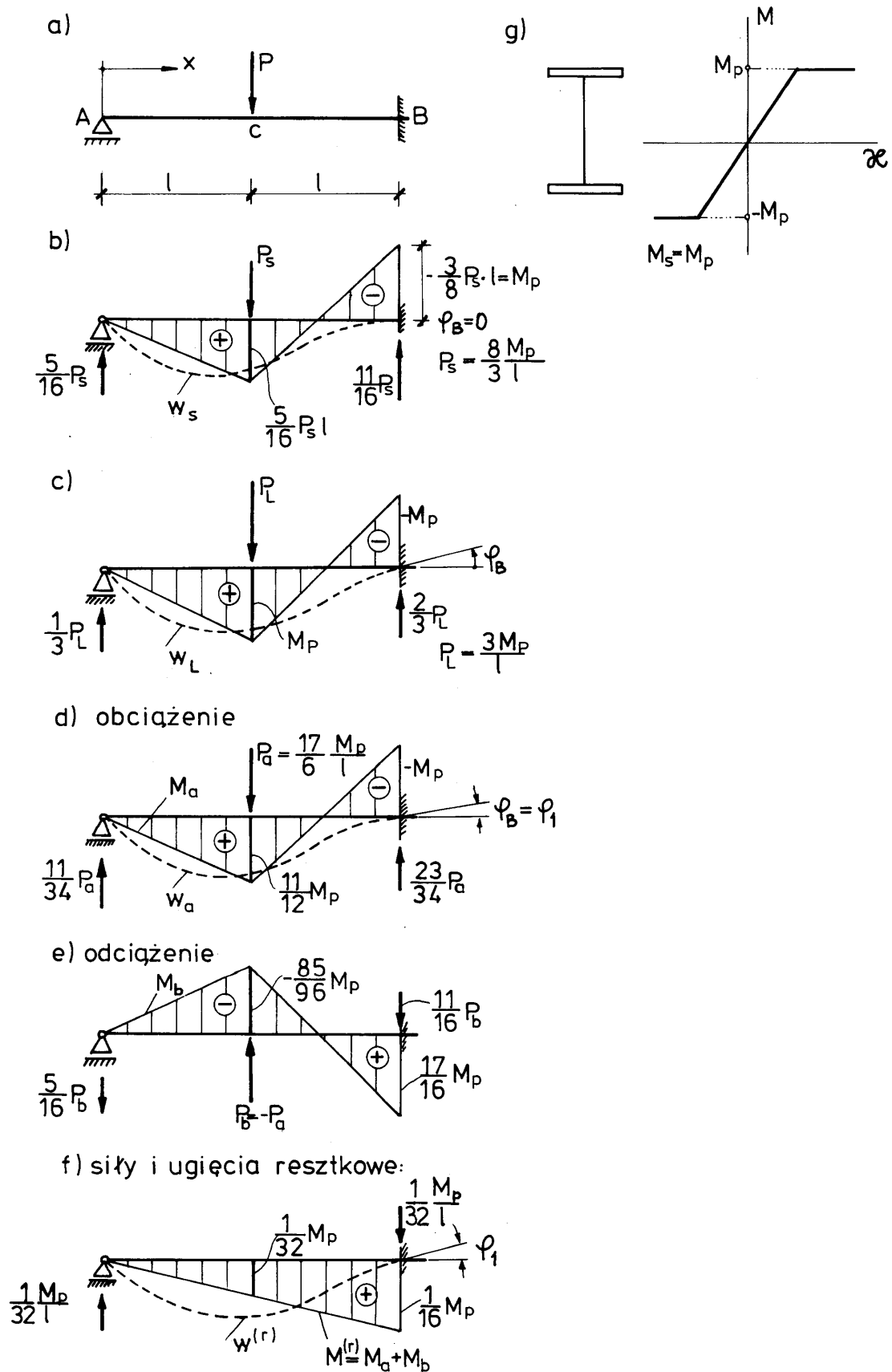
Twierdzenia o przystosowaniu zilustrujemy na przykładzie zginanych układów belkowych. Jak wiadomo, po zdjęciu obciążenia w częściowo uplastycznionej konstrukcji sprężysto-plastycznej pojawiają się reszkowe odkształcenia  $\varepsilon^{(r)}$  i naprężenia  $\sigma^{(r)}$ . W układach statycznie wyznaczalnych w danym przekroju pręta naprężenia reszkowe tworzą układ samorównoważący się (por. p. 18.2). Oznacza to, że reszkowe siły wewnętrzne (momenty zginające, siły normalne itd.) są równe zeru.

W układach statycznie niewyznaczalnych zazwyczaj tak nie jest. Prześledzimy obecnie obciążenie i odciążenie pryzmatycznej belki statycznie niewyznaczalnej obciążonej siłą skupioną  $P = P_a$  (rys. 18.38a). Przekrój belki jest idealnym dwuteownikiem. W związku z tym moment sprężysty  $M_S$  jest równy momentowi plastycznemu  $M_P$ , a wykres zależności  $M(k)$  jest podobny do wykresu  $\sigma(\varepsilon)$  (rys. 18.38g). Siła  $P_a$  jest tak dobrana, by  $P_S < P_a < P_L$ , gdzie  $P_S$  oznacza siłę wywołującą pierwsze uplastycznienie konstrukcji (na podporze  $B$ , por. rys. 18.38b), a  $P_L$  – obciążenie graniczne układu (rys. 18.38c).

W rozważanym zadaniu  $P_S = 2,67M_P/L$ , a  $P_L = 3M_P/L$ . Przyjmiemy, że  $P_a = 17M_P/(6l) = 2,83M_P/l$ . Podczas obciążenia siłą  $P_a$  odkształcenia w całej belce są sprężyste, z wyjątkiem przekroju utwierdzonego na podporze  $B$ , gdzie na skutek uplastycznienia wystąpił kąt obrotu  $\varphi_a$  (rys. 18.38d). Odciążenie belki jest sprężyste i odpowiada obciążeniu siłą  $P_b = -P_a = -2,83M_P/l$ . Przebieg momentów zginających pochodzących od odciążenia  $M_b$  przedstawia rys. 18.38e. Ostatecznie po odciążeniu pozostaje pole momentów reszkowych  $M^{(r)} = M_a + M_b$  i ugięcie reszkowe  $w^{(r)} = w_a + w_b$  (rys. 18.38f).

Z omówionego przykładu wynika, że pole momentów reszkowych z uwagi na brak obciążenia jest w równowadze z zerowym obciążeniem, a kształt wykresu odpowiada momentowi pochodzącemu od działania siły nadliczbowej (np. reakcji  $V_A$  lub momentu utwierdzenia  $M_B$ ). Wniosek powyższy obejmuje również, jako przypadek szczególny, układy statycznie wyznaczalne, w których zerowemu obciążeniu towarzyszy zawsze zerowe pole sił wewnętrznych. W układach o wyższym stopniu statycznej niewyznaczalności reszkowe pole sił wewnętrznych jest kombinacją liniową sił wewnętrznych wywołanych przez poszczególne siły nadliczbowe.

<sup>\*)</sup> Twierdzenie *Neala* podamy w p. 18.4.2. Twierdzenie to uogólnił na ośrodek ciągły *Koiter* w 1956 roku.  
Andrzej Gawęcki - „Mechanika materiałów i konstrukcji prętowych” 2003r.



Rys. 18.38

W zginanych belkach i ramach o przekrojach idealnie dwuteowych ( $M_S = M_P$ ) przystosowanie zachodzi wówczas, gdy po pewnym czasie reakcja konstrukcji będzie czysto sprężysta, tzn. gdy

$$\left. \begin{aligned} \max M_i^E + M_i^{(r)} &\leq M_P, \\ \min M_i^E + M_i^{(r)} &\geq -M_P \end{aligned} \right\} \quad (18.38)$$

i jednocześnie

$$\max M_i^E - \min M_i^E \leq 2M_P. \quad (18.39)$$

Spełnienie nierówności (18.38) zabezpiecza przed zniszczeniem przyrostowym, a spełnienie nierówności (18.39) zabezpiecza przed zniszczeniem niskocyklowym (przemennym). W obu nierównościach  $\max M_i^E$  oraz  $\min M_i^E$  oznaczają rzędne momentów zginających w przekroju  $i$  obliczone jak dla konstrukcji idealnie sprężystej. Układ momentów resztkowych  $M_i^{(r)}$  powstaje w cyklach plastycznej deformacji konstrukcji w procesie stabilizacji odkształceń trwałych. W przypadku przystosowania pole momentów resztkowych pozostaje już niezmiennie w czasie.

Momenty resztkowe są kombinacją liniową momentów pochodzących od sił nadliczbowych  $X_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ):

$$M_i = \sum_{j=1}^n X_j \cdot m_{ij}, \quad (18.40)$$

gdzie  $m_{ij}$  oznacza moment w przekroju  $i$  wywołany przez działanie siły nadliczbowej  $X_j = 1$ .

