



PODSUMOWANIE TRZECIEJ CZĘŚCI

Wiadomości ogólne

• Warunki równowagi układu sił

Siła jest wektorem będącym mechaniczną miarą oddziaływania ciał materialnych. Konsekwencją tego pewnika jest akceptacja algebry wektorów do badania równowagi ciał sztywnych. Równowaga ta zachodzi, gdy wektor wypadkowy wszystkich sił $\mathbf{P}^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) i wektor momentu tych sił względem dowolnie obranego punktu są równe zero. Analityczna postać warunków równowagi jest następująca:

$$\sum_{i=1}^n P_x^{(i)} = 0, \sum_{i=1}^n P_y^{(i)} = 0, \sum_{i=1}^n P_z^{(i)} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n M_x^{(i)} = 0, \sum_{i=1}^n M_y^{(i)} = 0, \sum_{i=1}^n M_z^{(i)} = 0,$$

gdzie

$$M_x^{(i)} = y_i P_z^{(i)} - z_i P_y^{(i)},$$

$$M_y^{(i)} = z_i P_x^{(i)} - x_i P_z^{(i)},$$

$$M_z^{(i)} = x_i P_y^{(i)} - y_i P_x^{(i)}.$$

Liczby x_i, y_i, z_i oznaczają współrzędne punktów przyłożenia sił $\mathbf{P}^{(i)}$.

W płaskim układzie sił pokrywających się z płaszczyzną układu współrzędnych x, z , mamy $P_y^{(i)} = 0, y_i = 0$, oraz $M_x^{(i)} = M_z^{(i)} = 0$. Wtedy istotne są tylko trzy równania równowagi:

$$\sum_{i=1}^n P_x^{(i)} = 0, \quad \sum_{i=1}^n P_z^{(i)} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_y^{(i)} = \sum_{i=1}^n (z_i P_x^{(i)} - x_i P_z^{(i)}) = 0.$$

Równania równowagi dla płaskiego układu sił mogą być stosowane w następujących trzech wariantach:

- suma rzutów sił na dwie dowolne równoległe proste oraz suma momentów tych sił względem dowolnego punktu są równe zero (postać jak wyżej),
- suma rzutów sił na jedną dowolną prostą oraz suma momentów tych sił względem dwóch dowolnych punktów nie leżących na prostej prostopadłej do kierunku rzutowania sił są równe zero,
- suma momentów sił względem trzech dowolnych punktów nie leżących na jednej prostej jest równa zero.

W metodzie wykreślnej równania równowagi płaskiego układu sił odpowiadają zamykaniu się wieloboku sił ($\Sigma P_x^{(i)} = 0, \Sigma P_z^{(i)} = 0$) i zamykaniu się wieloboku sznurowego ($\Sigma M_y^{(i)} = 0$).

• Podpory prętów

Przekroje pręta zachowują się jak sztywne figury płaskie, mające tylko sześć stopni swobody:

$$\{d_i\} = \{u, v, w, \psi, \varphi_y, \varphi_z\}, \quad i = 1, 2, \dots, 6.$$

Podparcie pręta w danym punkcie osi oznacza wprowadzenie dodatkowych więzów, odbierających przekrojowi jeden, dwa lub więcej stopni swobody. Obciążeniu pręta (tzw. siłom czynnym) towarzyszą reakcje więzów podporowych (tzw. sił biernych).

Typowe rodzaje podpór w układach płaskich (płaszczyzna x, z) to:

- *utwierdzenie* – przekrój nie ma żadnego stopnia swobody ($u = w = 0$; $\varphi_y = 0$); występują zatem trzy reakcje więzów: dwie siły składowe i moment;
- *podpora teleskopowa* – pozbawia przekrój dwóch stopni swobody ($w = 0$, $\varphi_y = 0$), występują dwie reakcje: moment i siła o kierunku normalnym do podstawy fundamentu;
- *podpora przegubowa nieprzesuwna* – pozbawia przekrój dwóch stopni swobody ($u = v = 0$); występują dwie składowe reakcje (dwie siły);
- *podpora przegubowa przesuwna* – pozbawia przekrój jednego stopnia swobody ($w = 0$), występuje tylko jedna składowa reakcji o kierunku pokrywającym się z osią pręta podporowego;
- *podpora "ślizgowa"* – pozbawia przekrój dwóch stopni swobody ($u = 0$, $\varphi_y = 0$); występują dwie składowe reakcje: siła podłużna i moment zginający.

• Czynniki zewnętrzne powodujące deformację konstrukcji. Obciążenia

Na obciążenia zewnętrzne składają się siły powierzchniowe i masowe. Można wprowadzić jeszcze inny podział: na obciążenia rozłożone w sposób ciągły i obciążenia skupione. Obciążenia skupione stanowią idealizację obciążenia ciągłego rozłożonego na bardzo małym obszarze.

W teorii prętów wszystkie obciążenia sprowadza się do punktów osi ciężkości pręta. Jeżeli wypadkowe wszystkich sił zewnętrznych leżą na tej samej płaszczyźnie, to występuje płaski układ obciążenia.

W przypadku ogólnym na obciążenie pręta składają się siły $q_x(s), q_y(s), q_z(s)$ oraz momenty $m_x(s), m_y(s), m_z(s)$, odniesione do jednostki długości pręta. Obciążenie pręta opisuje macierz $\{F_i\}$:

$$\{F_i\} = \{q_x, q_y, q_z, m_x, m_y, m_z\}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, 6.$$

Elementy F_i mogą przedstawiać również obciążenia skupione i odcinkowo ciągłe, jeżeli wyrazimy je za pomocą funkcji *Heaviside'a* $H(s)$ i *Diraca* $\delta(s)$.

