

12

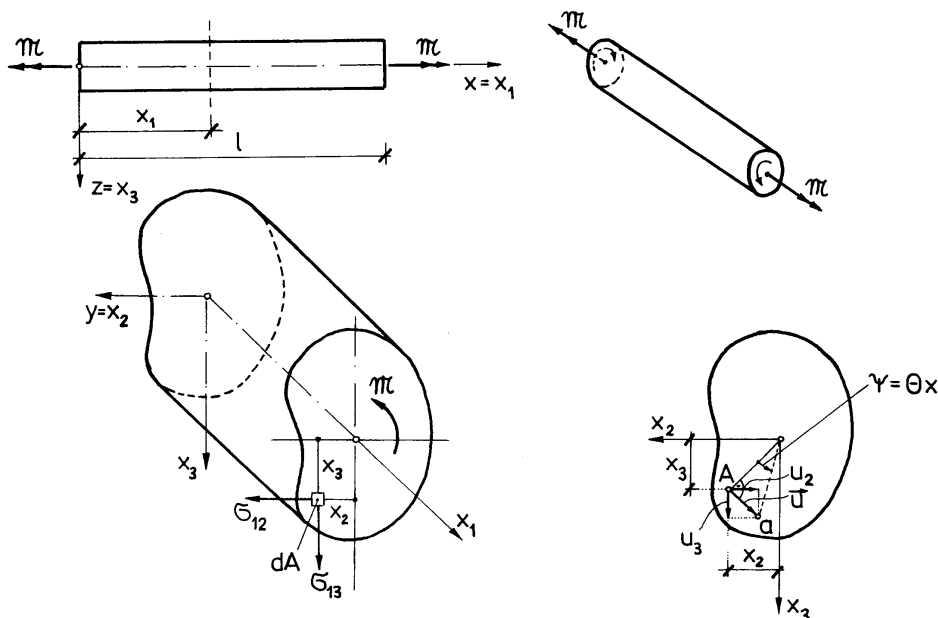


DZIAŁANIE MOMENTU SKRĘCAJĄCEGO

12.1. ZALEŻNOŚCI PODSTAWOWE

12.1.1. Podstawy teorii skręcania swobodnego prętów sprężystych

Rozważmy jednorodny, izotropowy, liniowo-sprężysty pręt pryzmatyczny poddany czystemu skręcaniu (rys. 12.1). Problem skręcania rozwiązany w sposób wskazany w 1855 roku przez *de Saint-Venanta*. Przyjmujemy mianowicie, że przekroje pręta nie ulegają odkształceniom postaciowym, tzn. w procesie deformacji zachowują swój pierwotny kształt. Zgodnie z powyższą hipotezą kinematyczną dwa przekroje oddalone od siebie o x_1 obracają się względem siebie wokół podłużnej osi pręta o kąt skręcenia ψ . Uwzględnimy jednak możliwość deplanacji (spaczenia) przekrojów, które przed odkształceniem były płaskie. Dopuszczamy więc możliwość wystąpienia przemieszczeń u_1 wzdłuż osi pręta x_1 . Okazuje się, że przy powyższych założeniach uzyskuje się ściśle rozwiązanie problemu skręcania na gruncie teorii sprężystości.



Rys. 12.1

Zasadnicze rozważania przeprowadzimy w zapisie wskaźnikowym. Z podanych wyżej założeń kinematycznych dla bardzo małych wartości kąta skręcenia wynikają następujące związki:

$$\begin{aligned} u_1 &= \theta \cdot t(x_2, x_3), \\ u_2 &= -\psi \cdot x_3 = -\theta \cdot x_1 x_3, \\ u_3 &= \psi \cdot x_2 = \theta \cdot x_1 x_2. \end{aligned} \quad (12.1)$$

gdzie $t(x_2, x_3)$ jest tzw. funkcją deplanacji, kąt $\theta = d\psi / dx_1$ i nazywa się jednostkowym kątem skręcenia. Ponieważ pręt jest jednorodny i pryzmatyczny, więc podczas czystego skręcania ($M = \text{const}$) jednostkowy kąt skręcenia ma wartość stałą $\theta = \psi(l) / l$, gdzie l jest długością pręta.

Rozważany problem nosi nazwę **skręcania swobodnego**. Określenie to wiąże się z założeniem, że wszystkie przekroje pręta mają swobodę deplanacji. Dlatego rozwiązanie tak sformułowanego zagadnienia ma charakter przybliżony. W praktyce istnieje wiele takich przypadków, w których skręcanie swobodne nie występuje. Mamy tu na myśli np. pełne utwierdzenie pręta na podporze, gdzie przekrój musi

pozostać płaski, tzn. $u_1 = 0$. Podobna sytuacja występuje w środkowym przekroju pręta, który jest obciążony skupionym momentem skręcającym w połowie długości. W tych przypadkach powinno się stosować teorię skręcania nieswobodnego.

W praktyce efekty skręcania nieswobodnego trzeba uwzględniać tylko w przekrojach cienkościennych. Problematykę tę omówimy w rozdziale 13. (por. również p. 12.1.6).

Wzory (12.1) pozwalają obliczyć odkształcenia ze związków geometrycznych (por. wzór (2.6)):

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_{23} = 0, \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \theta \cdot (t_{,2} - x_3), \\ \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2} \theta \cdot (t_{,3} + x_2). \end{aligned} \right\} \quad (12.2)$$

Stan odkształcenia obrazuje macierz:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & 0 & 0 \\ \varepsilon_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (12.2a)$$

Z kolei ze związków fizycznych (wzory (5.4)) otrzymujemy naprężenia:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{23} = 0, \\ \sigma_{12} &= G\theta \cdot (t_{,2} - x_3), \\ \sigma_{13} &= G\theta \cdot (t_{,3} + x_2), \end{aligned} \right\} \quad (12.3)$$

a macierz naprężeń przyjmuje postać:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & 0 & 0 \\ \sigma_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (12.3a)$$

Wykorzystamy jeszcze równania różniczkowe równowagi naprężeń (wzór (1.9)) dla pręta nieważkiego ($G_i = 0$):

$$\sigma_{ji,j} = 0: \quad \left\{ \begin{aligned} \sigma_{11,1} + \sigma_{21,2} + \sigma_{31,3} &= 0, \\ \sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} + \sigma_{32,3} &= 0, \\ \sigma_{13,1} + \sigma_{23,2} + \sigma_{33,3} &= 0, \end{aligned} \right.$$

które po uwzględnieniu równań (12.3) prowadzą do zależności:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{21,2} + \sigma_{31,3} &= 0, \\ \sigma_{12,1} &= 0, \\ \sigma_{13,1} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (12.4)$$

Równania (12.4)₂ i (12.4)₃ są spełnione tożsamościowo. Pozostaje więc tylko równanie (12.4)₁. Po podstawieniu wzoru (12.3) do (12.4)₁ otrzymujemy równanie różniczkowe *Laplace'a* na funkcję deplanacji:

$$t_{,22} + t_{,33} = 0$$

lub

$$\nabla^2 t = 0, \quad \text{gdzie} \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}. \quad (12.5)$$

Funkcja deplanacji $t(x_2, x_3)$ jest więc funkcją harmoniczną.

Aby wyznaczyć naprężenia, wygodnie jest wprowadzić pewną funkcję $F(x_2, x_3)$, zwaną funkcją naprężeń. Jeżeli przyjmiemy, że

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{12} &= F_{,3} \\ \sigma_{13} &= -F_{,2} \end{aligned} \right\} \quad (12.6)$$

to funkcja naprężeń $F(x_2, x_3)$ spełnia tożsamościowo równanie równowagi (12.4)₁.

Równanie problemu skręcania otrzymujemy na podstawie wzorów (12.6). Po zróźniczkowaniu równania (12.6)₁ względem x_3 , a równania (12.6)₂ względem x_2 mamy:

$$\begin{aligned} \sigma_{12,3} &= F_{,33} = G\theta \cdot (t_{,23} - 1), \\ \sigma_{13,2} &= F_{,22} = -G\theta \cdot (t_{,32} + 1). \end{aligned}$$

Jeśli funkcja deplanacji $t(x_2, x_3)$ jest ciągła wraz z drugimi pochodnymi, to $t_{,23} = t_{,32}$ i po dodaniu stronami uzyskujemy poszukiwane równanie skręcania, wyrażone przez funkcję naprężeń:

$$\nabla^2 F = -2G\theta. \quad (12.7)$$

Jest to równanie różniczkowe *Poissona*.

Należy jeszcze przeanalizować warunki brzegowe odpowiadające temu równaniu. Warunki te są określone przez warunki na powierzchniach bocznych ograniczających pręt (wzór (1.7b)):

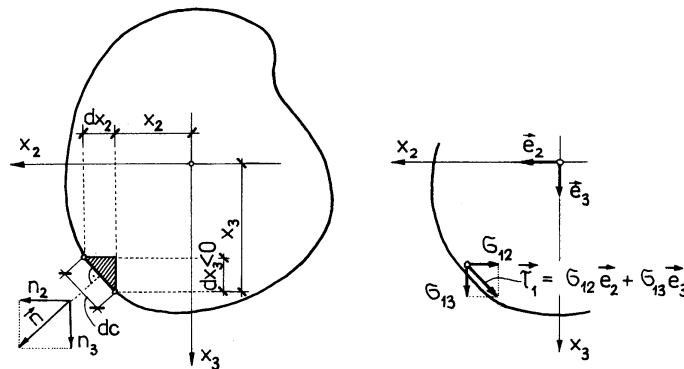
$$p_i^{(n)} = \sigma_{ji} n_j.$$

Pobocznicą pręta jest wolna od naprężeń, więc $p_1^{(n)} = p_2^{(n)} = p_3^{(n)} = 0$. Zatem

$$\begin{aligned} p_1^{(n)} &= \sigma_{11}n_1 + \sigma_{21}n_2 + \sigma_{31}n_3 = 0, \\ p_2^{(n)} &= \sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{32}n_3 = 0, \\ p_3^{(n)} &= \sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2 + \sigma_{33}n_3 = 0. \end{aligned}$$

Ponieważ w pręcie pryzmatycznym $n_1 = 0$, a $n_2 = \partial x_3 / \partial c$ i $n_3 = -\partial x_2 / \partial c$ (por. rys. 12.2), pozostaje tylko pierwsze z równań:

$$\sigma_{21}n_2 + \sigma_{31}n_3 = 0. \quad (12.8)$$



Rys. 12.2

Z zależności (12.8) wynika, że naprężenia σ_{12} i σ_{13} muszą przybierać takie wartości, by wypadkowe naprężenie τ_1 było styczne do konturu przekroju. Warto przypomnieć, że w identyczny sposób ustaliliśmy kierunek wypadkowego naprężenia $\tau_1 = \tau_x^*$ w punktach konturu przekroju przy omawianiu działania siły poprzecznej (por. wzór (11.7)).

