

## 14. WIADOMOŚCI OGÓLNE



### 14.1. WARUNKI RÓWNOWAGI UKŁADU SIŁ

Mechanika konstrukcji zajmuje się wyznaczaniem sił wewnętrznych i przemieszczeń w różnego rodzaju układach konstrukcyjnych (belkach, łukach, ramach, kratownicach, płytach, powłokach, układach mieszanych). Główne problemy mechaniki konstrukcji zilustrujemy na przykładach liniowo-sprężystych konstrukcji prętowych o bardzo małych przemieszczeniach. Ograniczymy się tutaj tylko do podania ogólnego sensu metod wyznaczania wielkości statycznych i kinematycznych, gdyż problematyka ta ma bardzo bogatą i ogólnie dostępną literaturę ([4, 10, 31, 33, 35]).

Siła jest wektorem będącym miarą mechaniczną oddziaływania ciał materialnych. Konsekwencją tego jest akceptacja algebry wektorów do badania równowagi ciał sztywnych. Z kursu mechaniki teoretycznej wiadomo, że równowaga ta zachodzi, gdy wektor wypadkowy wszystkich sił  $\mathbf{P}^{(i)}$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ) oraz jednocześnie wektor momentu tych sił względem dowolnie obranego punktu są równe zeru. Jeśli punktem tym jest początek przyjętego układu współrzędnych  $x, y, z$ , to analityczna postać warunków równowagi odpowiada sześciu liniowym równaniom algebraicznym ze względu na współrzędne  $P_x^{(i)}, P_y^{(i)}, P_z^{(i)}$  wektorów  $\mathbf{P}^{(i)}$ :

$$(a) \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^n P_x^{(i)} = 0, \sum_{i=1}^n P_y^{(i)} = 0, \sum_{i=1}^n P_z^{(i)} = 0, \\ \sum_{i=1}^n M_x^{(i)} = 0, \sum_{i=1}^n M_y^{(i)} = 0, \sum_{i=1}^n M_z^{(i)} = 0, \end{cases}$$

gdzie  $M_x^{(i)}, M_y^{(i)}$  i  $M_z^{(i)}$  oznaczają odpowiednio współrzędne wektora momentu sił  $\mathbf{P}^{(i)}$  względem osi  $x, y$  i  $z$ :

$$(b) \quad \begin{cases} M_x^{(i)} = y_i P_z^{(i)} - z_i P_y^{(i)}, \\ M_y^{(i)} = z_i P_x^{(i)} - x_i P_z^{(i)}, \\ M_z^{(i)} = x_i P_y^{(i)} - y_i P_x^{(i)}. \end{cases}$$

W zależności (b)  $x_i, y_i, z_i$  oznaczają współrzędne punktów przyłożenia sił  $\mathbf{P}^{(i)}$ .

Zdecydowana większość zadań z mechaniki konstrukcji dotyczy przypadku szczególnego, w którym wszystkie wektory sił  $\mathbf{P}^{(i)}$  leżą w jednej płaszczyźnie. Występuje wówczas tzw. płaski układ sił. Jeżeli płaszczyzna ta pokrywa się z płaszczyzną układu współrzędnych  $x, z$ , to  $P_y^{(i)} = y_i = 0$ , skąd  $M_x^{(i)} = M_z^{(i)} = 0$ . Mamy wtedy tylko trzy istotne równania równowagi:

$$(c) \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^n P_x^{(i)} = 0, \\ \sum_{i=1}^n P_z^{(i)} = 0, \\ \sum_{i=1}^n M_y^{(i)} = \sum_{i=1}^n (z_i P_x^{(i)} - x_i P_z^{(i)}) = 0. \end{cases}$$

Równania równowagi dla płaskiego układu sił mogą być stosowane w następujących trzech wariantach:

- suma rzutów sił na dwie dowolne równoległe proste oraz suma momentów tych sił względem dowolnego punktu są równe zero,
- suma rzutów sił na jedną dowolną prostą oraz suma momentów tych sił względem dwóch dowolnych punktów nie leżących na prostej prostopadłej do kierunku rzutowania sił są równe zero,
- suma momentów sił względem trzech dowolnych punktów nie leżących na jednej prostej są równe zero.