• Siły wewnętrzne w prętach

Ogólnie siły wewnętrzne działające na dany przekrój (tzw. uogólnione naprężenia) są określone przez sześć elementów macierzy $\{Y_i\}$:

$$\{Y_i\} = \{N, Q_y, Q_z, \mathfrak{M}, M_y, M_z\}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, 6.$$

W przypadku trójwymiarowym znakowanie sił wewnętrznych jest zgodne z przyjętym układem współrzędnych. Oznacza to, że na płaszczyznach zwroty dodatnich wektorów sił wewnętrznych są zgodne ze zwrotami osi i krętością układu współrzędnych (np. w układzie prawoskrętnym dodatni moment skręcający odpowiada odkręcaniu nakrętki śruby).

W zadaniach płaskich – zgodnie z wieloletnią tradycją – zasady znakowania sił poprzecznych i momentów zginających są już ustalone; dodatnia siła normalna rozciąga pręt, dodatnia siła poprzeczna usiłuje obrócić odcinek pręta zgodnie z ruchem wskazówek zegara, dodatni moment powoduje rozciąganie dolnych włókien pręta, przyjętych jako „dolne”. Zasady te – jakkolwiek nie nawiązujące do żadnego układu współrzędnych – zależą jednak od położenia obserwatora. Dodajmy jeszcze, że znakowania mo-

mentów można całkowicie zaniechać, jeśli rzędne wykresu momentów odnosi się po stronie włókien rozciąganych.

• *Klasyfikacja układów prętowych*

Nazewnictwo konstrukcji prętowych kształtowało się na przestrzeni stuleci. Nic dziwnego, że klasyfikacja układów prętowych nie jest merytorycznie spójna. O nazwie konstrukcji decydują zazwyczaj następujące cechy:

- sposób podparcia i połączenia prętów,
- kształt geometryczny osi,
- sposób obciążenia,
- zdolność konstrukcji do przejmowania określonych sił wewnętrznych.

A oto określenia najczęściej spotykanych układów prętowych:

- **Kratownica** to układ prostoliniowych prętów połączonych ze sobą przegubowo. Obciążenie działa wyłącznie w postaci sił skupionych przyłożonych w węzłach, tj. w punktach połączenia prętów. Przy tych założeniach pręty kratownicy przenoszą wyłącznie siły podłużne.
- **Belka** to pręt o osi prostoliniowej, obciążony poprzecznie. Belka w dwóch punktach podparta swobodnie (przegubowo) oraz belka wspornikowa noszą nazwę belek prostych. Termin „belka” rezerwuje się dla prętów zginanych.
- **Luk** to pręt o osi zakrzywionej w pewnej płaszczyźnie. W łukach oprócz zginania i ścinania, z reguły występują podłużne siły ściskające.
- **Cięgno** to pręt mający tylko sztywność rozciągania. Równowaga cięgna obciążonego wymaga zakrzywienia lub załamania osi. Cięgno przenosi wyłącznie siły normalne rozciągające.
- **Rama** to układ prętów prostoliniowych połączonych w węzłach w sposób sztywny lub przegubowy.
- **Ruszt** to rama płaska obciążona prostopadle do swej płaszczyzny.

Poza tym stosuje się bardziej szczegółowe terminy. Określenie „**slup**” oznacza pręt pionowy poddany ściskaniu. Rozciągany pręt pionowy nosi nazwę „**wieszak**”. „**Rygiel**” to zazwyczaj poziomy element ramy przenoszący momenty zginające.

• *Obliczanie sił wewnętrznych. Zasada zeszywnienia*

Ogólny sposób wyznaczania sił wewnętrznych w przekroju $\alpha - \alpha$ polega na badaniu równowagi jednej dowolnie wybranej części pręta oddzielonej tym przekrojem. Do wyznaczenia sił wewnętrznych za pomocą równań równowagi muszą być dane:

- przemieszczenia każdego przekroju pręta,
- zachowanie się obciążenia w procesie deformacji,
- siły reakcji więzów.

Wyznaczanie sił wewnętrznych upraszcza się znakomicie, gdy przyjmiemy, że przemieszczenia konstrukcji są bardzo małe, co pozwala zaniedbać rozróżnianie konfiguracji przed i po odkształceniu. W równaniach równowagi można wtedy pominąć wpływ deformacji. Przy układaniu równań równowagi pręty traktujemy jak ciała sztywne zajmujące pod obciążeniem konfigurację początkową. Stwierdzenie powyższe stanowi treść tzw. **zasady zeszywnienia**.

• *Konstrukcje statycznie wyznaczalne i statycznie niewyznaczalne*

Jeżeli dla dowolnego obciążenia konstrukcji reakcje i siły wewnętrzne można wyznaczyć wyłącznie z równań równowagi, to konstrukcję taką nazywamy statycznie wyznaczalną. Wszystkie inne tworzą zbiór konstrukcji statycznie niewyznaczalnych. W konstrukcjach tych do określenia pola statycznego (tj. reakcji i sił wewnętrznych) oprócz równań równowagi wykorzystuje się dodatkowo informacje o polu przemieszczeń, które zależą m. in. od własności fizycznych materiału. Należy podkreślić, że w ramach teorii kinematycznie nieliniowej, w której nie obowiązuje zasada zeszywnienia, każda konstrukcja jest statycznie niewyznaczalna. Bardzo istotną cechą konstrukcji statycznie wyznaczalnych jest to, że zerowemu obciążeniu odpowiadają zawsze zerowe reakcje i siły wewnętrzne. W konstrukcjach statycznie niewyznaczalnych już tak nie jest, gdyż mogą w nich występować różne od zera reakcje i siły wewnętrzne pozosta-

jące w równowadze z zerowym obciążeniem. Teoria konstrukcji statycznie wyznaczalnych ma znaczenie podstawowe, służy bowiem także do obliczania konstrukcji statycznie niewyznaczalnych.