Po wprowadzeniu funkcji naprężeń do warunku (12.8) mamy:

*) $\tau_x \equiv \tau_1 = \tau_{xy} + \tau_{xz}$.

$$-F_{,3}n_2 + F_{,2}n_3 = 0$$

lub

$$\frac{\partial F}{\partial x_3} \cdot \frac{dx_3}{dc} + \frac{\partial F}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dc} = 0.$$

Lewa strona powyższego równania jest pochodną funkcji $F = F[x_2(c), x_3(c)]$ względem zmiennej c , mierzonej wzdłuż linii tworzącej kontur przekroju:

$$\frac{dF}{dc} = \frac{\partial F}{\partial x_3} \cdot \frac{dx_3}{dc} + \frac{\partial F}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dc}.$$

Warunek ten można zapisać krócej:

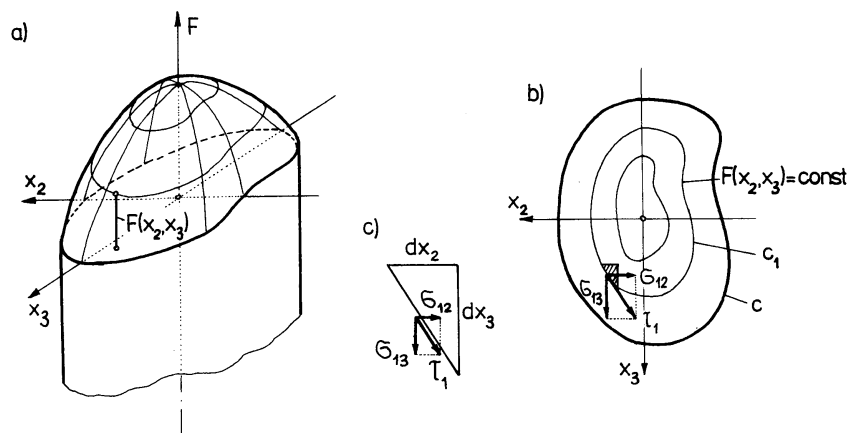
$$\frac{dF_c}{dc} = 0,$$

gdzie F_c oznacza wartości funkcji F na konturze przekroju pręta. Wynika stąd, że

$$F_c = \text{const.}$$

Funkcja naprężeń musi na konturze przekroju przyjmować jednakową wartość. Najwygodniej jest przyjąć, że brzegowa wartość funkcji F_c jest równa zeru:

$$F_c = 0. \quad (12.9)$$



Rys. 12.3

Warunek (12.9) jest poszukiwanym warunkiem brzegowym funkcji naprężeń, spełniającej równanie różniczkowe skręcania (12.7). Przebieg funkcji naprężeń obrazuje rys. 12.3a. Na rysunku 12.3b przedstawiono plan warstwiczny powierzchni $F(x_2, x_3)$. Rozważmy jeszcze pewien punkt warstwicy $F(x_2, x_3) = \text{const}$. Na krzywej tej przyrost funkcji F jest równy zeru, tzn.

$$\frac{dF}{dc_1} = \frac{\partial F}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dc_1} + \frac{\partial F}{\partial x_3} \cdot \frac{dx_3}{dc_1} = 0,$$

ale

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = -\sigma_{13}, \quad \frac{\partial F}{\partial x_3} = \sigma_{12},$$

skąd

$$\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{13}} = \frac{dx_2}{dx_3}.$$

Z ostatniej zależności (por. rys. 12.3c) wynikają następujące wnioski:

- wektor naprężenia $\tau_1 = \sigma_{12} \cdot \mathbf{e}_2 + \sigma_{13} \cdot \mathbf{e}_3$ jest w każdym punkcie styczny do warstwy $F(x_2, x_3) = \text{const}$; warstwy funkcji F są więc trajektoriami naprężeń stycznych,
- wartość wypadkowego naprężenia stycznego obliczona z zależności

$$\tau_1 = \sqrt{\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2} = \sqrt{(F_{,3})^2 + (F_{,2})^2}$$

pozwala traktować to naprężenie jako moduł gradientu funkcji naprężeń F ,

$$\tau_1 = |\text{grad}(F)|.$$

Jeśli uda się nam wyznaczyć funkcję naprężeń, możemy obliczyć jednostkowy kąt skręcenia z definicji momentu skręcającego:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \int_A (\sigma_{13} \cdot x_2 - \sigma_{12} \cdot x_3) dA = \int_A (-F_{,2} \cdot x_2 - F_{,3} \cdot x_3) dA = \\ &= - \int_A F_{,2} x_2 dx_2 dx_3 - \int_A F_{,3} x_3 dx_2 dx_3. \end{aligned}$$

Po wykonaniu całkowania przez części oraz uwzględnieniu, że $F_c = 0$ otrzymujemy:

$$\mathcal{M} = 2 \int_A F(x_2, x_3) dA. \quad (12.10)$$

Moment skręcający równa się więc podwójnej objętości ograniczonej powierzchnią $F(x_2, x_3)$ oraz płaszczyzną przekroju.

Jeżeli do rozwiązania stosujemy funkcję deplanacji $t(x_2, x_3)$, a nie funkcję naprężeń $F(x_2, x_3)$, to warunek brzegowy (12.8) po wykorzystaniu równań (12.3) prowadzi do zależności:

$$(t_{,2} - x_3)n_2 + (t_{,3} + x_2)n_3 = 0. \quad (12.11)$$

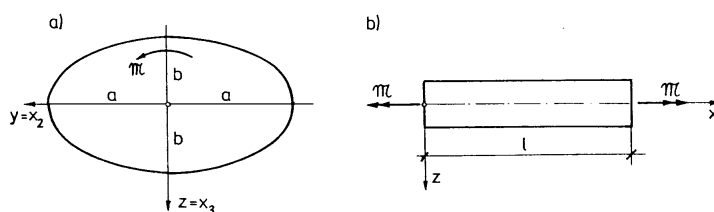
Funkcja $t(x_2, x_3)$ musi być tak obrana, by na konturze przekroju spełniała warunek (12.11). Drugi sposób rozwiązania problemu skręcania polega więc na wyznaczeniu funkcji deplanacji $t(x_2, x_3)$, która spełnia równanie Laplace'a (12.5) i warunek brzegowy (12.11) w każdym punkcie konturu przekroju.

12.1.2. Skręcanie pręta o przekroju eliptycznym

Kontur przekroju pręta jest opisany równaniem:

$$(a) \quad \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0,$$

gdzie a i b ($a \geq b$) są głównymi osiami sprzężonymi elipsy (por. rys. 12.4).



Rys. 12.4

Zastosujemy funkcję naprężeń o następującej postaci:

$$(b) \quad F(y, z) = m \cdot \left(\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 \right),$$

gdzie m jest pewną stałą. Z budowy wzoru (b) wynika, że warunek brzegowy na konturze przekroju jest spełniony ($F_c = 0$). Stałą m obliczymy przez podstawienie funkcji $F(y, z)$ do równania różniczkowego (12.7):

$$\nabla^2 F = 2m \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) = -2G\theta,$$

skąd

$$m = -G\theta \cdot \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}.$$

Wobec tego

$$(c) \quad F(y, z) = -G\theta \cdot \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \cdot \left(\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 \right).$$

Na podstawie wzoru (12.10) otrzymujemy:

$$(d) \quad \begin{aligned} \mathcal{M} &= 2 \int_A F dA = 2G\theta \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left[\int_A dA - \frac{1}{a^2} \int_A y^2 dA - \frac{1}{b^2} \int_A z^2 dA \right] = \\ &= 2G\theta \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left(A - \frac{1}{a^2} J_z - \frac{1}{b^2} J_y \right). \end{aligned}$$

Dla elipsy momenty bezwładności J_y i J_z oraz pole przekroju wynoszą:

$$J_y = \frac{1}{4} \pi b^3 a, \quad J_z = \frac{1}{4} \pi b a^3, \quad A = \pi ab,$$

co po podstawieniu do równania (d) prowadzi do zależności:

$$(e) \quad \mathcal{M} = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2} \cdot G\theta.$$

Gdy uwzględnimy wartość iloczynu $G I$ obliczoną ze wzoru (e), to na podstawie wzoru (c) otrzymamy ostateczną postać funkcji naprężeń $F(y, z)$:

$$(f) \quad F(y, z) = -\frac{\mathcal{M}}{\pi ab} \left(\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 \right).$$

Naprężenia styczne zmieniają się liniowo. Wynika to z zależności (12.6):

$$(g) \quad \begin{cases} \tau_{xy} = \frac{\partial F}{\partial z} = -\frac{2\mathcal{M}}{\pi ab^3} \cdot z, \\ \tau_{xz} = -\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2\mathcal{M}}{\pi a^3 b} \cdot y. \end{cases}$$