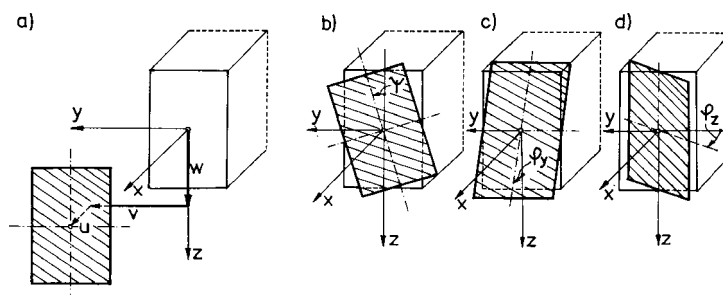
Zauważmy, że równania (c) są szczególnym przypadkiem pierwszego wariantu (obie proste są do siebie prostopadłe, a momenty sił odnoszą się do punktu przecięcia tych prostych).

W metodzie graficznej równania równowagi płaskiego układu sił odpowiadają zamykaniu się wieloboku sił ( $\sum P_x^{(i)} = 0$ ,  $\sum P_z^{(i)} = 0$ ) i zamykaniu się wieloboku sznurowego ( $\sum M_y^{(i)} = 0$ ).

## 14.2. PODPORY PRĘTÓW

Pełny opis deformacji pręta mamy wówczas, gdy znana jest kinematyka każdego przekroju pręta. Przekrój pręta tworzą wszystkie punkty materialne należące do pręta i płaszczyzny przeprowadzonej prostopadłe do osi pręta w konfiguracji pierwotnej (nieodkształconej). Wprowadzenie więzów wewnętrznych powoduje ograniczenie swobody przemieszczeń przekroju.

W klasycznej teorii prętów na ruch każdego przekroju pręta nakłada się więzy wewnętrzne takie, że w procesie deformacji przekrój pozostaje płaski i nie zmienia swych wymiarów poprzecznych<sup>\*)</sup>. Przyjmujemy zatem, że przekroje pręta zachowują się jak sztywne figury płaskie, mające tylko sześć stopni swobody (rys. 14.1).



Rys. 14.1

Są to trzy składowe wektora przemieszczenia środka ciężkości przekroju ( $u, v, w$ ) oraz trzy kąty obrotu względem poszczególnych osi układu ( $\psi, \phi_y, \phi_z$ ). Składowe te tworzą macierz uogólnionych przemieszczeń:

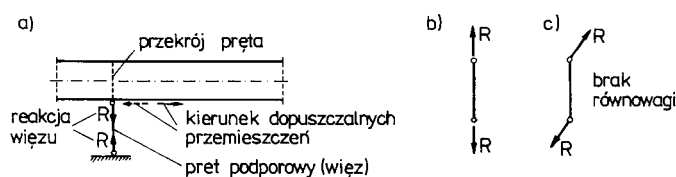
$$\{d_i\} = \{u, v, w, \psi, \phi_y, \phi_z\}, \quad i = 1, 2, \dots, 6. \quad (14.1)$$

Podparcie pręta w danym punkcie osi oznacza wprowadzenie dalszych dodatkowych więzów, odbierających przekrojowi jeden, dwa lub więcej stopni swobody. Obciążeniu pręta (tzw. siłom czynnym) towarzyszą reakcje więzów podporowych (tzw. siły biernych).