• *Równania pracy wirtualnej dla konstrukcji prętowych*

Równania pracy wirtualnej dla konstrukcji prętowych przyjmują następującą postać:

– wirtualny stan przemieszczeń:

$$\int_s (q_x \bar{u} + q_y \bar{v} + q_z \bar{w} + m_x \bar{\psi} + m_y \bar{\phi}_y + m_z \bar{\phi}_z) ds =$$

$$= \int_s (N \bar{\lambda} + Q_y \bar{\beta}_y + Q_z \bar{\beta}_z + \mathfrak{M} \bar{\theta} + M_y \bar{\kappa}_y + M_z \bar{\kappa}_z) ds,$$

lub krócej

$$\int_s \left(\sum_{i=1}^6 F_i \cdot \bar{d}_i \right) ds = \int_s \left(\sum_{i=1}^6 Y_i \cdot \bar{e}_i \right) ds,$$

– wirtualny stan sił:

$$\int_s (\bar{q}_x u + \bar{q}_y v + \bar{q}_z w + \bar{m}_x \psi + \bar{m}_y \phi_y + \bar{m}_z \phi_z) ds =$$

$$= \int_s (\bar{N} \lambda + \bar{Q}_y \beta_y + \bar{Q}_z \beta_z + \bar{\mathfrak{M}} \theta + \bar{M}_y \chi_y + \bar{M}_z \chi_z) ds,$$

lub krócej

$$\int_s \left(\sum_{i=1}^6 \bar{F}_i \cdot d_i \right) ds = \int_s \left(\sum_{i=1}^6 \bar{Y}_i \cdot e_i \right) ds.$$

W równaniach tych $\lambda, \beta_y, \beta_z, \theta, \kappa_y, \kappa_z$ oznaczają uogólnione odkształcenia pręta, zgrupowane w macierzy $\mathbf{e} = \{e_i\}$:

$$\mathbf{e} = \{e_i\} = \{\lambda, \beta_y, \beta_z, \theta, \kappa_y, \kappa_z\}, \quad i = 1, 2, \dots, 6.$$

• *Twierdzenia energetyczne dla prętów sprężystych*

– *Twierdzenie Clapeyrona*

Treść tego twierdzenia dla konstrukcji prętowych wyraża równanie:

$$\frac{1}{2} \int_s (q_x u + q_y v + q_z w + m_x \psi + m_y \phi_y + m_z \phi_z) ds =$$

$$= \frac{1}{2} \int_s (N \lambda + Q_y \beta_y + Q_z \beta_z + \mathfrak{M} \theta + M_y \kappa_y + M_z \kappa_z) ds,$$

lub

$$\frac{1}{2} \int_s \left(\sum_{i=1}^6 F_i \cdot d_i \right) ds = \frac{1}{2} \int_s \left(\sum_{i=1}^6 Y_i \cdot e_i \right) ds, \quad i = 1, 2, \dots, 6.$$

Twierdzenie to obowiązuje tylko dla układów *Clapeyrona*, czyli układów, w których zależności między obciążeniami i przemieszczeniami są liniowe, a ponadto nie występują wstępne naprężenia lub odkształcenia oraz zmiany temperatury.

– *Twierdzenie o minimum energii potencjalnej*

Energia potencjalna dla konstrukcji prętowych ma postać:

$$\Pi = \Pi(d_i) = \int_s W[e_i(d_i)] ds - \int_{s_F} \left(\sum_{i=1}^6 F_i d_i \right)$$

przy czym

$$\frac{\partial W}{\partial e_i} = Y_i, i = 1, 2, \dots, 6.$$

Stan równowagi odpowiada sytuacji, w której energia potencjalna $\Pi(d_i)$ osiąga wartość ekstremalną. **Równowaga stateczna** występuje natomiast wtedy, gdy energia potencjalna osiąga wartość minimalną:

$$\Pi(d_i) = \min.$$

Twierdzenie to jest słuszne również dla prętów nieliniowo-sprężystych. Przemieszczenia konstrukcji mogą być dowolnie duże pod warunkiem, że obciążenia są konserwatywne. W przypadku pręta liniowo-sprężystego

$$W(e_i) = \frac{1}{2} \left[EA\lambda^2 + \frac{GA}{k_y} \beta_y^2 + \frac{GA}{k_z} \beta_z^2 + GJ_s \Theta^2 + EJ_y k_y^2 + EJ_z k_z^2 \right] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 D_i e_i^2,$$

gdzie D_i oznaczają kolejno odpowiednie sztywności przekroju pręta:

$$\{D_i\} = \{EA, GA/k_y, GA/k_z, GJ_s, EJ_y, EJ_z\}.$$

Gdy obciążenie składa się również z uogólnionych obciążeń skupionych (sił lub momentów) P_j ($j = 1, 2, \dots, m$):

$$\int_s \left(\sum_{i=1}^6 F_i d_i \right) ds = \int_{s_F} \left(\sum_{i=1}^6 F_i d_i \right) ds + \sum_{j=1}^m P_j \Delta_j,$$

gdzie Δ_j oznacza rzut przemieszczenia punktu przyłożenia obciążenia skupionego P_j na linię działania tego obciążenia, to z warunku minimum energii potencjalnej otrzymujemy, że

$$P_j = \frac{\partial U}{\partial \Delta_j}.$$

W równaniu tym $U = U(e_i, \Delta_j) = \int_s W(e_i, \Delta_j) ds$ i oznacza całkowitą energię odkształcenia wyrażoną przez wielkości kinematyczne.