Dosyć istotne dla dalszych rozważań jest to, że moment skręcający przenoszony przez naprężenia τ_{xy} jest równy $\mathcal{M}/2$. Taką samą część momentu przenoszą oczywiście naprężenia τ_{xz} . Wniosek ten wynika z następującego obliczenia:

$$(h) \quad \begin{cases} \mathcal{M}^{(z)}(\tau_{xz}) = \int_A \tau_{xz} \cdot y dA = \frac{2\mathcal{M}}{\pi a^3 b} \int_A y^2 dA = \frac{2\mathcal{M}}{\pi a^3 b} \cdot J_z = \frac{1}{2} \mathcal{M}, \\ \mathcal{M}^{(y)}(\tau_{xy}) = -\int_A \tau_{xy} \cdot z dA = -\frac{2\mathcal{M}}{\pi ab^3} \int_A z^2 dA = -\frac{2\mathcal{M}}{\pi ab^3} \cdot J_y = -\frac{1}{2} \mathcal{M}. \end{cases}$$

Warto również zwrócić uwagę, że pola każdego z wykresów naprężeń wypadkowych τ_x są zawsze jednakowe

$$A_{\tau_x} = \frac{2\mathcal{M}}{\pi a^2 b} \cdot \frac{a}{2} = \frac{2\mathcal{M}}{\pi ab^2} \cdot \frac{b}{2} = \frac{\mathcal{M}}{\pi ab}.$$

Największe naprężenia występują więc w punktach konturu leżących najbliżej środka ciężkości przekroju (tzn. w punktach B i D na rys. 12.5). Ponieważ $a \geq b$, więc

$$(i) \quad |\tau_x|_{\max} = \frac{2\mathcal{M}}{\pi ab^2} = \frac{\mathcal{M}}{W_s},$$

gdzie $W_s = \pi ab^2 / 2$ i oznacza tutaj tzw. **wskaźnik wytrzymałości na skręcanie**.

Aby wyznaczyć przemieszczenia, trzeba określić funkcję deplacji $t(y, z)$. Funkcję tę najwygodniej obliczymy z jednego z równań (12.3):

$$\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\tau_{xy}}{G\theta} + z = -\frac{2\mathcal{M}}{G\theta \pi ab^3} \cdot z + z = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \cdot z.$$

Po scałkowaniu tego równania otrzymamy:

$$t(y, z) = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \cdot yz + C.$$

Stałą C wyznaczmy z uwzględnieniem wymagania, by punkty leżące na osi pręta nie doznawały przemieszczeń. Inaczej mówiąc przyjmujemy, że oś pręta nie wydłuża się i nie skraca. Mamy więc $t(0,0) = 0$, skąd $C = 0$.

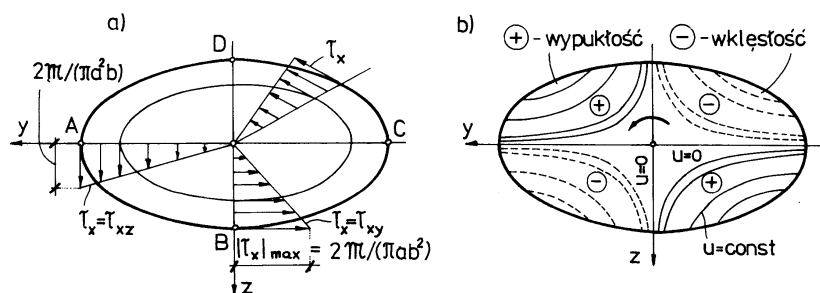
$$(j) \quad t(y, z) = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \cdot yz.$$

Z równania (e) można obliczyć jednostkowy kąt skręcenia:

$$(k) \quad \theta = \frac{\mathcal{M}}{G \left[\pi a^3 b^3 / (a^2 + b^2) \right]},$$

a ze wzorów (12.1) współrzędne wektora przemieszczenia:

$$(l) \quad \begin{cases} u_1 = u = \theta \cdot t = -\frac{\mathcal{M}}{G \left[\pi a^3 b^3 / (a^2 - b^2) \right]} \cdot yz, \\ u_2 = v = -\theta \cdot x_1 x_3 = -\frac{\mathcal{M}}{G \left[\pi a^3 b^3 / (a^2 + b^2) \right]} \cdot xz, \\ u_3 = w = \theta \cdot x_1 x_2 = \frac{\mathcal{M}}{G \left[\pi a^3 b^3 / (a^2 + b^2) \right]} \cdot xy. \end{cases}$$



Rys. 12.5

Warstwice funkcji $u(y, z)$ są hiperbolami. Na rysunku 12.5b warstwice oznaczone liniami ciągłymi odpowiadają wartościom dodatnim, natomiast linie przerywane – ujemnym wartościom przemieszczeń $u(y, z)$.

Stosownie do wzoru (k) jednostkowy kąt skręcenia można zapisać jeszcze inaczej:

$$\theta = \frac{\mathcal{M}}{GJ_s}, \quad (12.12)$$

gdzie GJ_s jest **szytywnością skręcania przekroju**, a J_s – tzw. **momentem bezwładności na skręcanie**:

$$J_s = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2} = \frac{A^4}{4\pi^2 J_b} \approx \frac{A^4}{40 J_b}; \quad (12.12a)$$

przy czym $J_b = J_y + J_z$ i oznacza tu biegunowy moment bezwładności. *De Saint-Venant* doszedł do wniosku, że wzór (12.12a) dla innych kształtów przekroju daje również bardzo dokładne wyniki. Można więc przyjąć, że sztywność na skręcanie jest równa sztywności na skręcanie prętów o przekroju eliptycznym o tej samej powierzchni A i tym samym biegunowym momencie bezwładności J_b . Sztywność na skręcanie jest więc odwrotnie proporcjonalna do biegunowego momentu bezwładności, a nie wprost proporcjonalna, jak przyjmowali poprzednicy *de Saint-Venanta*.

12.1.3. Skręcanie prętów o przekrojach kołowych i pierścieniowych

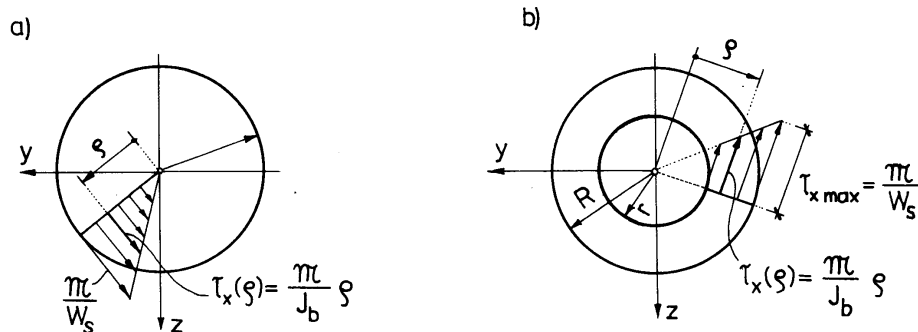
Zwróćmy uwagę na to, że dla przekroju kołowego ($a = b = r$) przemieszczenia $u(y, z) = 0$. Oznacza to, że podczas skręcania przekrój kołowy nie ulega deplanacji. Wzory na naprężenia i kąt skręcenia są następujące (rys. 12.6a):

$$\left. \begin{aligned} \tau_x &= \frac{\mathcal{M}}{J_b} \cdot \rho, & \tau_{x \max} &= \frac{\mathcal{M}}{W_s}, & W_s &= \frac{\pi r^3}{2}, \\ \theta &= \frac{\mathcal{M}}{GJ_s}, & J_s &= \frac{A^4}{4\pi^2 J_b} = \frac{\pi r^4}{2} = J_b. \end{aligned} \right\} \quad (12.13)$$

Wzory (12.13) obowiązują również dla przekrojów pierścieniowych, przy czym:

$$J_s = J_b = \frac{\pi}{2} (R^4 - r^4) \quad \text{oraz} \quad W_s = J_s / R. \quad (12.14)$$

Dla przekrojów kołowych i pierścieniowych moment bezwładności na skręcanie J_s jest **liczbowo** równy momentowi biegunowemu J_b . Było to źródłem błędnego założenia w dawniej stosowanych teoriach skręcania. W przekrojach pierścieniowych – podobnie jak w przekrojach kołowych – nie występuje deplanacja przekroju.

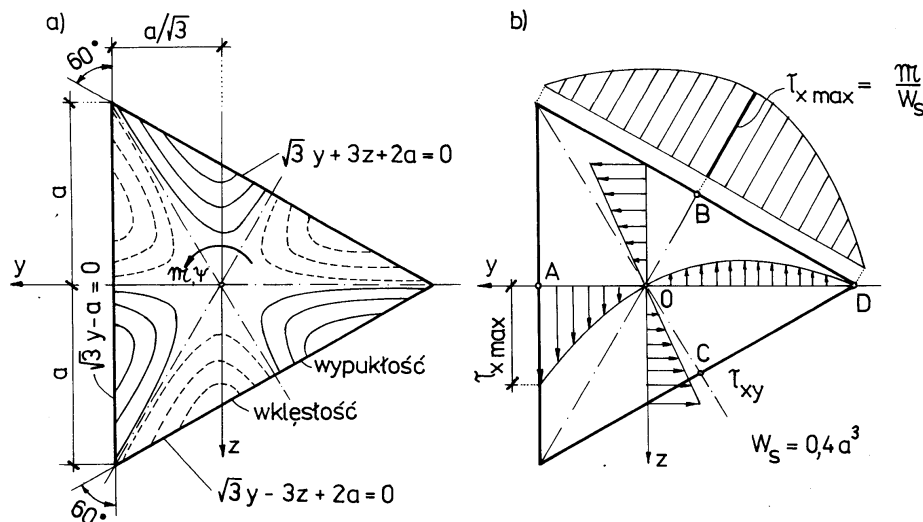


Rys. 12.6

12.1.4. Skręcanie pręta o przekroju w kształcie trójkąta równobocznego

Ścisłe rozwiązania zamknięte można uzyskać jeszcze dla przypadku, gdy przekrój pręta pryzmatycznego jest trójkątem równobocznym. Funkcja naprężeń jest iloczynem równań opisujących boki trójkąta (rys. 12.7):

$$(m) \quad F(y, z) = m(\sqrt{3}y - a)(\sqrt{3}y - 3z + 2a)(\sqrt{3}y + 3z + 2a).$$