W praktyce najczęściej występują układy prętowe ulegające deformacji tylko w pewnej określonej płaszczyźnie. Przyjmijmy, że płaszczyznę tę tworzą osie  $x, z$ . Wówczas część stopni swobody każdego przekroju tożsamościowo jest równa zero, tzn.  $\psi = \phi_z = 0$ ,  $v = 0$ . Przekroje pręta mają zatem tylko trzy stopnie swobody: dwa przesunięcia  $u, w$  oraz kąt obrotu  $\phi_y$ . Można sobie wyobrazić, że podparcie pręta uzyskuje się za pośrednictwem idealnie sztywnych prętów podporowych (rys. 14.2a). Pręt podporowy dopuszcza wystąpienie tylko przemieszczeń prostopadłych do swej osi. Przesunięcie w kierunku osi

<sup>\*)</sup> Założenie to nie jest słuszne dla skręcania prętów niekołowych oraz cienkościennych o przekroju otwartym. Dlatego formułowanie sposobu podparcia w tych przypadkach jest bardziej złożone.

pręta podporowego jest niemożliwe, a każda próba przemieszczenia w tym kierunku wywołuje pojawienie się siły biernej.

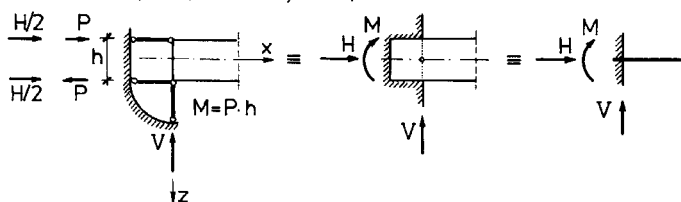


Rys. 14.2

Pręt podporowy jest więzem, a siła bierna reakcją tego więzu. Kierunek reakcji pokrywa się zawsze z osią pręta podporowego (rys. 14b), gdyż w przeciwnym razie sam pręt podporowy nie byłby w równowadze (rys. 14.2c). Typowe rodzaje podpór w układach płaskich przedstawia rys. 14.3.

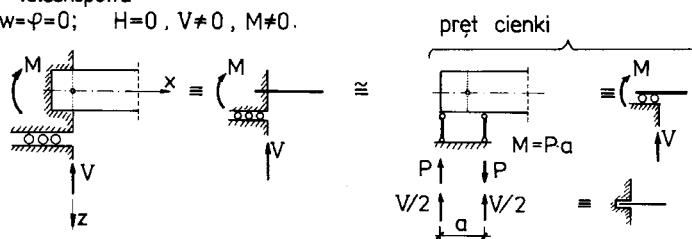
a) Utwierdzenie:

$$u = w = \varphi = 0; \quad H \neq 0, V \neq 0, M \neq 0.$$



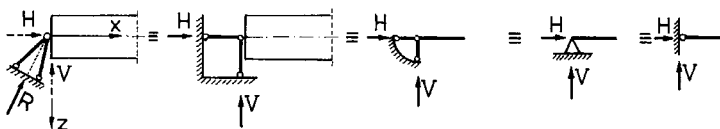
b) Podpora teleskopowa:

$$u \neq 0, w = \varphi = 0; \quad H = 0, V \neq 0, M \neq 0.$$



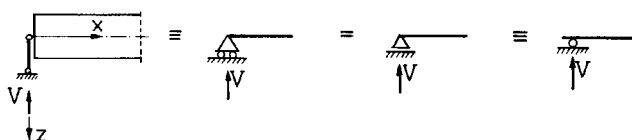
c) Podpora przegubowa nieprzesuwna:

$$u = w = 0, \varphi \neq 0; \quad H \neq 0, V \neq 0, M = 0.$$



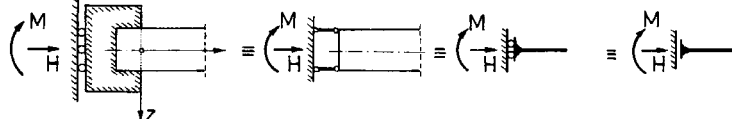
d) Podpora przegubowa przesuwna:

$$u \neq 0, w = 0, \varphi \neq 0; \quad H = 0, V \neq 0, M = 0.$$



e) Podpora ślizgowa:

$$u = 0, w \neq 0, \varphi \neq 0; \quad H \neq 0, V = 0, M \neq 0.$$



Rys. 14.3

Utwierdzenie (rys. 14.3a) odbiera przekrojowi wszystkie stopnie swobody ( $u = w = 0, \varphi_y = 0$ ). W związku z tym występują trzy reakcje więzów: dwie siły składowe i moment.