Zależność (18.38) jest treścią twierdzenia *Melana* w zastosowaniu do konstrukcji zginanych. Odpowiednikiem tego twierdzenia w podejściu kinematycznym jest twierdzenie *Neala*:

*Konstrukcja przystosuje się do danego programu obciążenia, jeżeli istnieje taki mechanizm ruchu plastycznego, że jest spełniona nierówność:*

$$\sum_{i=1}^r M_i^* \cdot \dot{\phi}_i \leq \sum_{i=1}^r M_{pi} \cdot |\dot{\phi}_i|, \quad (18.41)$$

gdzie

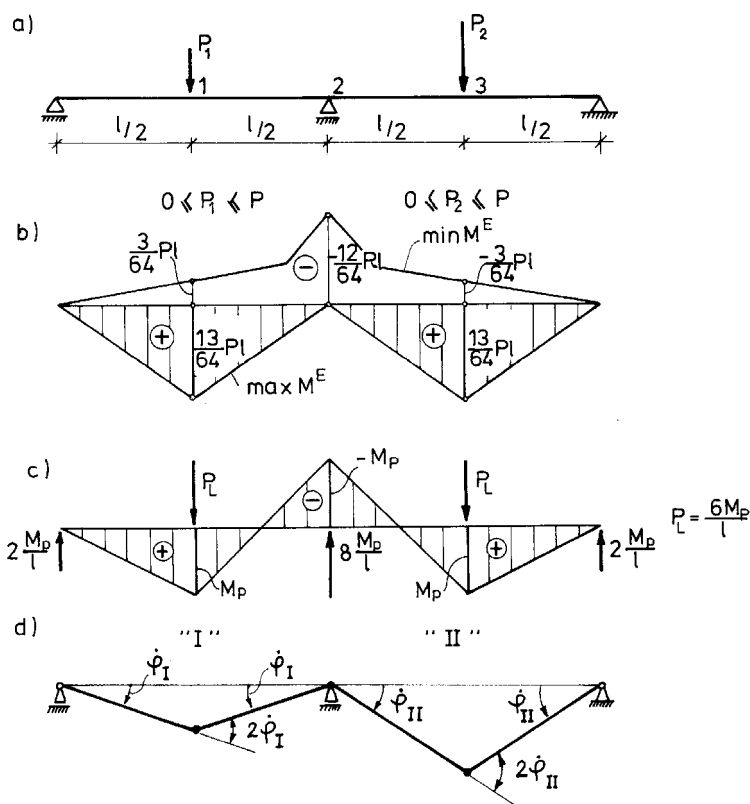
$$M_i^* = \begin{cases} \max M_i^E, & \text{gdy } \dot{\phi}_i > 0, \\ \min M_i^E, & \text{gdy } \dot{\phi}_i < 0. \end{cases} \quad (18.42)$$

Twierdzenie to dotyczy tylko zniszczenia przyrostowego.

Na zakończenie dodajmy, że problem przystosowania konstrukcji jako uogólnienie problemu nośności granicznej można również sformułować w kategoriach programowania liniowego, co pozwala wykorzystać gotowe procedury komputerowe.

## 18.4.3. Przykład \*)

Rozważmy pryzmatyczną belkę ciągłą przedstawioną na rys. 18.39a. Przekrój belki jest idealnie dwuteowy.



Rys. 18.39

W praktyce przebieg obciążeń w czasie nie jest bliżej znany. Do rozwiązywania zadań przystosowania wystarczy jednak podać tylko granice (amplitudy) zmienności obciążeń w postaci nierówności:

$$P_j^- \leq P_j \leq P_j^+.$$

W rozważanym zadaniu przyjmijmy, że

$$0 \leq P_1 \leq P, \quad 0 \leq P_2 \leq P.$$

Obwiednie momentów  $\max M_i^E$  i  $\min M_i^E$  można ustalić za pomocą tablic dla sprężystych belek ciągłych. Ekstremalne momenty podano w tablicy II. Wykres obwiedni przedstawia rys. 18.39b.

Tablica II

Obciążenie	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
$P_1 = P$ $P_2 = 0$	$\frac{13}{64} Pl$	$-\frac{6}{64} Pl$	$-\frac{3}{64} Pl$
$P_1 = 0$ $P_2 = P$	$-\frac{3}{64} Pl$	$-\frac{6}{64} Pl$	$\frac{13}{64} Pl$
$\max M_i^E$	$\frac{13}{64} Pl$	0	$\frac{13}{64} Pl$
$\min M_i^E$	$-\frac{3}{64} Pl$	$-\frac{12}{64} Pl$	$-\frac{3}{64} Pl$

\*) Przykład ten prezentował J.A.König.

Nośność sprężystą, czyli maksymalną wartość siły  $P$  powodującą pierwsze uplastycznienie, wyznaczmy z wykresu obwiedni momentów:

$$\max |M^E| = \frac{13}{64} P_S L = M_S = M_P,$$

skąd

$$P_S = \frac{64}{12} \cdot \frac{M_P}{L} = 4,923 M_P / L.$$

Obciążenie graniczne belki można ustalić, poszukując takiej kombinacji niezależnych mechanizmów zniszczenia I i II (rys. 18.39d), by siła  $P_L$  była najmniejsza. Ta sama wartość odpowiada wykresowi momentów z rys. 18.39c:

$$P_L = 6M_P/L.$$

Wyznamy teraz największą wartość amplitudy obciążenia  $P$ , wynikającą z twierdzeń o przystosowaniu. Dla zniszczenia niskocyklowego według wzoru (18.39) mamy:

$$\frac{13}{64} Pl - \left( -\frac{3}{64} Pl \right) \leq 2M_P,$$

skąd

$$P \leq 8 M_P / L.$$

Zniszczenie przyrostowe zbadamy za pomocą twierdzenia *Neala* (18.41). Przyjmując odpowiedni mechanizm zniszczenia kierujemy, się tym, by moc dysypowana wewnątrz konstrukcji była możliwie najmniejsza. Zachodzi to wówczas, gdy przyjmiemy jeden z niezależnych mechanizmów zniszczenia podanych na rys. 18.39d. Przykładowo dla mechanizmu II otrzymujemy ( $\dot{\phi}_1 = 0$ ,  $\dot{\phi}_2 = -\dot{\phi}_{II}$ ,  $\dot{\phi}_3 = 2\dot{\phi}_{II}$ ):

$$\frac{13}{64} Pl \cdot 2\dot{\phi}_{II} + \left( -\frac{12}{64} Pl \right) \cdot (-\dot{\phi}_{II}) \leq M_P \cdot 0 + (-M_P) \cdot (-\dot{\phi}_{II}) + M_P \cdot 2\dot{\phi}_{II},$$

skąd

$$P \leq \frac{3 \cdot 64 M_P}{38L} = 5,053 M_P / L.$$

Porównując wartości  $P_S$ ,  $P_L$  i  $P$ , stwierdzamy, że zachodzi nierówność:

$$P_S < P < P_L. \quad (18.43)$$

Nie jest to przypadkowe, gdyż nośność z uwzględnieniem przystosowania z reguły jest nieco większa (lub równa) od nośności sprężystej i – oczywiście – nie może być większa od nośności granicznej.

## 18.5. MATERIAŁY O WŁASNOŚCIACH REOLOGICZNYCH

### 18.5.1. Wprowadzenie

W latach dwudziestych bieżącego stulecia nastąpił bardzo gwałtowny rozwój przemysłu tworzyw sztucznych. W trakcie badań wytrzymałościowych tych tworzyw zaobserwowano „płynięcie” materiału nawet przy bardzo małych naprężeniach. Początkowo proces ten utożsamiano z płynięciem plastycznym, odpowiadającym tarcia suchemu. Bliższa analiza wyników badań wykazała jednak, że zarejestrowane zjawisko ma cechy płynięcia lepkiego, charakterystycznego dla cieczy. Lepkość szczególnie wyraźnie objawia się właśnie w tworzywach sztucznych oraz w betonach i gruntach. W metalach efekty deformacji lepkich występują przede wszystkim w wysokich temperaturach, aczkolwiek wpływ ich trzeba uwzględnić również w temperaturach pokojowych, np. w betonowych konstrukcjach wstępnie sprężonych. Opisanie materiałów wykazujących oprócz innych również cechy ciał lepkich zajmuje się reologia (*reo* – z

greckiego: płynąć). Ściślej biorąc, reologia jest syntezą teorii sprężystości, teorii plastyczności i hydro-mechaniki. Prawa fizyczne w złożonych ciałach reologicznych można zapisać w postaci:

$$F(\sigma, \dot{\sigma}, \varepsilon, \dot{\varepsilon}, t, T) = 0, \quad (18.44)$$

gdzie  $t$  oznacza czas,  $T$  – temperaturę, a kropka – pochodną względem czasu.

### 18.5.2. Elementarne modele reologiczne

Zasadnicze cechy fizyczne materiałów można opisać za pomocą tzw. modeli reologicznych, składających się z trzech modeli elementarnych:

- sprężyny opisującej własności sprężyste – model *Hooke'a*, (rys. 18.40a),
- suwaka opisującego własności plastyczne – model *de Saint-Venanta*, (rys. 18.40b),
- tłumika opisującego własności lepkie – model *Newtona*, (rys. 18.40c).