– *Twierdzenie o minimum energii dopełniającej. Zasada Castigliano*

Energia dopełniająca Π^* dla konstrukcji prętowych ma postać:

$$\Pi^* = \int_s W(Y_i) ds - \int_{s_d} \left(\sum_{i=1}^6 F_i d_i \right) ds,$$

przy czym

$$\frac{\partial W}{\partial Y_k} = e_k, \quad k = 1, 2, \dots, 6.$$

Spośród wszystkich dopuszczalnych pól statycznych (naprężeń uogólnionych i sił zewnętrznych) realizuje się to pole, które nadaje energii dopełniającej wartość minimalną, czyli:

$$\Pi^*(Y_i, F_k) = \min.$$

Twierdzenie to jest słuszne również dla prętów nieliniowo-sprężystych. W przypadku pręta liniowo-sprężystego

$$W(Y_i) = \frac{1}{2} \left[\frac{N^2}{EA} + \frac{Q_y^2}{(GA/k_y)} + \frac{Q_z^2}{(GA/k_z)} + \frac{\mathfrak{M}^2}{GJ_s} + \frac{M_y^2}{EJ_y} + \frac{M_z^2}{EJ_z} \right] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 \frac{Y_i^2}{D_i}.$$

Szczególnym przypadkiem tego twierdzenia jest tzw. **zasada Castigliano**, która ma zastosowanie, gdy poza obciążeniami ciągłymi F_k występują również obciążenia skupione P_j . Wówczas

$$\Pi^* = \Pi^*(Y_i, F_k, P_j) = \int_s W(Y_i, P_j) ds - \int_{s_d} \left(\sum_{i=1}^6 F_i d_i \right) ds - \sum_{j=1}^m P_j \Delta_j.$$

Z warunku znikania pochodnej energii dopełniającej względem siły P_j otrzymujemy:

$$\Delta_j = \frac{\partial U}{\partial P_j},$$

gdzie $U = U(Y_i, P_j) = \int_s W(Y_i, P_j) ds$ i oznacza całkowitą energię odkształcenia wyrażoną przez wielkości statyczne.

• **Kinematyka i statyka układów ciał idealnie sztywnych**

– *Małe przemieszczenia tarcz sztywnych*

Dowolny przyrost przemieszczeń ciała sztywnego można traktować jako obrót tego ciała wokół chwilowego bieguna obrotu. Przesunięcie równoległe (translacja) stanowi przypadek szczególny, w którym chwilowy biegun obrotu leży w nieskończoności. Jeśli kąt obrotu φ jest mały, to można przyjąć, że wektor przemieszczenia danego punktu tarczy sztywnej jest prostopadły do kierunku promienia r łączącego ten punkt z biegunem obrotu. Wtedy wektor przemieszczenia Δ jest prostopadły do promienia r , przy czym

$$\Delta = r \cdot \operatorname{tg} \varphi \approx r \cdot \varphi.$$

Z analizy płaskich tarcz sztywnych wynika, że:

– *bezwzględna wartość dowolnej składowej wektora przemieszczenia jest iloczynem kąta obrotu tarczy i odległości tej składowej od bieguna obrotu.*

– *jeżeli znamy kierunki wektorów przemieszczenia dwóch różnych punktów tarczy, to chwilowy biegun obrotu leży w punkcie przecięcia się prostych prostopadłych do tych wektorów.*

Ponadto podczas obrotu tarczy względem bieguna o mały kąt φ dla poszczególnych punktów tarczy zachodzi zależność:

$$\varphi = \frac{\Delta_1}{r_1} = \frac{\Delta_2}{r_2} = \dots = \frac{\Delta_n}{r_n} = \text{const.}$$

– *Warunek konieczny geometrycznej niezmienności*

Jeśli p jest łączną liczbą prętów podporowych, a t – liczbą tarcz w układzie, to mogą wystąpić trzy przypadki:

- 1) gdy $p < 3t$, układ jest geometrycznie zmienny,
- 2) gdy $p = 3t$, układ jest geometrycznie niezmienny,
- 3) gdy $p > 3t$, układ jest geometrycznie niezmienny i przesztyniony.

Warunek konieczny kinematycznej (geometrycznej) niezmienności ma postać:

$$p \geq 3t.$$

Liczba $n = p - 3t$ określa stopień przesztynienia układu, a liczba $s = 3t - p$ określa liczbę stopni swobody układu geometrycznie zmiennego.

Do badania kinematyki tarcz sztywnych sporządza się plan biegunów obrotu lub układu się równania sumy rzutów przemieszczeń na osie układu współrzędnych x, y .

– *Warunek konieczny statycznej wyznaczalności i równowaga tarcz sztywnych*

Statyczna wyznaczalność w przypadku układu tarcz sztywnych oznacza, że reakcje wszystkich więzów (tj. prętów podporowych i prętów łączących tarcze) można obliczyć wyłącznie z równań równowagi. Występują tutaj trzy przypadki:

- 1) gdy $p < 3t$, układ równań statyki jest sprzeczny,
- 2) gdy $p = 3t$, układ jest statycznie wyznaczalny,
- 3) gdy $p > 3t$, układ jest statycznie niewyznaczalny.

W statyce konstrukcji liczba $n = p - 3t$ nazywa się stopniem statycznej niewyznaczalności układu.

Warunek $p = 3t$ jest tylko **warunkiem koniecznym** statycznej wyznaczalności.

Przy badaniu równowagi warto pamiętać o tym, że jeżeli na układ tarcz działają:

- tylko dwie siły, to równowaga zachodzi wtedy, gdy linie działania tych sił pokrywają się, wartości są równe, a zwroty przeciwne,
- tylko trzy siły, to równowaga zachodzi wtedy, gdy linie działania tych sił przecinają się w jednym punkcie

– *Warunek dostateczny geometrycznej niezmienności*

Układ konstrukcyjny jest geometrycznie (kinematycznie) niezmienny, jeżeli przemieszczeniom układu towarzyszą różne od zera odkształcenia (lub zerowym odkształceniom odpowiadają zerowe przemieszczenia).

Jeśli przez ϵ oznaczymy wektor pewnych uogólnionych odkształceń (np. w kratownicach wektor wydłużeń prętów), a przez u odpowiadające im uogólnione przemieszczenia, to wektory te można powiązać zależnością

$$C u = \epsilon,$$

gdzie C jest w ogólności macierzą prostokątną, noszącą nazwę macierzy geometrycznej (kinematycznej) zgodności. W układach geometrycznie niezmiennych układ równań

$$C u = 0$$

może mieć tylko rozwiązanie zerowe, czyli $u = 0$. Zachodzi to wtedy, gdy rząd macierzy jest równy liczbie stopni swobody s :

$$\text{rz}[C] = s.$$

Jest to **warunek konieczny** kinematycznej niezmienności konstrukcji. Warunek ten, zgodnie z twierdzeniem *Grama*, sprowadza się do wymagania, by $\det[C^T C] \neq 0$. Gdy $\text{rz}[C] < s$, to układ jest kinematycznie zmienny.