*Podpora teleskopowa* (rys. 14.3b) pozbawia przekrój dwóch stopni swobody ( $w = 0, \varphi_y = 0$ ). Dopuszczalne jest tylko przemieszczenie  $u$ . Występują dwie reakcje: moment i siła o kierunku normalnym do podstawy fundamentu. W przypadku prętów cienkich, w których przekrój po odkształceniu jest prostopadły do osi pręta (założenie *Bernoulliego*), podporę teleskopową można uzyskać za pomocą dwóch równoległych prętów podporowych, prostopadłych do osi pręta zasadniczego.

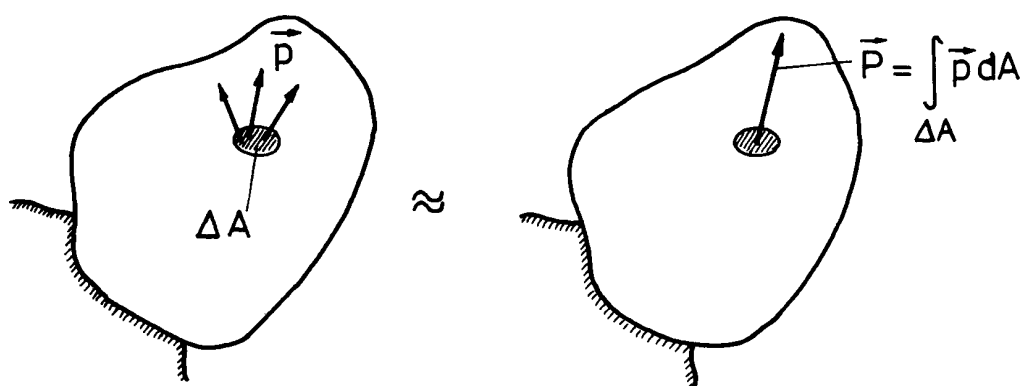
- *Podpora przegubowa nieprzesuwna* (rys. 14.3c) pozbawia przekrój dwóch stopni swobody ( $u = v = 0$ ). Dopuszczalny jest obrót przekroju wokół osi  $y$  ( $\varphi_y = 0$ ). Występują dwie składowe reakcji (dwie siły).
- *Podpora przegubowa przesuwna* (rys. 14.3d) pozbawia przekrój jednego stopnia swobody ( $w = 0$ ). Dopuszczalne jest przemieszczenie  $u$  i kąt obrotu przekroju  $\varphi_y$ . Na podporze występuje tylko jedna składowa reakcji o kierunku pokrywającym się z osią pręta podporowego (lub z normalną do podstawy fundamentu).
- *Podpora „ślizgowa”* (rys. 14.3e) pozbawia przekrój dwóch stopni swobody ( $u = 0, \varphi_y = 0$ ). Dopuszczalne jest tylko przemieszczenie poprzeczne  $w$ . Występują dwie składowe reakcji: siła podłużna i moment zginający.

### 14.3. CZYNNIKI ZEWNĘTRZNE POWODUJĄCE DEFORMACJĘ KONSTRUKCJI. OBCIĄŻENIA

Główną przyczyną deformacji konstrukcji są obciążenia, czyli siły czynne (aktywne). Trzeba jednak pamiętać, że deformacja konstrukcji może być wywołana przez wymuszenia kinematyczne (np. przez przemieszczenia podpór) lub zewnętrznymi czynnikami niemechanicznymi, np. przez zmianę temperatury lub skurcz technologiczny (skurcz betonu). Często interesują nas odchylenia konstrukcji rzeczywistej od konfiguracji idealnej spowodowane błędami i niedokładnościami wykonania. Chodzi tu np. o wyznaczenie sił wewnętrznych i odchyłeń osi pręta wstępnie zakrzywionego od położenia projektowanego, odpowiadającego prętowi o osi prostoliniowej.