W modelu *Hooke'a* opory sprężyny (naprężenia) są proporcjonalne do odkształcenia:

$$\sigma_H = E \varepsilon_H. \quad (18.45)$$

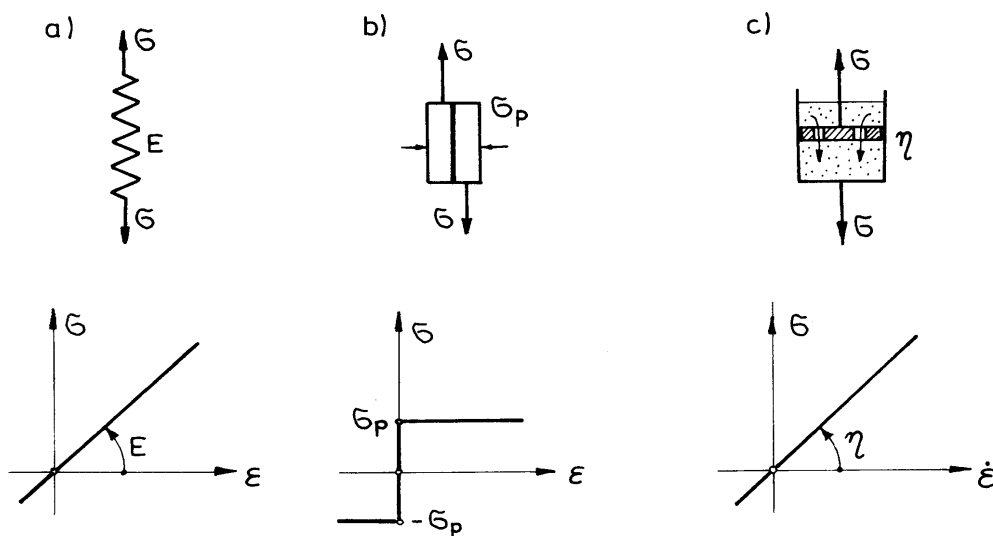
W modelu *de Saint-Venanta* opory suwaka, obrazującego tarcie suche są stałe:

$$\begin{aligned} \sigma_V &\leq \sigma_P, & \dot{\varepsilon}_V &= 0, \\ \sigma_V &= \sigma_P \cdot \operatorname{sgn} \dot{\varepsilon}_V, & \dot{\varepsilon}_V &\neq 0. \end{aligned} \quad (18.46)$$

W modelu *Newtona* tłumik składa się z cylindra wypełnionego nieściśliwą cieczą oraz z perforowanego tłoka. Ruchowi tłoka względem cylindra towarzyszy przepływ cieczy przez otwory tłoka. Wobec tego podczas próby nagłego przesunięcia tłumik zachowuje się jak ciało sztywne, gdyż do przepływu cieczy przez otwory tłoka trzeba trochę czasu. Opory tłumika są więc proporcjonalne do prędkości odkształcenia:

$$\sigma_N = \eta \cdot \dot{\varepsilon}_N, \quad (18.47)$$

gdzie symbol  $\eta [\text{N} \cdot \text{s} / \text{m}^2]$  nazywa się współczynnikiem lepkości dynamicznej.



Rys. 18.40

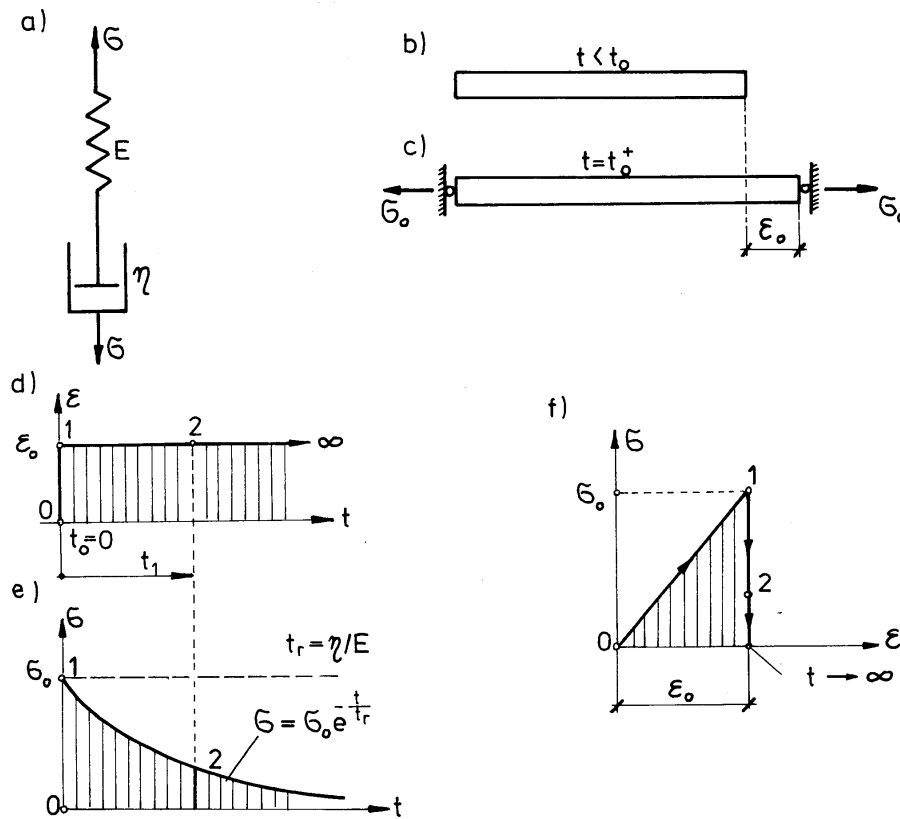
Uogólnienie modeli elementarnych polega na wprowadzeniu nieliniowej sprężyny, wzmocnienia plastycznego lub nieliniowego tłumika, którego opory zależą od wyższych potęg prędkości odkształcenia.

Dalsze komplikacje pojawiają się z chwilą uwzględnienia wpływu temperatury na stałe materiałowe. Wiele materiałów (beton, tworzywa sztuczne) wykazuje zmianę wartości „stałych” materiałowych w miarę upływu czasu. Mówimy wówczas o tzw. starzeniu się materiału, które przebiega niezależnie od obciążeń zewnętrznych w niezmiennych warunkach otoczenia.

W dalszych rozważaniach ograniczymy się do omówienia najprostszych modeli złożonych materiałów reologicznych.

### 18.5.3. Liniowe materiały lepko-sprężyste

Modele materiałów lepko-sprężystych powstają przez łączenie modeli materiałów sprężystych (sprężyn) i modeli materiałów lepkich (tłumików). Jeżeli naprężenia i odkształcenia oraz ich pochodne względem czasu występują tylko w pierwszej potęgce, to materiał lepkosprężysty nazywamy liniowym. Model materiału liniowego składa się wyłącznie z liniowych sprężyn i tłumików, opisanych wzorami (18.45) i (18.47).



Rys. 18.41

Szeregowe połączenie sprężyny i tłumika (rys. 18.41a) odpowiada **modelowi Maxwella**. Równanie fizyczne tego modelu wynika ze spostrzeżenia, że w każdej chwili  $t$  całkowite odkształcenie jest sumą odkształcenia sprężyny i odkształcenia tłumika:

$$(a) \quad \varepsilon(t) = \varepsilon_H(t) + \varepsilon_N(t),$$

a naprężenia w obu elementach są jednakowe:

$$(b) \quad \sigma(t) = \sigma_H(t) = \sigma_N(t).$$

Po zrózniczkowaniu równania (a) względem czasu

$$(c) \quad \dot{\varepsilon}(t) = \dot{\varepsilon}_H(t) + \dot{\varepsilon}_N(t),$$

z kolei ze wzoru (18.45) oraz wzoru (b) ( $E = \text{const}$ ) uzyskujemy:

$$(d) \quad \dot{\varepsilon}_H(t) = \frac{\dot{\sigma}_H}{E} = \frac{\dot{\sigma}}{E}.$$

Na podstawie zależności (c), (d) i (18.47) otrzymujemy poszukiwany związek fizyczny dla modelu *Maxwella*:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta} \quad (18.48)$$

lub

$$t_r \cdot \dot{\sigma} + \sigma = \eta \cdot \dot{\varepsilon}, \quad (18.48a)$$

gdzie  $t_r = \eta / E$  i nosi nazwę czasu relaksacji.

Model *Maxwella* bardzo dobrze opisuje jakościowo zjawisko relaksacji, czyli zmianę naprężeń w czasie przy stałej wartości odkształcenia  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 = \text{const}$ . Rozważmy dla przykładu pręt wykonany z materiału *Maxwella*, poddany wymuszeniu kinematycznemu (rys. 18.41d):

$$(e) \quad \varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cdot H(t) = \begin{cases} 0, & t < t_0, \\ \varepsilon_0, & t > t_0, \end{cases}$$

gdzie  $H(t)$  jest funkcją skoku jednostkowego *Heaviside'a*. Realizację tego wymuszenia obrazują rys. 18.41b, c. W pewnej chwili  $t_0 = t$  pręt rozciągnięto, a jego końce zamocowano. Tuż po rozciągnięciu w chwili  $t_0^+$ , w pręcie wystąpiło naprężenie  $\sigma(t_0^+) = \sigma_0 = E\varepsilon_0$ . W chwili tej wydłużeniu uległa tylko sprężyna, a tłumik nie wykazał odkształceń. W miarę upływu czasu następuje przepływ cieczy w tłumiku; tłumik wydłuża się, a sprężyna ulega stopniowemu skróceniu, co zmniejsza naprężenia w pręcie. Obserwujemy zatem relaksację naprężeń. Gdy czas zmierza do nieskończoności, naprężenia dążą do zera. Całkowity zanik naprężeń jest zasadniczą wadą modelu *Maxwella*, gdyż w rzeczywistych materiałach w miarę upływu czasu naprężenie dąży do pewnej wartości skończonej,  $\sigma(\infty) \neq 0$ .