W przypadku konstrukcji statycznie wyznaczalnych, kiedy macierz C jest kwadratowa, warunek ten jest równoważny wymaganiu, by wyznacznik macierzy C był różny od zera, tj. by

$$\det[C] \neq 0.$$

Podobnie, badając równowagę konstrukcji, otrzymujemy układ równań liniowych łączących wektor uogólnionych obciążeń P z wektorem uogólnionych naprężeń Y (np. siłami w prętach kratownicy):

$$D Y = P,$$

gdzie D jest w ogólności prostokątną macierzą, noszącą nazwę macierzy równowagi. Okazuje się, że macierz D jest zawsze równa transpozycji macierzy C , tzn.

$$D^T = C.$$

• Równania różniczkowe równowagi prętów

– Dla prętów o osi prostoliniowej

$$\frac{dN}{dx} = -q_x(x), \quad \frac{dQ_z}{dx} = -q_z(x), \quad \frac{dM_y}{dx} - Q_z(x) = m_y(x).$$

Dodajmy, że zazwyczaj $m_y(x) \equiv 0$. Wtedy otrzymujemy, wykorzystywane często w praktyce, zależności:

$$\frac{dM_y}{dx} = Q_z(x) \quad \text{oraz} \quad \frac{d^2 M_y}{dx^2} = -q_z(x).$$

– Dla prętów o osi zakrzywionej

$$\frac{dN}{ds} - \frac{Q_z}{r} = -q_x(s), \quad \frac{dQ_z}{ds} + \frac{N}{r} = -q_z(s), \quad \frac{dM_y}{ds} - Q_z(s) = m_y(s).$$

W równaniach tych r oznacza promień krzywizny pręta, a s – współrzędną krzywoliniową odmierzaną wzdłuż osi krzywoliniowej pręta. Gdy $r \rightarrow \infty$, to $ds \rightarrow dx$ i równania powyższe upraszczają się do postaci obowiązujących dla pręta o osi prostoliniowej.

Konstrukcje statycznie wyznaczalne

- *Warunek konieczny statycznej wyznaczalności*

Stopień statycznej niewyznaczalności n płaskiej konstrukcji prętowej określa wzór:

$$n = p_1 + 2p_2 + 3p_3 - 2w_1 - 2w_2,$$

gdzie p_1 jest liczbą prętów obustronnie przegubowych, p_2 – liczbą prętów z jednej strony przegubowych, a z drugiej utwierdzonych, p_3 – liczbą prętów obustronnie utwierdzonych, w_1 – liczbą węzłów, w których pręty są połączone przegubowo, a w_2 – liczbą innych węzłów, w których choćby dwa pręty są między sobą połączone w sposób sztywny. Wzór powyższy jest słuszny pod warunkiem, że układ jest kinematycznie niezmienny.

- *Obliczanie sił wewnętrznych*

Przyczyną pojawienia się reakcji podporowych R i sił wewnętrznych Y są obciążenia F . W równaniach równowagi wielkości te występują zawsze w pierwszej potęgce; tworzą zatem funkcje liniowe. Wobec tego dla przyczyny (obciążenia) i skutków (reakcje, siły wewnętrzne) obowiązuje zasada superpozycji:

$$R(F_1, \dots, F_m) = R_1(F_1) + R_2(F_2) + \dots + R_m(F_m),$$

$$Y(F_1, \dots, F_m) = Y_1(F_1) + Y_2(F_2) + \dots + Y_m(F_m),$$

gdzie indeksy reakcji i sił wewnętrznych odpowiadają kolejnym numerom obciążeń. Powyższe równania są słuszne dla dowolnego materiału, również nieliniowego. Jedynym ograniczeniem jest akceptacja zasady zeszywnienia.

Do wyznaczania reakcji i sił przekrojowych stosujemy dwie metody: statyczną i kinematyczną. W metodzie statycznej wykorzystuje się równania równowagi. Reakcje obliczamy, badając równowagę całej konstrukcji lub jej części, natomiast siły przekrojowe obliczamy z równań równowagi jednej z myślowo przeciętej części konstrukcji. W metodzie kinematycznej reakcje i siły przekrojowe są wyznaczane za pomocą równania pracy wirtualnej dla układu ciał sztywnych, dla którego przyjmuje się odpowiednio dobrany wirtualny stan przemieszczeń. Okazuje się np., że kształt kinematyki wirtualnej odpowiada kształtowi linii wpływu obliczanej reakcji lub siły przekrojowej. Jest to szczególnie użyteczny sposób w odniesieniu do belek prostych i przegubowych.

- *Obliczanie przemieszczeń konstrukcji liniowo-sprężystych*

W odniesieniu do konstrukcji liniowo-sprężystych dysponujemy różnorodnymi metodami wyznaczania przemieszczeń uogólnionych. Są to metody:

– całkowania równania różniczkowego linii ugięcia,

– obciążenia krzywiznami (metoda *Mohra*)
oraz metody energetyczne wykorzystujące:

- twierdzenie *Clapeyrona*,
- twierdzenie o minimum energii dopełniającej (twierdzenie *Castigliano*)
- równania pracy wirtualnej przy wirtualnym stanie sił.