Rys. 12.7

W ten sposób – podobnie jak dla przekroju eliptycznego – funkcja naprężeń zgodnie z warunkiem brzegowym (12.9) przyjmuje wartości zerowe na konturze przekroju. Stałą m dobieramy tak, by było spełnione równanie skręcania (12.6):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} &= 18\sqrt{3}m\left(y + \frac{a}{\sqrt{3}}\right), \\ \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} &= -18\sqrt{3}m\left(y - \frac{a}{\sqrt{3}}\right). \end{aligned}$$

Wobec tego

$$\nabla^2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 36am = -2G\theta,$$

skąd

$$(n) \quad m = -\frac{G\theta}{18a}.$$

Z zależności (12.10) otrzymujemy:

$$\mathcal{M} = 2 \int_A F dA = 2m \int_A (\sqrt{3}y - a) \left[(\sqrt{3}y + 2a)^2 - 9z^2 \right] dA = -\frac{18a^5 m \sqrt{3}}{5} = G\theta a^4 \frac{\sqrt{3}}{5},$$

więc

$$(o) \quad \theta = \frac{\mathcal{M}}{GJ_s},$$

gdzie

$$J_s = \frac{a^4 \sqrt{3}}{5}. \quad (12.15)$$

Naprężenia obliczymy z zależności (12.6):

$$(p) \quad \begin{cases} \tau_{xy} = \frac{\partial F}{\partial z} = -18m(\sqrt{3}y - a)z = +\frac{G\theta}{a} \cdot (\sqrt{3}y - a)z, \\ \tau_{xz} = -\frac{\partial F}{\partial y} = -9\sqrt{3}m\left(y^2 + \frac{2a}{\sqrt{3}} \cdot y - z^2\right) = \frac{\sqrt{3}G\theta}{2a}\left(y^2 + \frac{2a}{\sqrt{3}} \cdot y - z^2\right). \end{cases}$$

Po podstawieniu zależności (o) naprężenia określają się wzory:

$$(q) \quad \begin{cases} \tau_{xy} = \frac{\mathcal{M}}{aJ_s}(\sqrt{3}y - a)z = \frac{\mathcal{M}}{(a^5\sqrt{3}/5)}(\sqrt{3}y - a)z, \\ \tau_{xz} = \frac{\sqrt{3}}{2a} \frac{\mathcal{M}}{J_s}\left(y^2 + \frac{2a}{\sqrt{3}} \cdot y - z^2\right) = \frac{\mathcal{M}}{(2a^5/5)}\left(y^2 + \frac{2a}{\sqrt{3}} \cdot y - z^2\right). \end{cases}$$

Wykresy naprężeń stycznych przedstawia rys. 12.7b. Maksymalne naprężenia styczne występują w punktach leżących najbliżej środka ciężkości (punkty A, B, C):

$$(r) \quad \tau_{x\max} = \tau_{xz}\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, 0\right) = \frac{\mathcal{M}}{W_s}, \quad W_s = \frac{2a^3}{5}.$$

Naprężenia w narożach są równe zero. Pola wykresów wypadkowego naprężenia stycznego τ_x , odniesionych do dowolnej linii wychodzącej ze środka ciężkości przekroju, są takie same. Dla przykładu wzdłuż linii $z = 0$ pole dodatnich naprężeń

$\tau_x = \tau_{xz}$ odłożone na odcinku OA jest równe polu ujemnych naprężeń odłożonych na odcinku OD.

Deplanację wyznacza się identycznie jak dla przekroju eliptycznego, a odpowiednie równanie funkcji $t(y, z)$ jest następujące:

$$(s) \quad t(y, z) = \frac{\sqrt{3}}{2a}\left(y^2 - \frac{z^2}{3}\right) \cdot z.$$

Warstwice funkcji $u(y, z) = \theta t(y, z)$ podano na rys. 12.7a.

12.1.5. Obliczanie naprężeń i kąta skręcania dla prętów o dowolnym przekroju. Przekrój prostokątny

Dla prętów o dowolnym przekroju rozwiązanie ściśle uzyskuje się za pomocą szeregów *Fouriera*. Istnieją również przybliżone metody wyznaczania funkcji naprężeń lub funkcji deplanacji. Na uwagę zasługuje również metoda różnic skończonych omówiona w dodatku. Bardzo dobre rezultaty daje przybliżona teoria skręcania swobodnego zbudowana na podstawie teorii płyt grubych [12,36]. Poza tym informacji o charakterze rozkładu naprężeń dostarczają analogie błonowa i hydrodynamiczna. Omówimy je w p. 12.2.

Z punktu widzenia projektanta istotne jest wyznaczenie największego naprężenia stycznego $|\tau_{x\max}|$ oraz jednostkowego kąta skręcania. Ogólnie biorąc, wartości te oblicza się według wzorów:

$$\tau_{x\max} = \frac{\mathcal{M}}{W_s}, \quad (12.16)$$

$$\theta = \frac{\mathcal{M}}{GJ_s}. \quad (12.17)$$

Wskaźniki wytrzymałości na skręcanie W_s oraz momenty bezwładności na skręcanie J_s dla różnych przekrojów zawierają poradniki i tablice do projektowania konstrukcji. Warunek wytrzymałościowy polega na spełnieniu nierówności:

$$\sigma_{\text{red}} = \sqrt{3} |\tau_x|_{\text{max}} \leq \sigma_{\text{dop}},$$

skąd

$$|\tau_x|_{\text{max}} \leq \tau_{\text{dop}},$$

gdzie

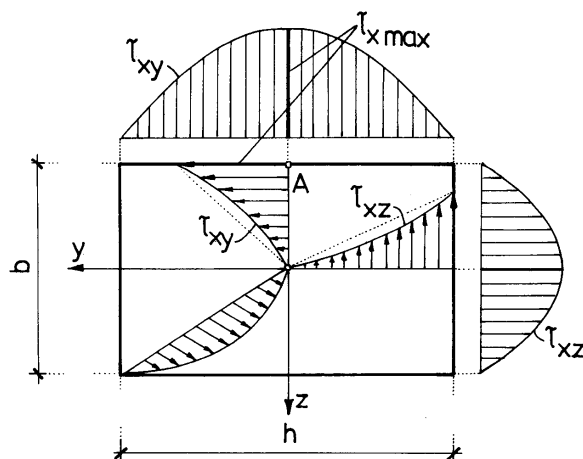
$$\tau_{\text{dop}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_{\text{dop}} \approx 0,6 \cdot \sigma_{\text{dop}}, \quad (12.18)$$

przy czym σ_{dop} oznacza naprężenie dopuszczalne przy rozciąganiu (ściskaniu), a τ_{dop} – dopuszczalne naprężenia przy ścinaniu. Warunek sztywnościowy polega na ograniczeniu maksymalnego całkowitego kąta skręcenia ψ :

$$\psi = \int_s \theta(s) ds \leq \psi_{\text{dop}}. \quad (12.19)$$

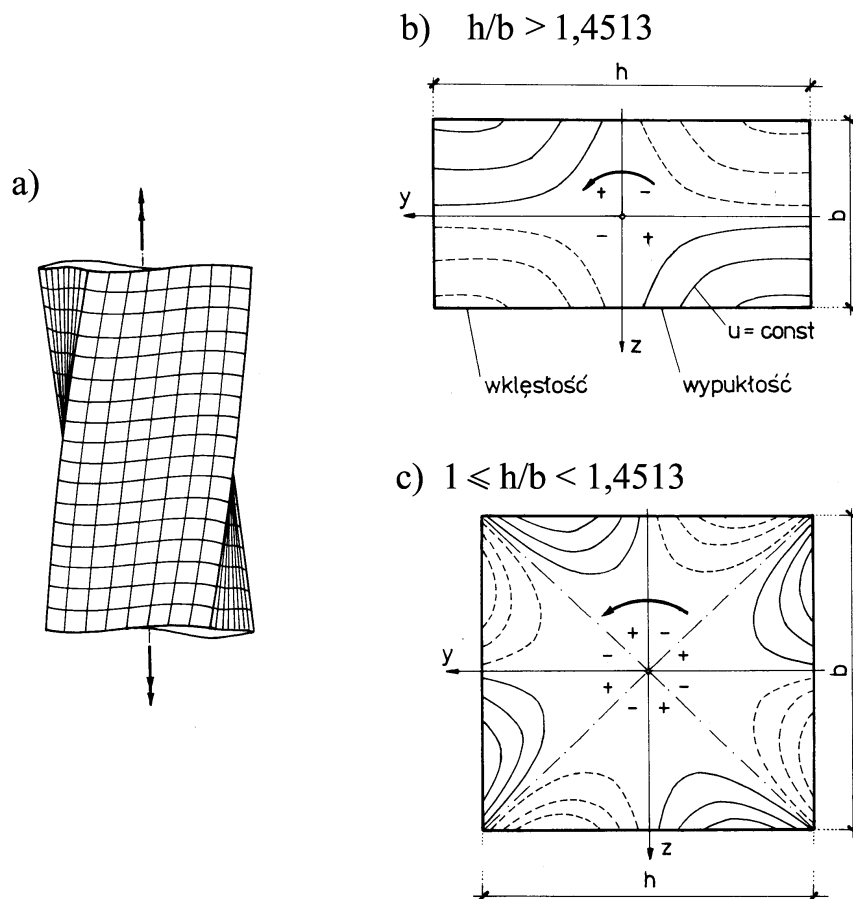
W praktyce poza przekrojami kołowym i pierścieniowym najczęściej stosujemy prostokątny przekrój pręta, dla którego obowiązują następujące zależności przybliżone:

$$(t) \quad \begin{cases} J_s = \frac{1}{3} b^4 \left(n - 0,63 + \frac{0,052}{n^4} \right), \\ W_s = \frac{1 + n^3}{0,35 + n^3} \cdot \frac{J_s}{b}, \text{ przy czym } n = \frac{h}{b} > 1. \end{cases}$$