Przejdziemy do matematycznego opisu zjawiska relaksacji za pomocą modelu *Maxwella*. W równaniu (18.48) uwzględnimy, że dla  $t > 0$   $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 = \text{const}$ , czyli  $\dot{\varepsilon}(t) = 0$ . Wynika stąd równanie różniczkowe na funkcję naprężenia  $\sigma(t)$ :

$$(f) \quad t_r \cdot \dot{\sigma} + \sigma = 0$$

z warunkiem początkowym

$$\sigma(t_0^+) = \sigma_0 = E\varepsilon_0.$$

Całka ogólna tego równania ma postać:

$$\sigma(t) = C \cdot e^{-t/t_r},$$

gdzie  $C$  jest stałą całkowania. Jeżeli przyjmiemy, że  $t_0 = 0$ , to wykorzystanie warunku początkowego prowadzi do rozwiązania:

$$(g) \quad \sigma(t) = E\varepsilon_0 \cdot e^{-t/t_r} = \sigma_0 \cdot e^{-t/t_r}.$$

Funkcja  $\sigma(t)$  obrazuje spadek (relaksację) naprężeń w funkcji czasu przy stałej wartości odkształcenia  $\varepsilon = \varepsilon_0$ . Na rysunku 18.41e podano wykres tej funkcji. Rysunek 18.41f przedstawia zależność  $\sigma(\varepsilon)$  z zaznaczeniem kolejnych etapów badanego procesu. Czas odgrywa tutaj rolę parametru. Wykres  $\sigma(\varepsilon)$  wskazuje na to, że mamy do czynienia z procesem nieodwracalnym, w którym następuje rozpraszanie energii przez element lepki (tłumik).

Zwróćmy uwagę na pewną użyteczną własność materiałów liniowych. Obowiązuje tu tzw. **zasada superpozycji Boltzmann**:

Jeżeli cykl odkształceń  $\varepsilon_1(t)$  powoduje naprężenia  $\sigma_1(t)$ , a cykl odkształceń  $\varepsilon_2(t)$ , powoduje naprężenia  $\sigma_2(t)$ , to suma cykli  $\varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t)$  wywołuje sumę naprężeń  $\sigma_1(t) + \sigma_2(t)$ .

Zasada Boltzmanna obowiązuje również dla cykli naprężeń  $\sigma_1(t)$  i  $\sigma_2(t)$  wywołujących odkształcenia  $\varepsilon_1(t)$  i  $\varepsilon_2(t)$ . Zastosowanie zasady Boltzmanna zilustrujemy przykładem, w którym zbadamy odpowiedź materiału Maxwella na wymuszenie kinematyczne określone, jak następuje (rys. 18.42a):

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \varepsilon_0, & 0 < t < t_1 \\ 0, & t > t_1. \end{cases}$$

Wymuszenie to można uważać za sumę dwóch cykli opisanych za pomocą funkcji Heaviside'a (rys. 18.42b):

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t), \\ \varepsilon_1(t) &= \varepsilon_0 \cdot H(t), \quad \varepsilon_2(t) = -\varepsilon_0 \cdot H(t - t_1). \end{aligned}$$

Do wyznaczenia naprężeń wykorzystamy zasadę Boltzmanna oraz rozwiązanie (g):

$$\sigma_1(t) = \sigma_0 \cdot e^{-t/t_r}, \quad \sigma_2(t) = -\sigma_0 \cdot e^{-(t-t_1)/t_r}.$$

Postać funkcji  $\sigma_2(t)$  wynika z przesunięcia osi czasu w równaniu (g) o wartości  $t_1$ . Ostatecznie otrzymujemy:

$$\sigma(t) = \begin{cases} \sigma_1(t) = \sigma_0 e^{-t/t_r}, & t_0 < t < t_1 \\ \sigma_1(t) + \sigma_2(t) = \sigma_0 e^{-t/t_r} \cdot (1 - e^{-t_1/t_r}), & t > t_1. \end{cases}$$

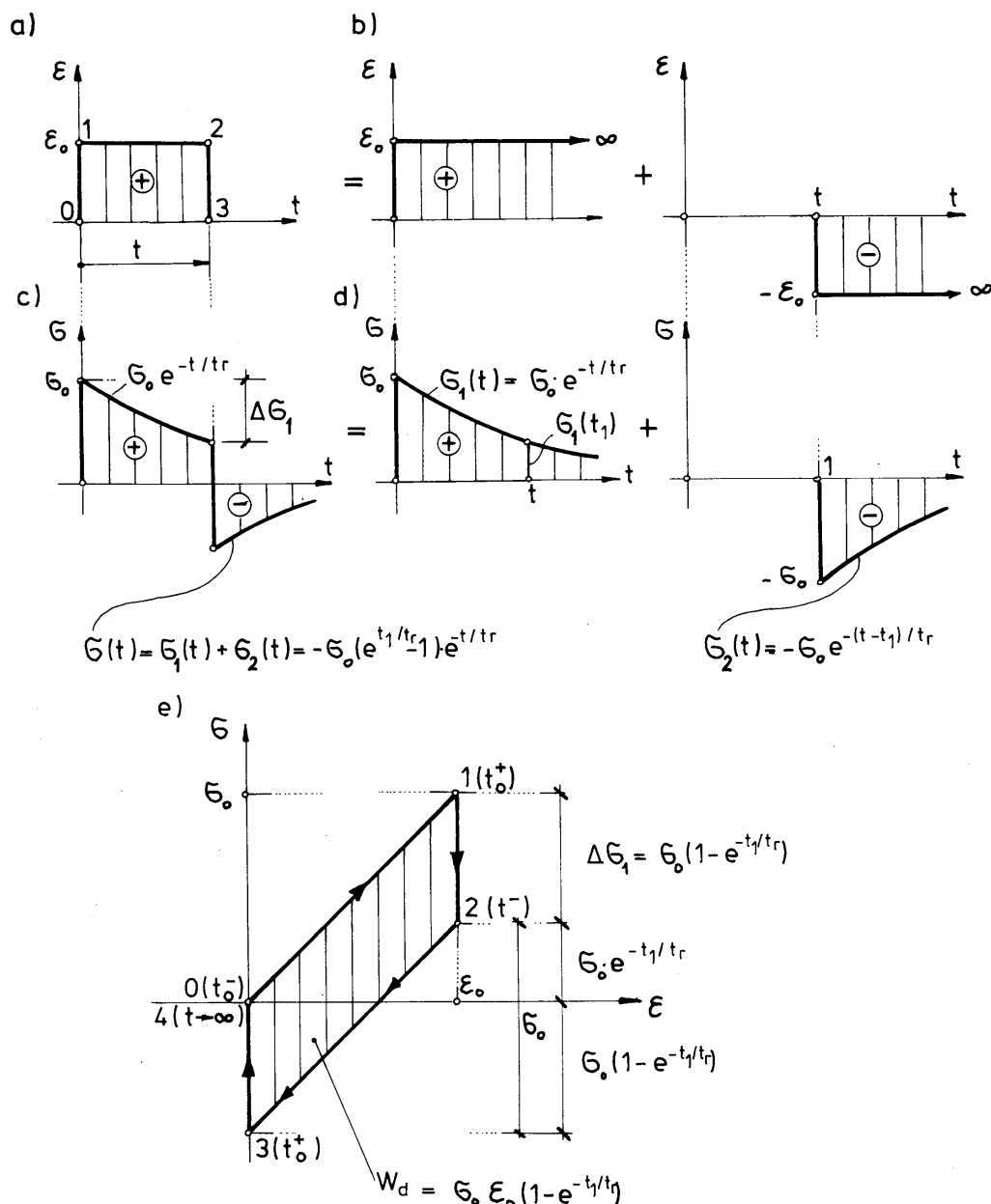
Ilustracją tej zależności są rysunki 18.42c, d.