W mechanice konstrukcji stosuje się przede wszystkim metodę wywodzącą się z równania pracy wirtualnej. W celu obliczenia uogólnionego przemieszczenia punktu i konstrukcję obciąża się uogólnioną siłą wirtualną $\bar{P} = \bar{I}$ w ten sposób, by iloczyn poszukiwanego przemieszczenia Δ_i i siły wirtualnej przedstawiał pracę tego obciążenia na rzeczywistym przemieszczeniu Δ_i . Obciążenie wirtualne wywołuje wirtualne reakcje \bar{R}_k i wirtualne siły przekrojowe $\bar{N}, \bar{Q}_y, \bar{Q}_z, \bar{\mathfrak{M}}, \bar{M}_y, \bar{M}_z$. Wtedy równanie pracy wirtualnej przybiera postać:

$$\bar{I} \cdot \Delta_i + \sum_k \bar{R}_k \cdot \Delta_k = \int_s (\bar{N} \cdot \lambda + \bar{Q}_y \beta_y + \bar{Q}_z \beta_z + \bar{\mathfrak{M}} \theta + \bar{M}_y k_y + \bar{M}_z k_z) ds,$$

gdzie symbol całki rozciąga się na wszystkie pręty konstrukcji. Przemieszczenia Δ_k oznaczają tutaj rzeczywiste osiadania podpór. Rzeczywiste odkształcenia uogólnione w układach liniowo-sprężystych są opisane zależnościami:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{N}{EA} + \lambda^0, & \beta_y &= \frac{Q_y}{(GA/k_y)} + \beta_y^0, & \beta_z &= \frac{Q_z}{(GA/k_z)} + \beta_z^0, \\ \theta &= \frac{\mathfrak{M}}{GJ_s} + \theta^0, & k_y &= \frac{M_y}{EJ_y} + k_y^0, & k_z &= \frac{M_z}{EJ_z} + k_z^0. \end{aligned}$$

Człony zaznaczone indeksem 0 wyrażają odkształcenia uogólnione wywołane przez czynniki niemechaniczne (temperaturę, skurcz) lub wstępne deformacje technologiczne (błędy wykonania).

W przypadku kratownic równanie pracy wirtualnej upraszcza się do postaci:

$$\bar{I} \cdot \Delta + \sum_k \bar{R}_k \cdot \Delta_k = \sum_j \int_0^{l_j} \bar{N}_j \lambda_j dx = \sum_j \bar{N}_j \Delta l_j,$$

gdzie Δl_j oznacza rzeczywiste wydłużenie pręta j :

$$\Delta l_j = \Delta l_j^0 + \frac{N_j l_j}{E_j A_j},$$

przy czym Δl_j^0 jest wydłużeniem wynikającym z czynników niemechanicznych (np. błędy wykonania, wpływ temperatury), A_j – przekrojem pręta j , a E_j – modułem sprężystości tego pręta.

Równanie pracy wirtualnej można też wykorzystać do obliczenia tzw. ciężarków sprężystych. Ciężarki sprężyste są równe różnicy kątów obrotu cięciw linii ugięcia w poszczególnych punktach belki lub kratownicy. Wykresy momentów zginających wywołanych przez obciążenie ciężarkami sprężystymi odpowiadają przybliżonej linii ugięcia belki. W przypadku kratownic otrzymujemy dokładny kształt linii ugięcia.

Konstrukcje statycznie niewyznaczalne

• Metoda sił

Konstrukcję statycznie niewyznaczalną można przekształcić w wyznaczalną (w tzw. **układ podstawowy**) przez usunięcie odpowiedniej liczby więzów i dodatkowe obciążenie jej reakcjami tych więzów (tzw. **siłami nadliczbowymi**). Liczba usuniętych więzów n równa się stopniowi statycznej niewyznaczalności, a wartości sił nadliczbowych muszą być takie, by były spełnione kinematyczne **warunki ciągłości** (zgodności) przemieszczeń.

Siły nadliczbowe X_k ($k=1, 2, \dots, n$) są niewiadomymi w liniowym układzie równań kanonicznych metody sił.

$$\sum_{i=1}^n \Delta_{ik} \cdot X_k + \Delta_{i0} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

W przypadku układów płaskich przy braku momentów skręcających współczynniki w równaniach kanonicznych są zdefiniowane wzorami:

$$\Delta_{ik} = \Delta_{ki} = \int_s \left(\frac{N_i N_k}{EA} + \frac{Q_i Q_k}{(GA/k)} + \frac{M_i M_k}{EJ} \right) ds, \quad i, k = 1, 2, \dots, n$$

$$\Delta_{i0} = \int_s \left[N_i \left(\frac{N_0}{EA} + \lambda^0 \right) + Q_i \left(\frac{Q_0}{(GA/k)} + \beta^0 \right) + M_i \left(\frac{M_0}{EJ} + k^0 \right) \right] ds - \sum_f R_{fi} \Delta_f^*.$$

Indeks 0 dotyczy układu podstawowego, a Δ_f^* oznacza osiadanie podpory f .

W ogólnym przypadku, gdy występuje sześć sił wewnętrznych, współczynniki równań kanonicznych wyrażają wzory:

$$\Delta_{ik} = \Delta_{ki} = \int_s \left(\sum_{j=1}^6 \frac{Y_{ji} Y_{jk}}{D_j} \right) ds,$$

$$\Delta_{i0} = \int_s \left[\sum_{j=1}^6 Y_{ji} \left(\frac{Y_{j0}}{D_j} + e_j^0 \right) \right] ds - \sum_f R_{fi} \cdot \Delta_f^*, \quad i, j, k = 1, 2, \dots, n,$$

gdzie Y_{ji} oznacza j -tą siłę wewnętrzną w przyjętym układzie podstawowym wywołaną stanem $X_i = 1$, D_j oznacza wektor sztywności przekrojów prętów, a e_j^0 są uogólnionymi odkształceniami wywołanymi przez wpływy niemechaniczne.

• Metoda przemieszczeń

W metodzie przemieszczeń konstrukcję prętową traktujemy jako pewien skończony **zbiór węzłów**, z których każdy ma określoną liczbę stopni swobody. Za węzły uważamy niewielkie fragmenty konstrukcji zawierające zazwyczaj wszystkie punkty załamania osi, punkty, w których zbiega się większa liczba prętów, i punkty podporowe. Niejednokrotnie dogodnie jest wyodrębnić węzły zawierające punkty nagłej zmiany przekroju i punkty przyłożenia obciążeń skupionych. Węzłem może być również fragment zawierający dowolny obrany punkt leżący na osi pręta. Elementy międzywęzłowe nazywamy prętami.