Rys. 12.8

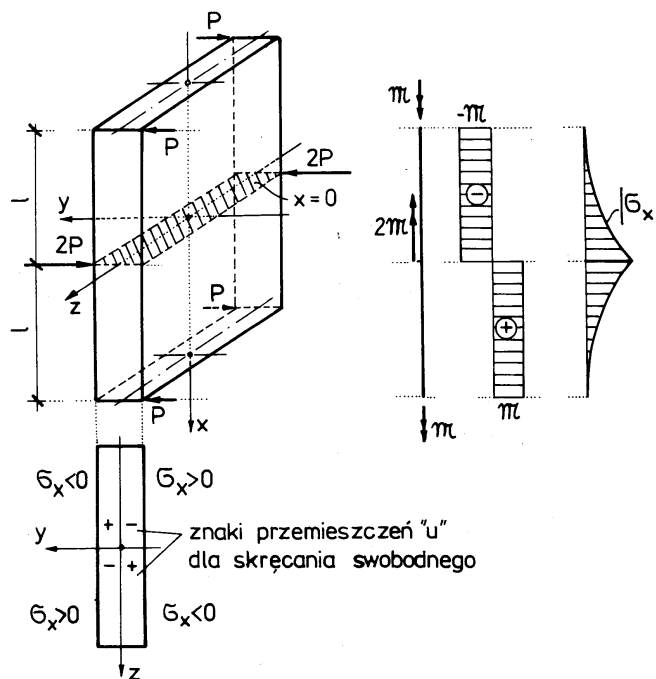
Rozkłady naprężeń ilustruje rys. 12.8, a deformacje pręta skręcanego o przekroju prostokątnym – rys. 12.9. Największe naprężenie styczne występuje na konturze przekroju w punkcie A, usytuowanym najbliżej środka przekroju, tzn. w połowie dłuższego boku. Interesujące jest, że dla $1 \leq h/b < 1,4513$ funkcja deplanacji $t(y, z)$ wykazuje cztery obszary wartości dodatnich i cztery obszary wartości ujemnych, natomiast dla $h/b > 1,451$ występują – podobnie jak w elipsie – po dwa takie obszary.



Rys. 12.9

12.1.6. Uwagi o skręcaniu nieswobodnym

Jeżeli choć jeden przekrój pręta niekołowego pozostaje płaski, to stan naprężenia w pręcie skręcanym różni się od podanego w poprzednich punktach i odpowiada skręcaniu nieswobodnemu. Dla ilustracji omówimy przykład pręta prostokątnego, w którym z warunku symetrii przekrój $x = 0$ pozostaje płaski (rys. 12.10).



Rys. 12.10

Aby zapobiec deplanacji, w obrębie przekroju poprzecznego należy rozmieścić naprężenia normalne σ_x . W obszarach, w których wystąpiłyby wypukłości, trzeba wprowadzić naprężenia ściskające, a w pozostałym obszarze – naprężenia rozciągające. Bliższa analiza tego problemu prowadzi do wniosku, że macierz naprężeń ma wówczas postać:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & 0 \end{bmatrix},$$

czyli oprócz naprężeń normalnych σ_x pojawiają się naprężenia styczne τ_{yz} . Zaburzenia stanu naprężenia, gdy jeden przekrój pręta pozostaje płaski, są największe dla $x = 0$ i szybko zanikają w miarę wzrostu współrzędnej x . Sztywność takiego pręta na skręcanie jest większa niż podczas skręcania swobodnego. Wpływ skręcania nieswobodnego jest bardzo istotny w przekrojach cienkościennych. Problematyka ta jest przedmiotem punktu 13.2.

12.1.7. Zależności energetyczne dla skręcania swobodnego

Do określenia zależności energetycznych wykorzystamy równania równowagi i hipotezę kinematyczną o nieodkształcalności konturu przekroju pręta. W przypadku skręcania swobodnego mamy:

$$\int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \int_V (\sigma_{12} \varepsilon_{12} + \sigma_{21} \varepsilon_{21} + \sigma_{13} \varepsilon_{13} + \sigma_{31} \varepsilon_{31}) dV.$$

Stan odkształcenia wyrażają wzory (12.2) wynikające z przyjętej hipotezy kinematycznej i związków geometrycznych. Po ich podstawieniu do powyższej zależności otrzymujemy:

$$\int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \int_V \theta [\sigma_{12}(t_{,2} - x_3) + \sigma_{13}(t_{,3} + x_2)] dV = \int_s \theta \left[\int_A (-\sigma_{12} x_3 + \sigma_{13} x_2) dA \right] ds +$$

$$+ \int_s \theta \left[\int_A (\sigma_{12} t_{,2} + \sigma_{13} t_{,3}) dA \right] ds.$$

Wyrażenie w nawiasie kwadratowym w pierwszej całce jest momentem skręcającym, więc

$$(u) \quad \int_s \theta \left[\int_A (-\sigma_{12} \cdot x_3 + \sigma_{13} \cdot x_2) dA \right] ds = \int_s \theta \cdot \mathcal{M} ds.$$

Wykażemy teraz, że

$$(w) \quad \int_A (\sigma_{12} \cdot t_{,2} + \sigma_{13} \cdot t_{,3}) dA = 0.$$

W tym celu naprężenia σ_{12} i σ_{13} wyrazimy przez funkcję naprężeń $F(x_2, x_3)$ spełniającą warunek brzegowy $F_c = 0$ na konturze przekroju. Wówczas

$$\int_A (\sigma_{12} t_{,2} + \sigma_{13} t_{,3}) dA = \int_A (F_{,3} \cdot t_{,2} - F_{,2} \cdot t_{,3}) dA = \int_A F_{,3} \cdot t_{,2} dA - \int_A F_{,2} \cdot t_{,3} dA.$$

Po scałkowaniu przez części pierwszej z całek otrzymujemy:

$$\int_A F_{,3} t_{,2} dA = \int \left[\int F_{,3} \cdot t_{,2} dx_3 \right] dx_2 = \int \left[F \cdot t_{,2} \Big|_{x_3^-}^{x_3^+} - \int F \cdot t_{,23} dx_3 \right] dx_2 = - \int_A F \cdot t_{,23} dA,$$

bo na konturze przekroju

$$F(x_2, x_3^-) = F(x_2, x_3^+) = F_c = 0.$$

Podobnie wykazuje się, że

$$- \int_A F_{,2} \cdot t_{,3} dA = \int_A F \cdot t_{,32} dA = \int_A F \cdot t_{,23} dA.$$

Wynika stąd, że zależność (w) jest prawdziwa.

W podsumowaniu stwierdzamy, że

$$\int_V \sigma_{ij} \cdot \varepsilon_{ij} dV = \int_s \mathcal{M}(s) \cdot \theta(s) ds. \quad (12.20)$$

Wzór (12.20) jest słuszny dla pręta wykonanego z materiału o dowolnej charakterystyce fizycznej. Dla pręta liniowo-sprężystego energię sprężystą U można wyrazić następującymi wzorami:

$$U = \frac{1}{2} \int_s \mathcal{M}(s) \cdot \theta(s) ds, \quad (12.21)$$

$$U_{\mathcal{M}} = \frac{1}{2} \int_s \frac{\mathcal{M}^2}{GJ_s} \cdot ds, \quad \text{bo} \quad \theta = \frac{\mathcal{M}}{GJ_s}, \quad (12.22)$$

$$U_{\theta} = \frac{1}{2} \int_s GJ_s \cdot \theta^2 ds. \quad (12.23)$$

Składniki wewnętrznych prac wirtualnych określają zależności:

$$\left. \begin{aligned} \int_V \sigma_{ij} \bar{\varepsilon}_{ij} dV &= \int_s \mathcal{M} \cdot \bar{\theta} ds, \\ \int_V \bar{\sigma}_{ij} \varepsilon_{ij} dV &= \int_s \bar{\mathcal{M}} \cdot \theta ds. \end{aligned} \right\} \quad (12.24)$$

12.2. ANALOGIE BŁONOWA I HYDRODYNAMICZNA

Wyobraźmy sobie płaską jednorodną błonę (np. bańkę mydlaną) rozpiętą na brzegu o tym samym obrysie co przekrój poprzeczny pręta, poddaną równomiernemu rozciąganiu R na brzegu i równomiernemu ciśnieniu p na powierzchni (rys. 12.11). Z równowagi rzutów sił pionowych działających na błonę otrzymujemy:

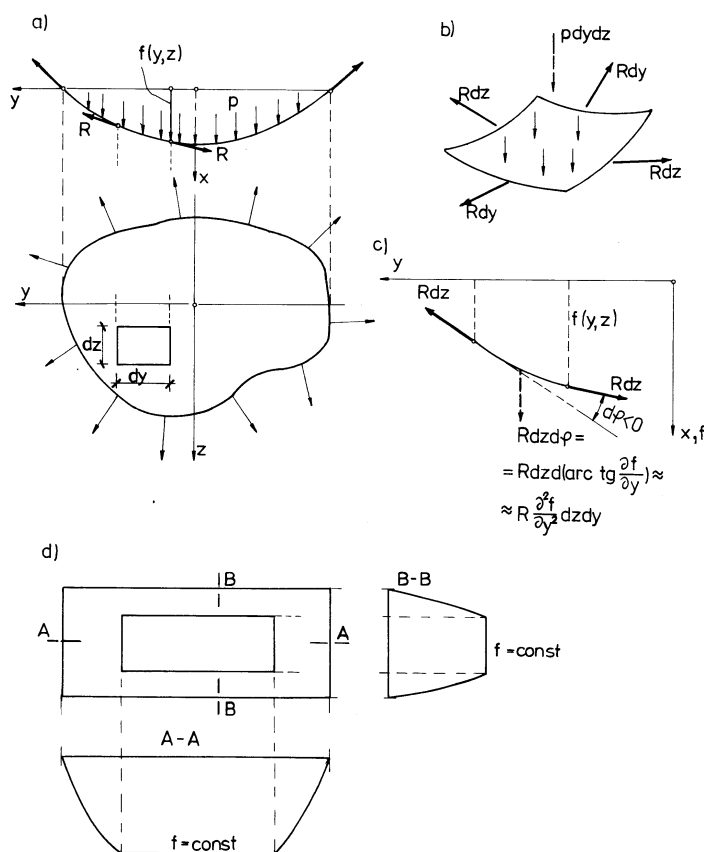
$$p \, dy \, dz + R \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy \, dz + R \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} dy \, dz = 0,$$

skąd

$$(a) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -\frac{p}{R}.$$

W powyższym równaniu różniczkowym $f(y,z)$ oznacza rzędne powierzchni wygiętej błony. Na brzegu ugięcia te są równe zero:

$$(b) \quad f_c = 0.$$



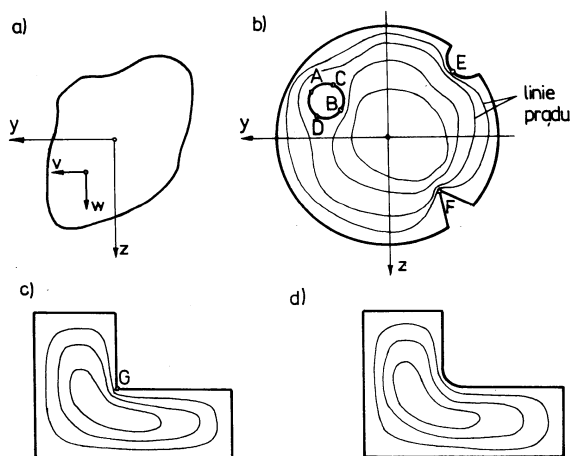
Rys. 12.11

Porównując równanie (a) i warunek brzegowy (b) z równaniem (12.7) i warunkiem (12.9) na funkcję naprężeń $F(y, z)$ widzimy, że zależności te są identyczne, jeżeli przyjmiemy, iż $f = F$ oraz $p/R = 2G\theta$. Analogię tę zauważył Prandtl w 1903 roku. Z powyższego wypływa wniosek, że kształt powierzchni wygiętej błony jest podobny do kształtu funkcji naprężeń. Konsekwencją tego są następujące stwierdzenia:

- warstwyce funkcji $f(y, z)$ są trajektoriami naprężeń stycznych τ_x ,
- moduł naprężenia τ_x w danym punkcie jest proporcjonalny do największego spadku (gradientu) powierzchni błony,
- moment skręcający M jest proporcjonalny do objętości zawartej między płaszczyzną przekroju a powierzchnią błony.

Zastosowanie błony mydlanej rozpiętej na ramce z drutu o kształcie odpowiadającym przekrojowi poprzecznemu pręta pozwala uzyskać w sposób doświadczalny wszystkie niezbędne informacje dotyczące

problemu skręcania swobodnego. Metodę tę stosuje się do wyznaczania stanu naprężenia i sztywności skręcania prętów o różnych skomplikowanych kształtach przekroju poprzecznego. W prętach wydłużonych kształt błony ilustruje rys. 2.11d. W obszarze wydrążenia powierzchnia błony jest płaszczyzną ($f = \text{const}$).



Rys. 12.12

Bardzo sugestywne są analogie hydrodynamiczne. Przedstawimy sens jednej z nich – analogii *Greenhilla* (1910 rok). Jeżeli ciecz idealna krąży ze stałym natężeniem wiru w rurze o tym samym przekroju co skręcany pręt (rys. 12.12), to z warunku nieściśliwości otrzymujemy:

$$(c) \quad \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

natomiast warunek stałości natężenia wiru przyjmuje postać:

$$(d) \quad \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = \text{const},$$

przy czym v i w oznaczają tutaj składowe prędkości w danym punkcie^{*)}.

Wprowadzając funkcję prądu:

$$(e) \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad w = -\frac{\partial \Phi}{\partial y},$$

spełniamy równanie (c), a z równania (d) znajdujemy:

$$(f) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \text{const}.$$

Prędkości v i w odpowiadają naprężeniom τ_{xy} i τ_{xz} . Na brzegu prędkość krążącej cieczy ma kierunek styczny do brzegu, tzn. odpowiada warunkowi brzegowemu w postaci (12.9)^{*)}. Linie prądu pokrywają się z trajektoriami naprężeń stycznych τ_x .

Za pomocą analogii *Greenhilla* bardzo łatwo można ocenić jakościowy wpływ różnych czynników na rozkład naprężeń stycznych. Wpływ otworu kołowego na rozkład naprężeń stycznych jest taki sam jak wprowadzenie do strumienia cieczy nieruchomego walca o tej samej średnicy co średnica otworu (rys. 12.12b). Naprężenia (tj. prędkości) w punktach C i D są równe zero, natomiast w punktach A i B są bardzo duże. Podobny wpływ ma półkolisty rowek wycięty równolegle do osi wału. Największe naprężenie styczne występuje w punkcie E. Analogia hydrodynamiczna pokazuje, jak niebezpieczne dla pręta skręcanego są szczeliny promieniowe, uniemożliwiające „przepływ” naprężeń. Z analogii hydrodynamicznej wynika wprost, że naprężenia styczne we wszystkich wypukłych narożach są równe zero, na-

^{*)} Wielkości v i w można traktować odpowiednio jako przemieszczenia u_2 i u_3 w jednostce czasu. Wzór (c) oznacza zatem, że dylatacja w płaskim stanie odkształcenia jest równa zero ($\epsilon_{kk} = 0$, por. wzór (2.13)). Ze wzoru (d) wynika, że tensor obrotu $\omega_{23} = u_{2,3} - u_{3,2}$ ma wartość stałą.

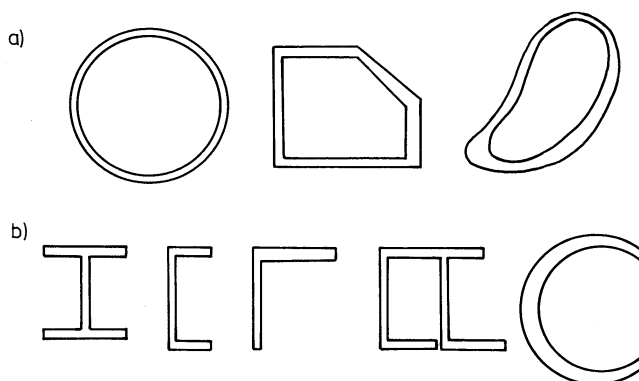
^{*)} Ponieważ wydajność wiru jest stała, więc w jednostce czasu przez różne przekroje przepływa ta sama ilość cieczy. Tłumaczy to stwierdzoną wcześniej dla elipsy i trójkąta równość pól wykresów naprężeń τ_x .

tomiast w ostrych wklęsłych narożach są nieskończenie duże (por. punkty F i G). Znaczący to, że nawet niewielki moment skręcający spowoduje uplastycznienie bądź pęknięcie pręta. Naprężenia te można wydatnie zmniejszyć przez zaokrąglenie krawędzi (rys. 12.12d). Stosuje się to powszechnie w kształtownikach walcowych.

12.3. SKRĘCANIE SWOBODNE PRĘTÓW CIENKOŚCIENNYCH

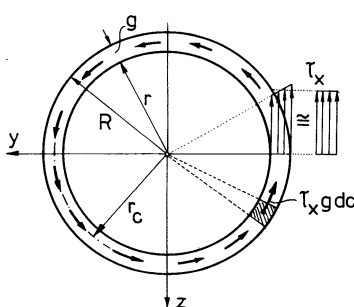
12.3.1. Profile zamknięte

Profile cienkościennie dzielą się na dwie zasadnicze grupy: profile zamknięte (rys. 12.13a) i otwarte (rys. 12.13b). Cechą charakterystyczną tych prętów jest to, że grubość ścianki jest niewielka w stosunku do pozostałych wymiarów przekroju. Podział na profile zamknięte i otwarte wynika z istotnych różnic w rozkładzie naprężeń i charakterze deformacji.



Rys. 12.13

W profilach zamkniętych przyjmuje się w przybliżeniu, że naprężenia styczne τ_x na grubości ścianki się nie zmieniają. Założenie to w sposób naturalny wynika z rozwiązania, uzyskanego dla przekroju pierścieniowego o bardzo małej grubości ścianki, $g = R - \epsilon$ (por. p. 12.1.3 i rys. 12.14).



Rys. 12.14

Rozważmy dowolny przekrój cienkościenny przedstawiony na rys. 12.15. Z sumy sił równoległych do osi x , działających na element pokazany na rysunku 12.15c wynika, że

$$\tau_{x_1} \cdot g_1 = \tau_{x_2} \cdot g_2 = \tau_x(c) \cdot g(c) = \text{const.} \quad (12.25)$$

Zwróćmy uwagę, że zależność ta w analogii hydrodynamicznej wyraża stałą wydajność przepływu nieściśliwej cieczy.