Warto zwrócić uwagę na rys. 18.42e, na którym wykres  $\sigma(\varepsilon)$  odpowiadający rozważanemu cyklowi odkształceń przedstawia pętlę histerezy sprężystej (por. p. 4.3). Pole tej pętli jest energią rozpraszaną w procesie przypadająca na jednostkę objętości:

$$W_d = \sigma_0 \varepsilon_0 \cdot (1 - e^{-t_1/t_r}).$$

Omówimy teraz równoległe połączenie sprężyny i tłumika, czyli tzw. **model Kelvina** (rys. 18.43a). Model ten bardzo dobrze opisuje zjawisko pełzania, czyli zmianę odkształceń w czasie przy stałej wartości naprężenia. Równanie modelu Kelvina wyprowadza się, korzystając z faktu, że w każdej chwili odkształcenia sprężyny i tłumika są jednakowe. Oznacza to, że element poprzeczny łączący oba modele elementarne musi być zawsze poziomy, tzn. może przesuwać się tylko równolegle. Ponadto bierzemy pod uwagę, że naprężenie całkowite jest sumą naprężeń występujących w sprężynie i tłumiku. Mamy więc:

$$(h) \quad \begin{cases} \varepsilon(t) = \varepsilon_H(t) = \varepsilon_N(t) \\ \sigma(t) = \sigma_H(t) + \sigma_N(t). \end{cases}$$

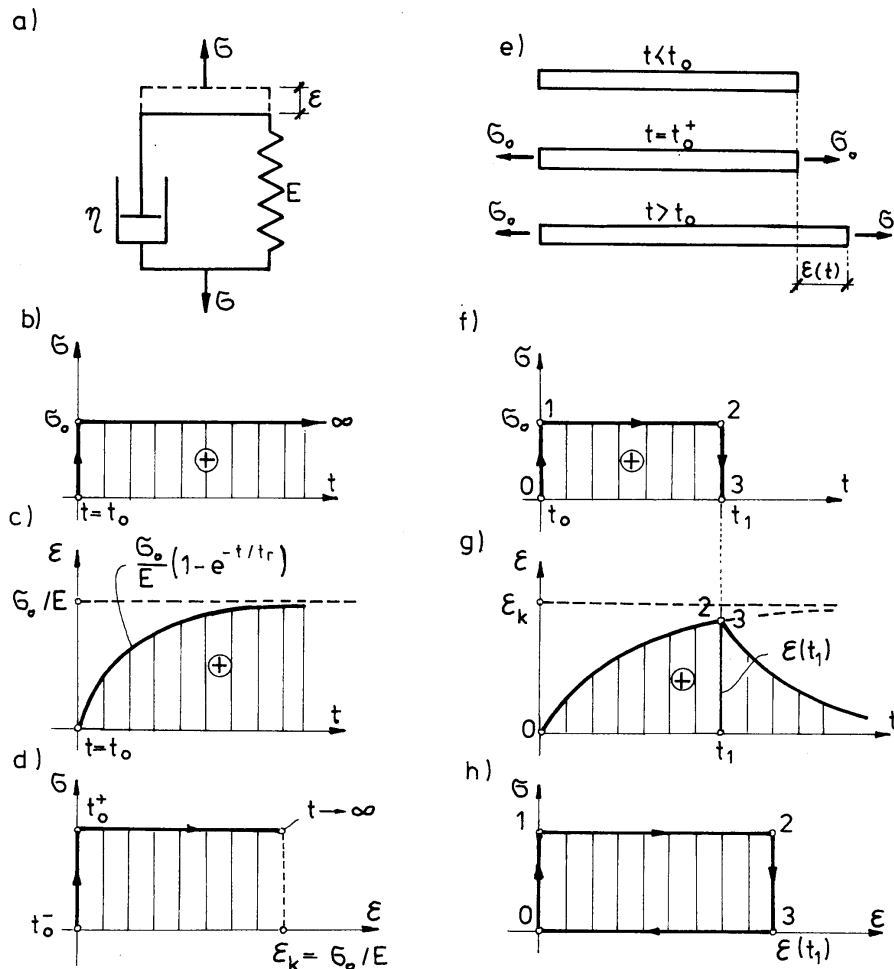


Rys. 18.42

Z tych zależności oraz równań fizycznych ciała Hooke'a (18.45) i ciała Newtona (18.47) otrzymujemy równanie fizyczne modelu Kelvina:

$$\sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}. \quad (18.49)$$

Rozważymy pręt wykonany z materiału odpowiadającego modelowi Kelvina, poddany stałemu naprężeniu rozciągającemu  $\sigma_0$  (por. rys. 18.43b, e). W chwili  $t = t_0^+$ , odpowiadającej momentowi przyłożenia obciążenia, pręt nie wykazuje żadnych wydłużeń, bo tłumik zachowuje się jak ciało sztywne (całą siłę przejmuje właśnie tłumik). W miarę upływu czasu następuje przepływ cieczy w tłumiku, co umożliwia wydłużenie pręta. Część naprężeń proporcjonalnych do tego wydłużenia przejmuje sprężyna; naprężenie przenoszone przez tłumik zmniejsza się. Gdy czas obciążenia jest nieskończenie długi, całą siłę przejmuje sprężyna, a wydłużenie pręta dąży do wartości  $\sigma_0/E$ . Opisany proces ma cechy pełzania.



Rys. 18.43

Zależność  $\varepsilon(t)$  ustalimy na podstawie równania (18.49), w którym  $\sigma(t) = \sigma_0$ :

$$(i) \quad t_r \dot{\varepsilon} + \varepsilon = \sigma_0 / E.$$

Równanie to przy warunku początkowym  $\varepsilon(0) = 0$  ma następujące rozwiązanie:

$$(j) \quad \varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \cdot \left(1 - e^{-t/t_r}\right).$$

Wykres funkcji  $\varepsilon(t)$  podano na rys. 18.43c. Funkcja  $\sigma(\varepsilon)$ , zobrazowana na rys. 18.43d, jest podobna do wykresu  $\sigma(\varepsilon)$  dla ciała idealnie plastycznego. Dlatego w początkowych badaniach przeprowadzanych w latach dwudziestych naszego wieku pełzanie utożsamiano z płynięciem plastycznym. Zasadnicza różnica między tymi procesami polega na tym, że prędkość odkształcenia podczas pełzania jest zmienna w czasie, a podczas płynięcia plastycznego jest stała.

Na rysunkach 18.43f, g, h przedstawiono funkcję obciążenia  $\sigma(t)$ , odpowiadający jej przebieg odkształceń  $\varepsilon(t)$  i wykres  $\sigma(\varepsilon)$ . Rozwiązanie tego zadania otrzymuje się bezpośrednio z równania (j) na podstawie zasady superpozycji Boltzmanna. Wykres  $\sigma(\varepsilon)$  – podobnie jak w modelu Kelvina – obrazuje histerezę sprężystą. Usunięcie obciążenia po odpowiednio długim czasie prowadzi do zaniku odkształceń. Stąd przymiotnik „sprężysta”, mimo że badany proces jest niesprężysty (nieodwracalny). Jak widać, zanikanie odkształceń po zdjęciu obciążenia nie świadczy o sprężystości materiału. Sprężystość charakteryzuje się bowiem tym, że na płaszczyźnie  $(\sigma, \varepsilon)$  droga obciążenia pokrywa się z drogą odciążenia.

Model Kelvina nie wykazuje doraźnych cech sprężystych, charakterystycznych dla każdego rzeczywistego materiału. Wady tej nie ma tzw. **model standardowy**, określony trzema parametrami  $E_0$ ,  $E$ ,  $\eta$  (rys.

18.44a). Symbolem  $E_0$  oznaczono tu moduł sprężystości doraźnej. Model standardowy składa się z szeregowego połączenia modelu *Hooke'a* i modelu *Kelvina*. Równanie różniczkowe tego modelu standardowego wynika z następujących zależności:

$$(k) \quad \begin{cases} \varepsilon = \varepsilon_H + \varepsilon_K, \\ \sigma = \sigma_H = \sigma_K, \end{cases}$$

przy czym  $\varepsilon_H = \sigma / E_0$ , natomiast indeks  $K$  dotyczy modelu *Kelvina*. Wobec tego

$$\sigma = \sigma_K = E\varepsilon_K + \eta\dot{\varepsilon}_K = E(\varepsilon - \varepsilon_H) + \eta(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_H) = E\varepsilon - E\frac{\sigma}{E_0} + \eta\dot{\varepsilon} - \eta\frac{\dot{\sigma}}{E_0},$$

stąd

$$\sigma \cdot \left(1 + \frac{E}{E_0}\right) + \frac{\eta}{E_0} \cdot \dot{\sigma} = E \cdot \varepsilon + \eta \cdot \dot{\varepsilon}.$$

Po uporządkowaniu otrzymujemy równanie:

$$\sigma + t_r^* \dot{\sigma} = E^* \varepsilon + \eta^* \dot{\varepsilon}, \quad (18.50)$$