W konstrukcji płaskiej węzły, w których choćby dwa pręty są połączone w sposób sztywny, są tarczami sztywnymi. Z kolei węzły zawierające przeguby są punktami materialnymi. **Węzły sztywne** na płaszczyźnie mają zatem co najwyżej trzy stopnie swobody (dwa przesunięcia i obrót), a **węzły przegubowe** – co najwyżej dwa stopnie swobody (dwa przesunięcia). Podpory konstrukcji odbierają węzłom pewną liczbę stopni swobody. Węzły całkowicie unieruchomione (zazwyczaj węzły podporowe) nazywają się węzłami nieruchomymi. Pozostałe węzły to węzły ruchome. Liczba stopni swobody wszystkich węzłów (czyli stopień kinematycznej niewyznaczalności) jest równa liczbie niewiadomych w metodzie przemieszczeń. Układ podstawowy w tej metodzie to układ o wszystkich węzłach nieruchomych, czyli układ o zerowej liczbie stopni swobody.

Do wyznaczenia wartości przemieszczeń węzłów wykorzystuje się równania równowagi węzłów. Równania te odpowiadają sumie rzutów sił na kierunki wyznaczone przez wektory przesunięć oraz sumie momentów względem osi kątów obrotu danego węzła. Całkowita liczba równań równowagi pokrywa się zatem z liczbą niewiadomych przemieszczeń.

Opisana metoda ma sens dopiero wówczas, gdy reakcje prętów zapiszemy jako funkcje przemieszczeń sąsiednich węzłów. Postać tych funkcji zależy od usytuowania pręta, wymiarów geometrycznych, własności fizycznych materiału oraz warunków brzegowych danego pręta. Dla prostoliniowego pręta sprężystego reakcje brzegowe prętów oblicza się z tzw. **wzorów transformacyjnych**:

$$r_j = r_j^0 + s_j(u_m), \quad j, m = 1, 2, \dots, 6,$$

gdzie u_m oznaczają uogólnione przemieszczenia końców pręta, r_j^0 są reakcjami w układzie nieruchomym (kinematycznie wyznaczalnym), a $s(u_m)$ są siłami brzegowymi wywołanymi przez przemieszczenia końców pręta. Siły te oblicza się według zależności

$$s_j = \sum_{m=1}^6 k_{jm} \cdot u_m \quad j = 1, 2, \dots, 6,$$

gdzie $[k_{jm}] = [k_{mj}] = \mathbf{k}$ i nazywa się **macierzą sztywności** pręta w układzie lokalnym:

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} EA/l & 0 & 0 & -EA/l & 0 & 0 \\ 0 & 12EJ/l^3 & 6EJ/l^2 & 0 & -12EJ/l^3 & 6EJ/l^2 \\ 0 & 6EJ/l^2 & 4EJ/l & 0 & -6EJ/l^2 & 2EJ/l \\ -EA/l & 0 & 0 & EA/l & 0 & 0 \\ 0 & -12EJ/l^3 & -6EJ/l^2 & 0 & 12EJ/l^3 & -6EJ/l^2 \\ 0 & 6EJ/l^2 & 2EJ/l & 0 & -6EJ/l^2 & 4EJ/l \end{bmatrix}.$$

Równania równowagi poszczególnych węzłów układu się w układzie globalnym, w którym uogólnione przemieszczenia są oznaczone przez U_m . Reakcje brzegowe prętów R_j wyraża się wówczas następująco:

$$R_j(U_m) = R_j^0 + S_j(U_m), \quad j, m = 1, 2, \dots, 6,$$

gdzie

$$R_j^0 = \sum_{p=1}^6 \bar{C}_{jp} \cdot r_p^0, \quad S_j(U_m) = \sum_{m=1}^6 K_{jm} U_m.$$

Symbol \bar{C}_{jp} oznacza macierz transformacji z układu lokalnego do układu globalnego. Do wyrażenia sił brzegowych S_j w danym pręcie przez przemieszczenia służy macierz sztywności w układzie globalnym K_{jm} .

Wykorzystanie wzorów transformacyjnych w równaniach równowagi wszystkich węzłów prowadzi do równań metody przemieszczeń. W celu uzyskania ostatecznej postaci równań metody konieczne jest wprowadzenie globalnej numeracji wszystkich składowych wektora przemieszczeń, dokonanie agregacji macierzy sztywności poszczególnych prętów oraz uwzględnienie warunków brzegowych. Warunki brzegowe można uwzględnić na różne sposoby. Kolumny i wiersze macierzy odpowiadające zerowym przemieszczeniom usuwa się, a w przypadku statycznych warunków brzegowych uwzględnia się dodatkowe równania, redukujące liczbę niewiadomych. Uzyskana w ten sposób globalna macierz sztywności konstrukcji \mathbf{K} jest macierzą liniowego układu równań na poszukiwane przemieszczenia U_j . Macierzową postać równań metody przemieszczeń zapisuje się, jak następuje:

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{P},$$

gdzie \mathbf{P} jest wektorem wyrazów wolnych, wynikającym z reakcji w układzie nieruchomym oraz obciążeń działających bezpośrednio na węzły. Macierz sztywności \mathbf{K} jest kwadratowa, symetryczna i ściśle dodatnio określona.