Obliczymy teraz moment skręcający z uwzględnieniem zależności (12.25):

$$(a) \quad \mathcal{M} = \int_c \tau_x(c) \cdot g(c) \cdot h(c) \, dc = \tau_x \cdot g \int_c h(c) \, dc,$$

gdzie $h(c)$ jest wysokością elementarnego trójkąta o podstawie dc (por. rys. 12.15). Pole tego trójkąta $dA_c = h(c) \, dc / 2$. Uwzględnivszy ten fakt otrzymujemy:

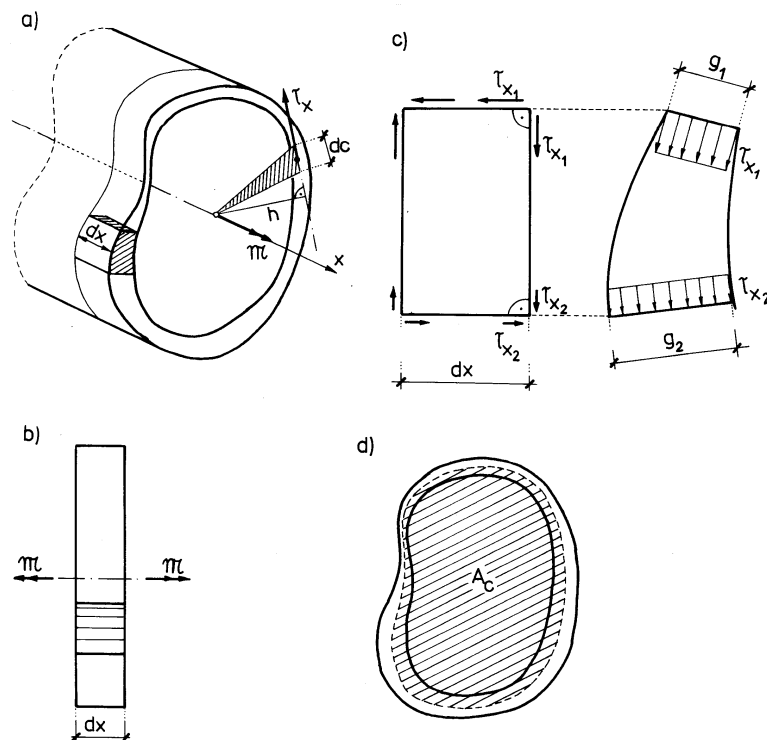
$$\mathcal{M} = 2 \tau_x g A_c,$$

skąd

$$\tau_x = \frac{\mathcal{M}}{2 A_c g}, \quad (12.26)$$

przy czym A_c oznacza pole ograniczone linią środkową konturu przekroju (rys. 12.15d). Maksymalne naprężenie styczne τ_x występuje tam, gdzie $g = g_{\min}$. Wobec tego

$$\left. \begin{aligned} \tau_{x \max} &= \frac{\mathcal{M}}{W_s}, \\ W_s &= 2 A_c \cdot g_{\min}. \end{aligned} \right\} \quad (12.27)$$



Rys. 12.15

Pozostaje jeszcze określenie sztywności przekroju na skręcanie. Wykorzystamy tu twierdzenie *Clapeyrona* ułożone dla pręta o długości dx , obciążonego zewnętrznym momentem skręcającym \mathcal{M} (por. rys. 12.15c):

$$(b) \quad \frac{1}{2} \mathcal{M} \cdot \theta dx = \frac{1}{2} \left[\int_A \left(\tau_x^2 / G \right) dA \right] dx.$$

Po uwzględnieniu, że $dA = g dc$ oraz wzór (12.26) na naprężenie τ_x otrzymujemy:

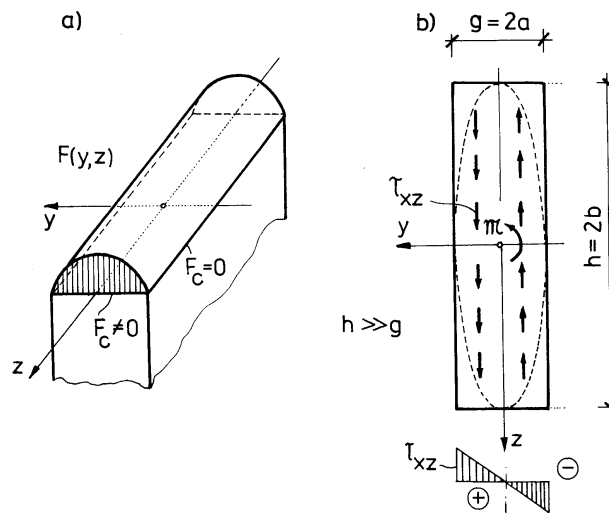
$$(c) \quad \theta = \frac{1}{\mathcal{M}} \int_c \frac{\mathcal{M}^2 \cdot g dc}{4A_c^2 g^2 G} = \frac{\mathcal{M}}{4GA_c^2} \cdot \int_c \frac{dc}{g(c)},$$

skąd

$$\theta = \frac{\mathcal{M}}{GJ_s}, \quad \text{gdzie } J_s = 4A_c^2 \cdot \left[\int_c \frac{dc}{g(c)} \right]. \quad (12.28)$$

12.3.2. Profile otwarte

Dowolny profil otwarty można traktować jako przekrój złożony z n elementów o kształcie wydłużonego prostokąta.

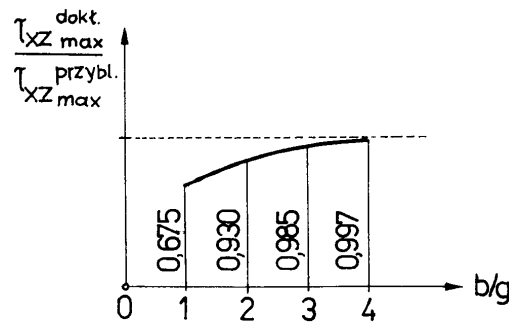


Rys. 12.16

Spróbujemy znaleźć rozwiązanie przybliżone dla takiego prostokąta. Zastosujemy funkcję naprężeń dla elipsy, w której $b \rightarrow \infty$, przy czym $b = h/2$ oraz $a = g/2 \ll b$ (por. p. 12.1.2 i rys. 12.16):

$$(d) \quad F(y, z) = -\lim_{b \rightarrow \infty} \left[G\theta \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left(\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 \right) \right] = -G\theta \left(y^2 - \frac{g^2}{4} \right).$$

Tak przyjęta funkcja naprężeń spełnia warunek brzegowy tylko dla $y = \pm g/2$. Dla $z = \pm h/2$ funkcja F jest różna od zera (rys. 12.16a). Niemniej jednak okazuje się, że dla odpowiednio dużego stosunku h/g błąd w naprężeniach jest znikomy. Ilustruje to wykres na rys. 12.17 (por. *Mutermilch, Kociolek* [29], str. 18).



Rys. 12.17

Obliczymy teraz moment bezwładności na skręcanie J_s :

$$(e) \quad \mathcal{M} = 2 \int F dA = -2G\theta \left[\int_A y^2 dA - \frac{g^2}{4} \int_A dA \right] = -2G\theta \left(J_z - \frac{g^2}{4} \cdot A \right) =$$

$$= -2G\theta \cdot \left(\frac{hg^3}{12} - \frac{g^2}{4} h \cdot g \right) = G\theta \frac{hg^3}{3},$$

skąd

$$J_s = \frac{1}{3} \cdot h \cdot g^3. \quad (12.29)$$

Wobec tego

$$(f) \quad F = F(y) = -G\theta \left(y^2 - \frac{g^2}{4} \right) = -\frac{\mathcal{M}}{J_s} \left(y^2 - \frac{g^2}{4} \right).$$

Naprężenia styczne wynoszą:

$$\tau_{xy} = \frac{\partial F}{\partial z} = 0, \quad \tau_{xz} = -\frac{\partial F}{\partial y} = \tau_x = \frac{2\mathcal{M}}{J_s} \cdot y, \quad (12.30)$$

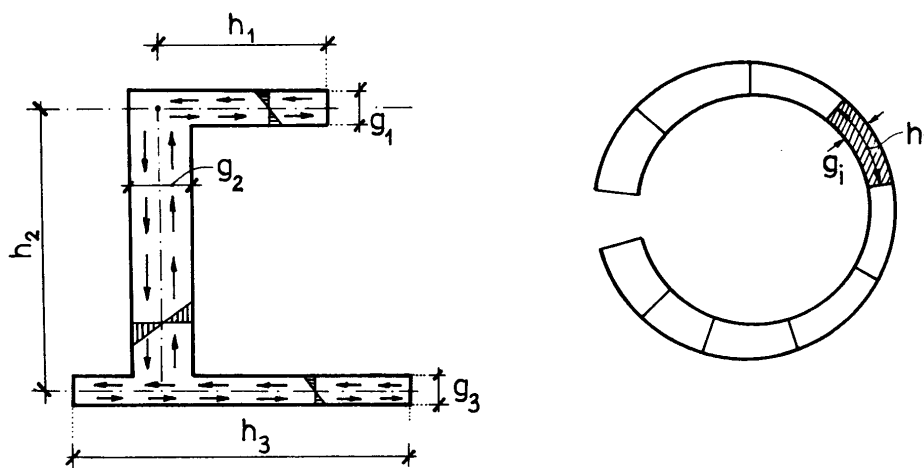
a maksymalne naprężenia styczne określa wzór:

$$\tau_{x \max} = \frac{2\mathcal{M}}{J_s} \cdot \frac{g}{2} = \frac{\mathcal{M}}{J_s} \cdot g. \quad (12.31)$$

Przybliżony rozkład naprężeń stycznych w wydłużonym prostokącie obrazuje rys. 12.16b. Nawiązując do wzorów (h) z p. 12.1, zwracamy uwagę na to, że moment skręcający przenoszony przez naprężenia τ_{xz} jest równy tylko $\mathcal{M}/2$. Drugą połowę momentu przenoszą naprężenia τ_{xy} , które w rzeczywistości pojawiają się tylko w pobliżu krótszych boków przekroju. Naprężenia te, stosownie do przybliżonego kształtu funkcji naprężeń, przyjmują wartości nieskończenie duże, ale działają na nieskończenie małym polu. W efekcie odpowiadające im wypadkowe tworzą nieskończenie małą parę sił o nieskończenie dużym ramieniu. Moment tej pary sił jest jednak skończony, co wynika z badania symbolu nieoznaczonego. Wartość tego momentu jest równa połowie momentu skręcającego, tzn.

$$\int_A \tau_{xy} \cdot z dA = \frac{1}{2} \mathcal{M}.$$

Trzeba dodać, że przyjęte przybliżenia nie wprowadzają jednak dużych błędów, jeżeli chodzi o sztywność skręcania wynikającą ze wzoru (e).