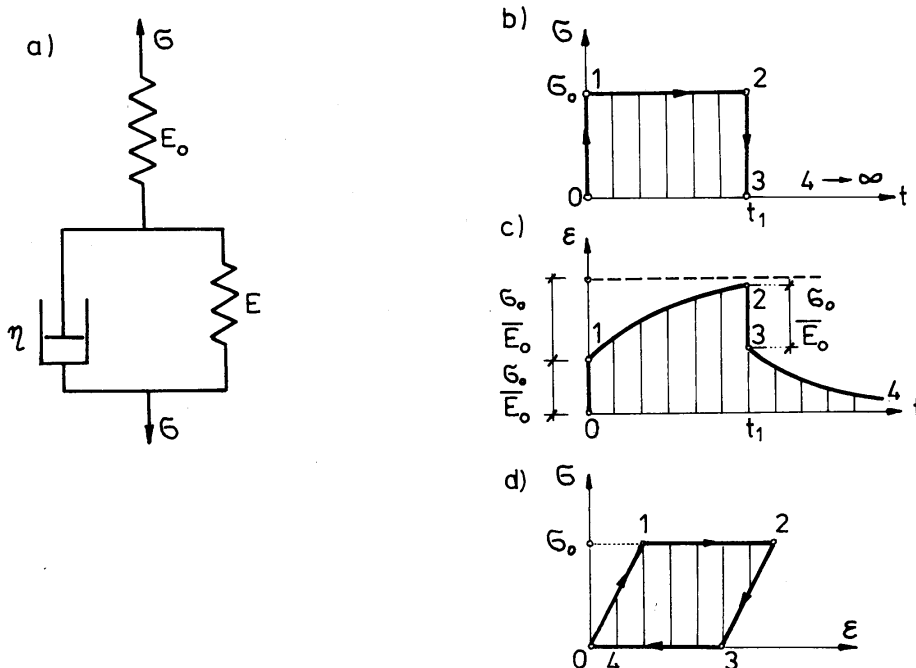
gdzie

$$t_r^* = \frac{\eta}{E + E_0}, \quad E^* = \frac{EE_0}{E + E_0} < E_0, \quad \eta^* = \frac{\eta E_0}{E + E_0} < \eta.$$

Zauważmy, że model standardowy jest uogólnieniem modeli *Maxwella* i *Kelvina*. Pierwszy z nich uzyskamy dla  $E \rightarrow 0$ , drugi – dla  $E_0 \rightarrow \infty$ . Zachowanie się modelu standardowego poddanego obciążeniu „prostokątnemu” (rys. 18.44b):

$$\sigma(t) = \sigma_0 [H(t - t_1) - H(t)],$$

obrazują rys. 18.44c, d.



Rys. 18.44

Chcąc zastosować którykolwiek z wyżej omówionych modeli trzeba oszacować parametry  $t_r^*$ ,  $E^*$  i  $\eta^*$ , pełniące funkcję stałych materiałowych. Jedną z możliwości jest badanie wymiarów pętli histerezy przy wymuszeniu odkształcenia bądź naprężenia (por. [9]). W maszynach wytrzymałościowych wygodnie jest wymuszać odkształcenie, zmieniające się w czasie według wzoru:

$$(l) \quad \varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin(\omega t).$$

Równanie różniczkowe modelu standardowego przyjmuje wówczas postać:

$$(m) \quad \sigma + t_r^* \dot{\sigma} = E_1 \varepsilon_0 \sin \omega t + \eta^* \varepsilon_0 \omega \cos \omega t,$$

przy czym jako warunek początkowy przyjmujemy wymaganie, by  $\sigma(0) = 0$ . Całka ogólna równania (m) jest następująca:

$$\sigma(t) = C e^{-t/t_r^*} + \sigma_s(t),$$

gdzie

$C$  - jest stałą całkowania,

$\sigma_s(t)$  - jest całką szczególną równania niejednorodnego o postaci:

$$(n) \quad \sigma_s(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t.$$

Wartości  $A$  i  $B$  muszą być tak dobrane, by równanie różniczkowe (m) było spełnione tożsamościowo. Po podstawieniu zależności (n) do (m) otrzymujemy:

$$\left( A - t_r^* \omega B \right) \sin \omega t + \left( t_r^* \omega A + B \right) \cos \omega t = E^* \varepsilon_0 \sin \omega t + \eta^* \varepsilon_0 \omega \cos \omega t,$$

skąd

$$(o) \quad A = \frac{\varepsilon_0}{1 + t_r^{*2} \cdot \omega^2} \left( E^* + t_r^* \eta^* \omega^2 \right), \quad B = \frac{\varepsilon_0}{1 + t_r^{*2} \omega^2} \cdot \omega \left( \eta^* - t_r^* E_1 \right) > 0.$$

Z warunku początkowy  $\sigma(0) = 0$  wynika, że  $C = -B$ , a rozwiązanie równania (m) przybiera postać:

$$(p) \quad \sigma(t) = -B e^{-t/t_r^*} + A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

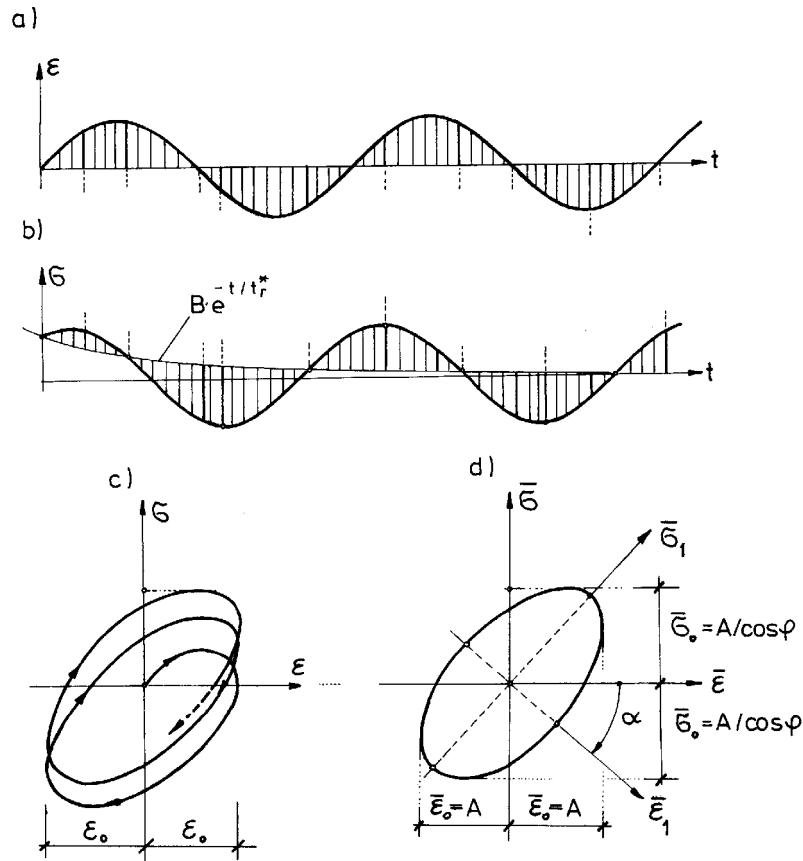
lub

$$\sigma(t) = -B e^{-t/t_r^*} + \sigma_0 \sin(\omega t + \varphi),$$

gdzie

$$\sigma_0 = A / \cos \varphi, \quad \tan \varphi = B / A.$$

Przebieg funkcji  $\varepsilon(t)$  i  $\sigma(t)$  przedstawiono na rys. 18.45a, b.



Rys. 18.45

Z rysunków tych oraz ze wzoru (p) widać, że w miarę zwiększania liczby cykli (upływu czasu) zależność  $\sigma(t)$  stabilizuje się i w przybliżeniu można ją określić funkcją:

$$(r) \quad \sigma(t) \approx A \sin \omega t + B \cos \omega t.$$

Procesowi stabilizacji towarzyszy wytworzenie się pętli histerezy (rys. 18.45c) na płaszczyźnie  $(\sigma, \varepsilon)$ . Dla bardzo dużej liczby cykli pętla histerezy przyjmuje postać zilustrowaną na rys. 18.45d. Energia rozpraszana odpowiada tzw. tłumieniu wewnętrznemu. Równanie pętli histerezy otrzymujemy przez wyrugowanie z równań (l) i (r) parametru czasu. Po uwzględnieniu w zależności (r), że  $\sin \omega \tau = \varepsilon / \varepsilon_0$ , dysponujemy dwoma równaniami:

$$\bar{\varepsilon} = \sin \omega t, \quad \frac{\bar{\sigma} - \bar{\varepsilon}}{B} = \cos \omega t,$$

gdzie  $\bar{\sigma} = \sigma$ ,  $\bar{\varepsilon} = A\varepsilon / \varepsilon_0$ . Po obustronnym podniesieniu do kwadratu i wykorzystaniu wzoru jedynkowego równania te prowadzą do zależności:

$$(\bar{\sigma} - \bar{\varepsilon})^2 + \tan^2 \varphi \cdot \bar{\varepsilon}^2 = B^2.$$

Można się przekonać, że uzyskane równanie przedstawia elipsę, której główne osie pokrywają się z osiami  $\bar{\varepsilon}_1$  i  $\bar{\sigma}_1$ , obróconymi o pewien kąt  $\alpha$  (rys. 18.45d). Ostatecznie otrzymujemy równanie:

$$(s) \quad \frac{\bar{\varepsilon}_1^2}{a^2} + \frac{\bar{\sigma}_1^2}{b^2} = 1,$$

gdzie  $\bar{\varepsilon}_1 = \bar{\varepsilon} \cdot \cos \alpha - \bar{\sigma} \cdot \sin \alpha$ ;  $\bar{\sigma}_1 = \bar{\varepsilon} \cdot \sin \alpha + \bar{\sigma} \cdot \cos \alpha$ ,  $\tan 2\alpha = -2 / \tan^2 \varphi$  oraz

$$(t) \quad \begin{cases} a^2 = a^2(t_r^*, \eta^*, E^*) = B^2 / (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi \cdot \cos^2 \alpha - \sin 2\alpha), \\ b^2 = b^2(t_r^*, \eta^*, E^*) = B^2 / (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi \cdot \sin^2 \alpha + \sin 2\alpha) < a^2. \end{cases}$$

Pomiar wartości  $\sigma_0$  oraz wymiarów i usytuowania pętli histerezy otrzymanej na podstawie badań doświadczalnych pozwala za pomocą zależności (t) oraz rys. 18.45d oszacować nieznane parametry modelu  $t_r^*$ ,  $\eta^*$  i  $E^*$ .