Opisana metoda stanowi szczególnie przypadek przemieszczeniowej wersji metody elementów skończonych. Metoda ta nie nadaje się jednak do obliczeń „ręcznych”. Tradycyjna metoda przemieszczeń jest

przystosowana wyłącznie do obliczeń konstrukcji zginanych (ramy, belki ciągłe, łuki). Podstawowe uproszczenie polega na przyjęciu założenia, że pręty są nieściśliwe. W obliczeniach wykorzystuje się jedynie wzory transformacyjne dla momentów zginających, a jako wielkości kinematyczne przyjmuje się kąty obrotów węzłów i kąty obrotu prętów. Wzory te przybierają postać:

$$M_{ik} = M_{ik}^0 + \frac{2EJ}{l} \cdot (2\varphi_i + \varphi_k - 3\psi_{ik}),$$

$$M_{ki} = M_{ki}^0 + \frac{2EJ}{l} \cdot (\varphi_i + 2\varphi_k - 3\psi_{ik}),$$

gdzie φ_i , φ_k są kątami obrotu węzłów, a ψ_{ik} kątami obrotu prętów. Symbole M_{ik}^0 oraz M_{ki}^0 oznaczają momenty utwierdzenia pręta w układzie nieruchomym. Bardzo istotna korzyść polega na tym, że kąty φ_i , φ_k oraz ψ_{ik} nie zależą od układu współrzędnych. Metoda ta jest niezwykle skuteczna wtedy, gdy węzły konstrukcji tylko obracają się. W przypadku węzłów przemieszczających się (przesuwnych) należy zbadać dodatkowe stopnie swobody oraz wyznaczyć zależności pomiędzy kątami obrotu prętów. Równania metody odpowiadają równaniom równowagi momentów w poszczególnych węzłach oraz dodatkowym równaniom równowagi momentów wynikających z kolejnych przesuwów węzłów.

Równania kanoniczne obu metod można zapisać jeszcze inaczej:

$$\sum_{k=1}^{k=n} r_{ik} U_k + R_{ip} = 0; \quad i = 1, 2, 3, \dots, n,$$

gdzie r_{ik} jest uogólnioną reakcją więzu i , powstającą wskutek wymuszenia jednostkowego uogólnionego przemieszczenia w kierunku więzu k , a R_{ip} jest reakcją więzu i w układzie podstawowym kinematycznie wyznaczalnym (tzn. w układzie nieruchomym). Równania kanoniczne odpowiadają wymaganiu, by suma wszystkich reakcji więzu i w układzie była równa zeru.

• Obliczanie przemieszczeń konstrukcji liniowo-sprężystych

W celu obliczenia przemieszczenia Δ_i punktu i postępujemy tak jak w układach statycznie wyznaczalnych. Statycznie dopuszczalne wirtualne pole naprężeń otrzymujemy z rozwiązania zadania pomocniczego, w którym konstrukcję obciążamy jednostkową siłą wirtualną $\bar{P} = \bar{1}$. Konstrukcja obciążona siłą wirtualną nie musi być identyczna z rozważaną konstrukcją niewyznaczalną. Chodzi przecież tylko o to, by siły przekrojowe (uogólnione naprężenia) były w równowadze z przyłożoną siłą wirtualną. Można zatem przyjąć, że konstrukcja ta ma niższy stopień statycznej niewyznaczalności lub że jest po prostu dowolną konstrukcją statycznie wyznaczalną, zbudowaną z konstrukcji niewyznaczalnej przez usunięcie tylu odpowiednich więzów, ile jest stopni statycznej niewyznaczalności.

Równanie pracy wirtualnej, służące do obliczenia przemieszczenia Δ_i , przybiera zatem postać:

$$\bar{1} \cdot \Delta_i + \sum_f \bar{R}_{fi} \cdot \Delta_f^* = \int_s (\bar{N} \cdot \lambda + \bar{Q}_y \beta_y + \bar{Q}_z \beta_z + \bar{M} \theta + \bar{M}_y k_y + \bar{M}_z k_z) ds,$$

gdzie \bar{N} , \bar{Q}_y , \bar{Q}_z , \bar{M} , \bar{M}_y , \bar{M}_z i \bar{R}_{fi} są odpowiednio siłami przekrojowymi i reakcjami podpór spowodowanymi przez obciążenie wirtualne w przyjętej konstrukcji statycznie wyznaczalnej, natomiast λ , β_y , β_z , θ , k_y , k_z i Δ_f^* są odpowiednio rzeczywistymi uogólnionymi odkształceniami w układzie statycznie niewyznaczalnym i osiadaniem podpór. Trzeba tu pamiętać, że odkształcenia te oblicza się z uwzględnieniem odkształceń niemechanicznych. Bardziej szczegółową, ogólną postać równania pracy wirtualnej można wobec tego zapisać następująco:

$$\bar{I} \cdot \Delta_k = \int_s \left[\sum_{j=1}^6 \bar{Y}_{jk} \left(\frac{Y_j}{D_j} + e_j^0 \right) \right] ds - \sum_f \bar{R}_{fk} \cdot \Delta_f^*.$$

• *Zastosowanie twierdzenia Bettiego w teorii układów statycznie niewyznaczalnych*

– *Twierdzenie o wzajemności reakcji*

Twierdzenie o wzajemności reakcji jest następujące:

Reakcja R_{ki} odpowiadająca k -temu przemieszczeniu i i wywołana stanem $\Delta_i = 1$

jest równa reakcji R_{ik} odpowiadającej i -temu przemieszczeniu i i wywołanej stanem $\Delta_k = 1$.

– *Linie wpływu wielkości statycznych w układach statycznie niewyznaczalnych*

Z twierdzenia Bettiego wynika jeszcze inny użyteczny wniosek, służący do wyznaczania linii wpływu układów statycznie niewyznaczalnych. Szczególnie przekonujący jest przykład linii wpływu w odniesieniu do belek ciągłych. Okazuje się bowiem, że kształt linii wpływu danej wielkości statycznej odpowiada linii ugięcia belki ciągłej przy wymuszeniu jednostkowego przemieszczenia, na którym wykonuje pracę badana wielkość statyczna.

W konstrukcjach statycznie niewyznaczalnych usunięcie jednego więzu prowadzi do układu, którego stopień statycznej niewyznaczalności zmniejsza się o jeden. Jest to zatem w dalszym ciągu układ geometrycznie niezmienny, a wymuszenie przemieszczenia jednostkowego musi pociągać za sobą deformację prętów. Wnioskujemy stąd, że linie wpływu układów statycznie niewyznaczalnych jako linie ugięcia układów sprężystych są zawsze funkcjami nieliniowymi.