Rys. 12.18

Dla przekroju składającego się z większej liczby wydłużonych prostokątów naprężenia maksymalne w poszczególnych elementach obliczamy według wzoru:

$$(g) \quad \tau_{xi} = \frac{\mathcal{M}_i}{J_{si}} \cdot g_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

gdzie \mathcal{M}_i oznacza moment skręcający przenoszony przez i -ty prostokąt (rys. 12.18).

Wykorzystamy teraz fakt, że jednostkowy kąt skręcania dla każdego z prostokątów tworzących przekrój jest taki sam i równa się jednostkowemu kątowi skręcania całego przekroju złożonego. Mamy więc:

$$(h) \quad \theta = \frac{\mathcal{M}_1}{GJ_{s1}} = \frac{\mathcal{M}_2}{GJ_{s2}} = \dots = \frac{\mathcal{M}_i}{GJ_{si}} = \dots = \frac{\mathcal{M}_n}{GJ_{sn}} = \frac{\mathcal{M}}{GJ_s},$$

przy czym

$$(i) \quad \mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 + \dots + \mathcal{M}_i + \dots + \mathcal{M}_n = \sum_{i=1}^n \mathcal{M}_i.$$

Z zależności (h) otrzymujemy:

$$(j) \quad \mathcal{M}_i = GJ_{si} \theta,$$

skąd

$$(k) \quad \mathcal{M} = \sum_{i=1}^n \mathcal{M}_i = G\theta \sum_{i=1}^n J_{si} = G\theta J_s.$$

Wnioskujemy zatem, że

$$J_s = \sum_{i=1}^n J_{si} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n h_i \cdot g_i^3, \quad (12.32)$$

natomiast z zależności (h) wynika, iż

$$(l) \quad \frac{\mathcal{M}_i}{J_{si}} = \frac{\mathcal{M}}{J_s} = G\theta = \text{const.}$$

Ponieważ wzór (12.32) jest przybliżony, w zależności od kształtu przekroju stosuje się niekiedy mnożnik poprawkowy α bliski jedności. Wtedy

$$J_s = \alpha \cdot \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n h_i \cdot g_i^3. \quad (12.32a)$$

Uwzględnivszy zależność (l) we wzorze (g) otrzymujemy ogólny wzór na obliczenie naprężenia maksymalnego w " i -tym" prostokącie

$$\tau_{xi} = \frac{\mathcal{M}}{J_s} \cdot g_i. \quad (12.33)$$

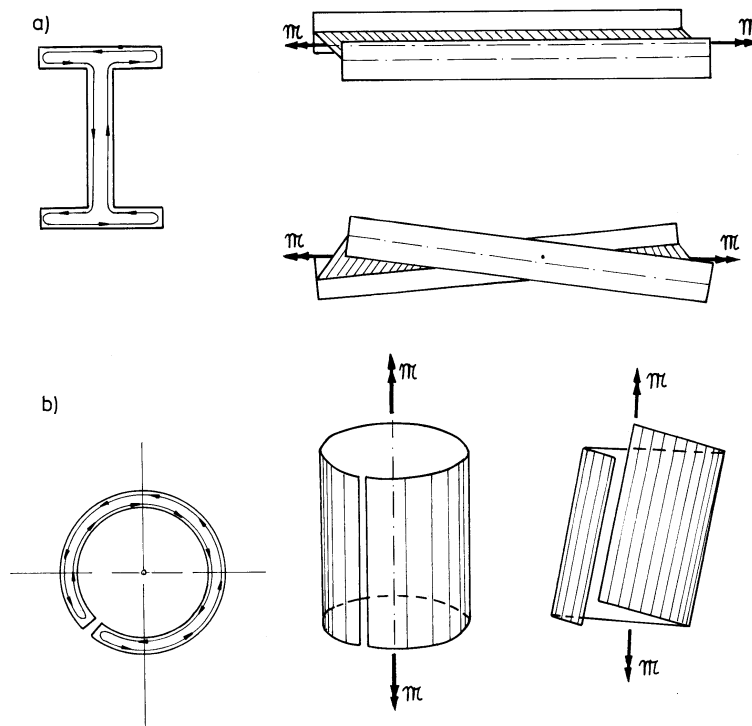
Maksymalne naprężenie styczne w całym przekroju

$$\tau_{x \max} = \frac{M}{J_s} \cdot g_{\max} \cdot \quad (12.34)$$

Ze wzoru (12.34) wynika, że

$$W_s = \frac{J_s}{g_{\max}}. \quad (12.35)$$

Oznacza to, że największe naprężenia styczne w profilu otwartym występują tam, gdzie grubość ścianki g jest największa.



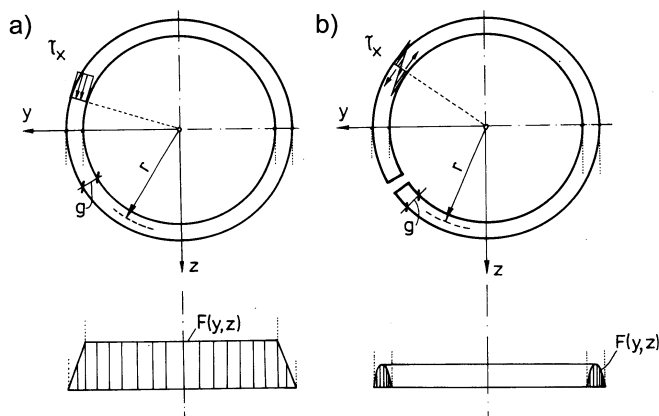
Rys. 12.19

Na uwagę zasługuje fakt, że podczas skręcania swobodnego przekroju otwartego deplanacja jest bardzo wyraźnie widoczna. Ilustruje to rys. 12.19. W trakcie montażu konstrukcji złożonej z prętów cienkościennych trudno jest stworzyć takie warunki, by była swoboda deplanacji. Dlatego też wyprowadzone wyżej wzory tylko w pewnych szczególnych przypadkach służą do oceny wytrzymałości otwartych prętów cienkościennych.

12.3.3. Porównanie skręcania swobodnego prętów cienkościennych zamkniętych i otwartych

Bardzo sugestywnym przykładem ilustrującym różnice między skręcaniem swobodnym przekrojów zamkniętych i otwartych jest rura cienkościenna. Rysunek 12.20a przedstawia profil zamknięty, a rys. 12.20b – profil otwarty, uzyskany przez rozcięcie rury wzdłuż tworzącej. Na obu rysunkach podano odpowiedni kształt funkcji naprężeń $F(y, z)$. Zasadnicze różnice polegają na:

- charakterze rozkładu naprężeń stycznych na grubości ścianki,
- wartości naprężeń maksymalnych,
- sztywności skręcania przekroju.



Rys. 12.20

Rozkłady naprężeń różnią się jakościowo: w profilach zamkniętych naprężenia na grubości ścianki są stałe, a w profilach otwartych zmieniają się liniowo przyjmując, wartości zerowe w punktach linii środkowej konturu. W przekrojach zamkniętych największe naprężenia styczne występują tam, gdzie $g = g_{\min}$, a w przekrojach otwartych tam, gdzie $g = g_{\max}$.

Rozważmy dwa pręty wykonane z rur kolistych o takich samych grubościach ścianek, przy czym jeden z prętów ma przekrój zamknięty a drugi otwarty (rurę przecięto wzdłuż tworzącej). Jeśli oba pręty skręcane są takim samym momentem, to stosunki jednostkowych kątów skręcania wynoszą:

$$\frac{\theta^{(o)}}{\theta^{(z)}} = \frac{J_s^{(z)}}{J_s^{(o)}},$$

a stosunki maksymalnych naprężeń stycznych:

$$\frac{\tau_x^{(o)}}{\tau_x^{(z)}} = \frac{W_s^{(z)}}{W_s^{(o)}}.$$

Moment bezwładności na skręcanie dla rury o profilu zamkniętym wynosi:

$$J_s^{(z)} = 4 A_c^2 / \left(\frac{1}{g} \oint dc \right) = \frac{4\pi^2 r^4 g}{2\pi r} = 2\pi r^3 \cdot g,$$

a rury rozciętej (profil otwarty)

$$J_s^{(o)} = \frac{1}{3} \sum h_i \cdot g_i^3 = \frac{1}{3} g^3 \sum h_i = \frac{1}{3} g^3 2\pi r = \frac{2}{3} \pi r \cdot g^3.$$

Odpowiednie wartości wskaźników wytrzymałości są następujące:

$$W_s^{(z)} = 2 A_c \cdot g = 2\pi r^2 g, \quad W_s^{(o)} = \frac{J_s^{(o)}}{g} = \frac{2}{3} \pi r g^2.$$

Wobec tego

$$\frac{\tau_x^{(o)}}{\tau_x^{(z)}} = 3 \left(\frac{r}{g} \right) \quad \text{oraz} \quad \frac{\theta^{(o)}}{\theta^{(z)}} = 3 \left(\frac{r}{g} \right)^2.$$

Jeśli na przykład $r/g = 15$, to $\tau_x^{(o)} : \tau_x^{(z)} = 45$ i $\theta^{(o)} : \theta^{(z)} = 675$ (!). Widzimy więc, że naprężenia w przekroju otwartym są kilkadziesiąt razy większe, a kąt skręcania jest aż kilkaset razy większy od odpowiednich wartości dla przekroju zamkniętego.