Omówimy jeszcze rozciąganie i zginanie pręta wykonanego z materiału standardowego. Podstawą rozważań jest równanie modelu standardowego (18.50) oraz prawo *Bernoulliego* dla przekroju, w którym oś  $z$  jest osią symetrii:

$$\varepsilon(x, z, t) = \lambda(x, t) + k(x, t)z.$$

Z zależności tej wynika, że

$$\dot{\varepsilon}(x, z, t) = \dot{\lambda}(x, t) + \dot{k}(x, t)z.$$

Podstawienie obu powyższych zależności do równania (18.50) prowadzi do wyniku:

$$(u) \quad \sigma + t_r^* \cdot \dot{\sigma} = E^* \cdot (\lambda + k \cdot z) + \eta^* (\dot{\lambda} + \dot{k}z).$$

Obustronne całkowanie równania (u) po powierzchni przekroju  $A$ :

$$\int_A (\sigma + t_r^* \dot{\sigma}) dA = E^* \int_A (\lambda + kz) dA + \eta^* \int_A (\dot{\lambda} + \dot{k}z) dA,$$

prowadzi do równania różniczkowego wiążącego siłę podłużną z wydłużeniem osi:

$$N + t_r^* \dot{N} = E^* A \lambda = \eta^* A \dot{\lambda}. \quad (18.51)$$

Odpowiednie równanie dla momentu zginającego otrzymuje się przez pomnożenie równania (u) przez  $z$  oraz scałkowanie po powierzchni przekroju  $A$ :

$$\int_A (\sigma z + t_r^* \dot{\sigma} z) dA = E^* \int_A (\lambda z + kz^2) dA + \eta^* \int_A (\dot{\lambda} z + \dot{k}z^2) dA,$$

skąd

$$M + t_r^* \dot{M} = E^* J \cdot k + \eta^* J \cdot \dot{k}, \quad (18.52)$$

gdzie  $J$  oznacza moment bezwładności przekroju względem osi  $y$ .

W celu ilustracji zastosowania uzyskanych wyników obliczymy belkę wspornikową przedstawioną na rys. 18.46a. W chwili  $t = 0$  belkę obciążono siłą skupioną  $P$ . Ponieważ ograniczamy się do małych przemieszczeń, a układ jest statycznie wyznaczalny, więc moment zginający ma znaną wartość i nie zmienia się w miarę upływu czasu, czyli  $\dot{M} = 0$ . Wobec tego równanie (18.52) przyjmuje postać:

$$(w) \quad \eta^* \dot{k} + E^* k = \frac{M(x)}{J},$$

przy czym warunek początkowy dla krzywizny powinien uwzględniać krzywiznę doraźną, pojawiającą się tuż przy przyłożeniu obciążenia, czyli

$$(x) \quad k(x, 0) = \frac{M(x)}{E_0 J}.$$

Rozwiązaniem ogólnym równania (w) jest funkcja:

$$k(x, t) = C \cdot e^{-t/t_r^*} + k_S(x, t).$$

Całkę szczególną można przyjąć w postaci:

$$k_S(x, t) = k_S(x) = \frac{M(x)}{E^* J}.$$

Wobec powyższego

$$k(x, t) = C \cdot e^{-t/t_r^*} + \frac{M(x)}{E^* J}.$$

Po uwzględnieniu warunku początkowego (x) otrzymujemy ostatecznie, że

$$C = -\frac{M(x)}{E^* J} \cdot \left(1 - \frac{E^*}{E_0}\right) = -\frac{M(x)}{EJ}$$

oraz

$$(y) \quad k(x, t) = \frac{M(x)}{E^* J} \cdot \left(1 - \frac{E^*}{E} \cdot e^{-t/t_r^*}\right).$$

Ponieważ  $k(x, t) = -w''(x, t)$ , więc równanie różniczkowe linii ugięcia jest następujące:

$$w''(x, t) = -\frac{M(x)}{E^* J} \cdot \left(1 - \frac{E^*}{E} \cdot e^{-t/t_r^*}\right), \quad M(x) = P(l - x).$$

Po scałkowaniu względem  $x$  i uwzględnieniu warunków brzegowych:  $w(0, t) = 0$ ,  $w'(0, t) = 0$ , uzyskujemy równanie linii ugięcia w funkcji czasu:

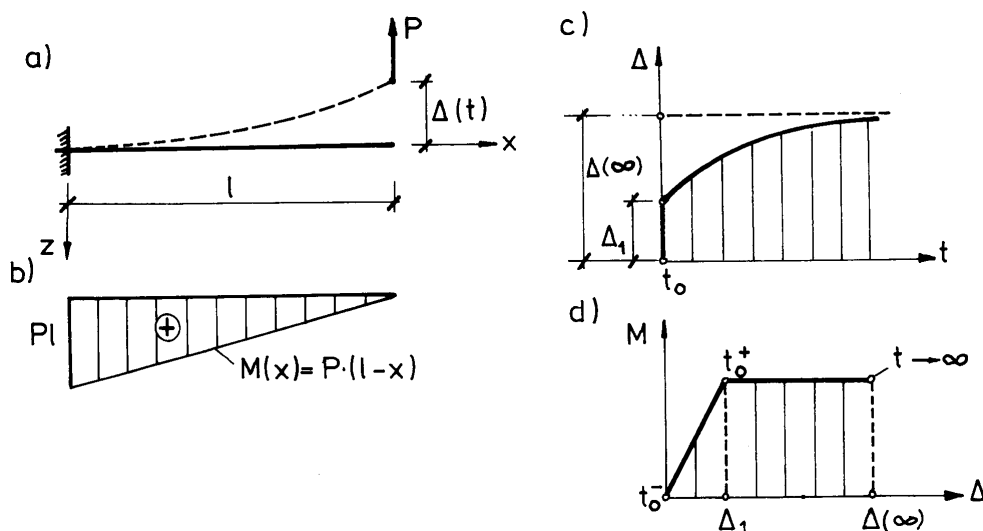
$$(z) \quad w(x, t) = \frac{Pl^3}{6E_0J} \left[ 3\left(\frac{x}{l}\right) - \left(\frac{x}{l}\right)^3 \right] \cdot \left[ \left(1 + \frac{E_0}{E}\right) - \frac{E_0}{E} e^{-t/t_r^*} \right] = w_{\text{spr}}(x) \left[ \left(1 + \frac{E_0}{E}\right) - \frac{E_0}{E} e^{-t/t_r^*} \right],$$

gdzie  $w_{\text{spr}}(x)$  oznacza funkcję ugięcia belki idealnie sprężystej o sztywności  $E_0J$ .

Ugięcie końca belki wspornikowej  $w(l, t) = \Delta(t)$  jako funkcja czasu

$$\Delta(t) = \frac{Pl^3}{3E_0J} \cdot \left[ \left(1 + \frac{E_0}{E}\right) - \frac{E_0}{E} \cdot e^{-t/t_r^*} \right].$$

Uzyskane rezultaty obrazują rys. 18.46c, d.

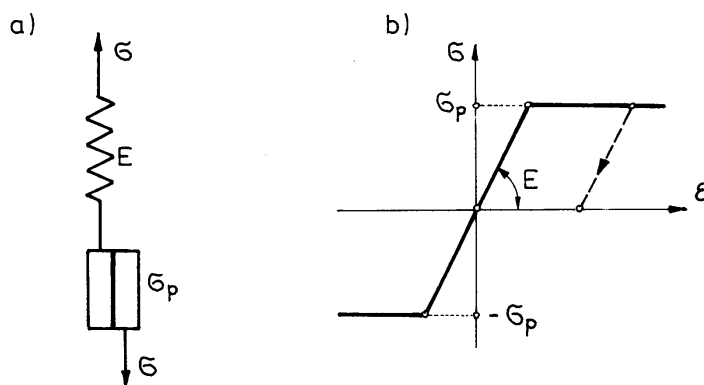


Rys. 18.46

Warto dodać, że rozwiązania zadań liniowej lepkosprężystości składają się zawsze z iloczynu części odpowiadającej rozwiązaniu sprężystemu i pewnej funkcji czasu. Ilustracją tego jest budowa równania (z).

#### 18.5.4. Materiały sprężysto-plastyczne

Charakterystyczną cechą materiałów wykazujących własności reologiczne jest lepkość. Materiały sprężysto-plastyczne, jako niewrażliwe na prędkość odkształcenia, nie są zatem ściśle biorąc, materiałami reologicznymi. Niemniej jednak własności mechaniczne materiałów sprężysto-plastycznych wynikają również z analizy zachowania się modeli reologicznych złożonych ze sprężyn i suwaków. Przykładem takiego modelu jest model ciała sprężysto-idealnie plastycznego, przedstawiony na rys. 18.47a. Zachowanie się modelu w trakcie obciążania i odciążania ilustruje rys. 18.47b.



Rys. 18.47

#### 18.5.5. Materiały sprężystolepkoplastyczne

Modele tych materiałów mają najbardziej złożoną strukturę, składają się bowiem ze wszystkich rodzajów modeli elementarnych, tzn. sprężyn, tłumików i suwaków.

Materiały sprężystolepkoplastyczne dzieli się zazwyczaj na dwie zasadnicze grupy, [34]:

- materiały sprężysto-lepkoplastyczne (por. rys. 18.48),
- materiały sprężysto-lepkoplastyczne (por. rys. 18.49).

Materiały pierwszej grupy przed uplastycznieniem są wyłącznie sprężyste; lepkość ich pojawia się dopiero po uplastycznieniu. Materiały drugiej grupy wykazują własności lepkie zarówno w obszarze sprężystym, jak i plastycznym. Oba rodzaje modeli ciał sprężystolepkoplastycznych bardzo dobrze opisują znany z eksperymentów wpływ prędkości i obciążenia na charakterystykę wykresu  $\sigma(\varepsilon)$ .

Rozważymy najpierw **model Bingham**, opisujący materiał sprężysto/lepko-plastyczny (rys. 18.48a). Równanie tego modelu budujemy na podstawie zależności:

$$\sigma = \sigma_E = \sigma_N + \sigma_V, \quad \varepsilon = \varepsilon_E + \varepsilon_{NV}.$$

Gdy  $|\sigma| < \sigma_P$ , model zachowuje się czysto sprężysto. Gdy  $|\sigma| > \sigma_P$ , to nadwyżkę obciążenia  $\sigma - \sigma_P \cdot \text{sgn} \dot{\varepsilon}$  przejmuje tłumik. Wobec tego

$$\dot{\varepsilon} = \begin{cases} \dot{\sigma} / E, & |\sigma| < \sigma_P, \\ (\dot{\sigma} / E) + (\sigma - \sigma_P \cdot \text{sgn} \dot{\varepsilon}) / \eta, & |\sigma| > \sigma_P. \end{cases} \quad (18.53)$$

Rozważmy obciążenie modelu naprężeniem rosnącym jednostajnie z prędkością  $v$  [N/(m<sup>2</sup>/s)]:  $\sigma(t) = v \cdot t$  (rys. 18.48b). Wówczas

$$\text{– gdy } t \leq \frac{\sigma_P}{v}, \text{ to } \varepsilon(t) = \frac{v}{E} \cdot t,$$

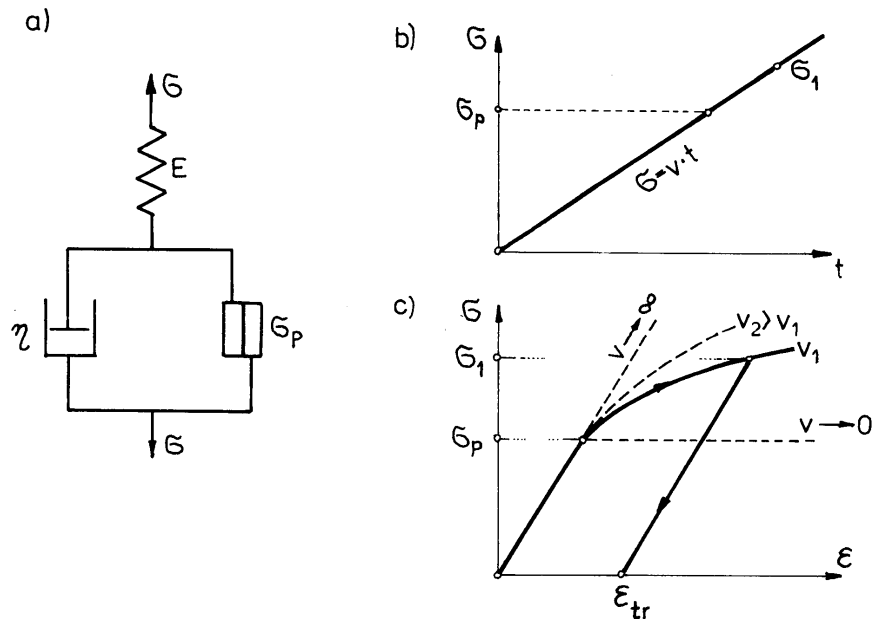
$$\text{– gdy } t \geq \frac{\sigma_P}{v}, \text{ to } \varepsilon(t) = \int \left[ \frac{v}{E} + \frac{(vt - \sigma_P)}{\eta} \right] dt + C = \frac{v}{E} t + \frac{vt^2}{2\eta} - \frac{\sigma_P}{\eta} t + C.$$

Stałą całkowania  $C$  wyznaczymy z warunku ciągłości odkształceń w chwili  $t = \sigma_P/v$ :

$$\frac{\sigma_P}{E} = \frac{\sigma_P}{E} + \frac{v\sigma_P^2}{2\eta v^2} - \frac{\sigma_P}{\eta} \cdot \frac{\sigma_P}{v} + C,$$

skąd

$$C = \frac{\sigma_P^2}{2v\eta}.$$



Rys. 18.48

Rozwiązanie zadania jest więc następujące:

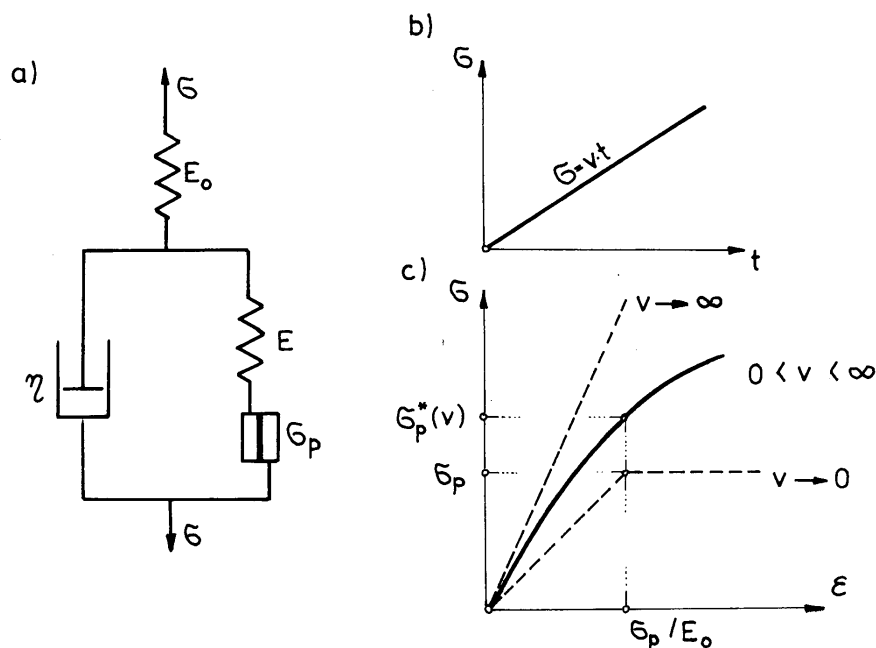
$$(a) \quad \varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{v}{E} t, & t \leq \frac{\sigma_P}{v}, \\ \frac{v}{2\eta} t^2 + \left( \frac{v}{E} - \frac{\sigma_P}{\eta} \right) t + \frac{\sigma_P^2}{2\eta v}, & t \geq \frac{\sigma_P}{v}. \end{cases}$$

Po wyeliminowaniu czasu  $t$  otrzymujemy zależność  $\varepsilon(\sigma)$ :

$$\varepsilon(\sigma) = \begin{cases} \frac{\sigma}{E}, & |\sigma| \leq \sigma_P \\ \frac{\sigma}{E} + \frac{(\sigma - \sigma_P)^2}{2\eta v}, & |\sigma| \geq \sigma_P. \end{cases}$$

Zależność tę ilustruje rys. 18.48c. Z rysunku widać, że wzrost prędkości obciążenia powoduje podniesienie się krzywej  $\sigma(\varepsilon)$ .

Jeden z najprostszych modeli ciała sprężysto-lepkoplastycznego przedstawia rys. 18.49a. Jest to **model czteroparametrowy**. Analiza reologiczna tego modelu jest dosyć obszerna. Poprzestaniemy zatem tylko na przedstawieniu wykresu  $\sigma(\varepsilon)$  przy wymuszeniu dynamicznym  $\sigma(t) = v \cdot t$ . Okazuje się, że poza zjawiskami występującymi w modelu *Binghama* rejestrujemy również podwyższenie granicy plastyczności  $\sigma_P^*$  w efekcie wzrostu prędkości i naprężenia. Tę własność modelu czteroparametrowego ilustruje rysunek 18.49c.



Rys. 18.49