Omówimy obecnie tylko obciążenia spowodowane przez siły, natomiast wpływ innych czynników zewnętrznych będzie przedstawiony w dalszych rozdziałach.

Na obciążenia zewnętrzne składają się siły powierzchniowe i masowe. Można wprowadzić jeszcze inny podział: na obciążenia rozłożone w sposób ciągły i skupione. Obciążenia skupione stanowią idealizację obciążenia ciągłego rozłożonego na bardzo małym obszarze (rys. 14.4).

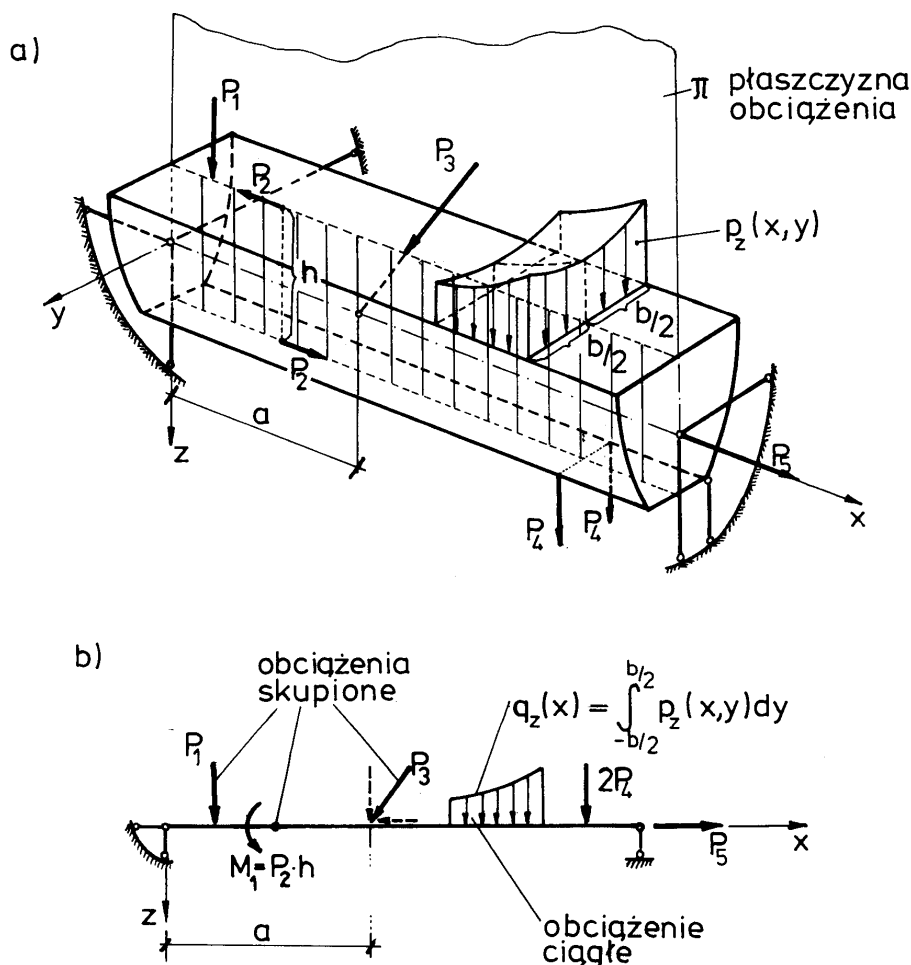


Rys. 14.4

W teorii prętów wszystkie obciążenia sprowadza się do punktów osi ciężkości pręta. Jeżeli wypadkowe wszystkich sił zewnętrznych leżą w tej samej płaszczyźnie, to występuje płaski układ obciążenia.

Sens podanej wyżej klasyfikacji obciążeń objaśnimy na przykładzie płaskiego układu obciążeń, odniesionego do konfiguracji początkowej (przed odkształceniem). Na rysunku 14.5a przedstawiono obciążenie pręta siłami powierzchniowymi skupionymi i rozłożonymi w sposób ciągły. Po sprowadzeniu tych

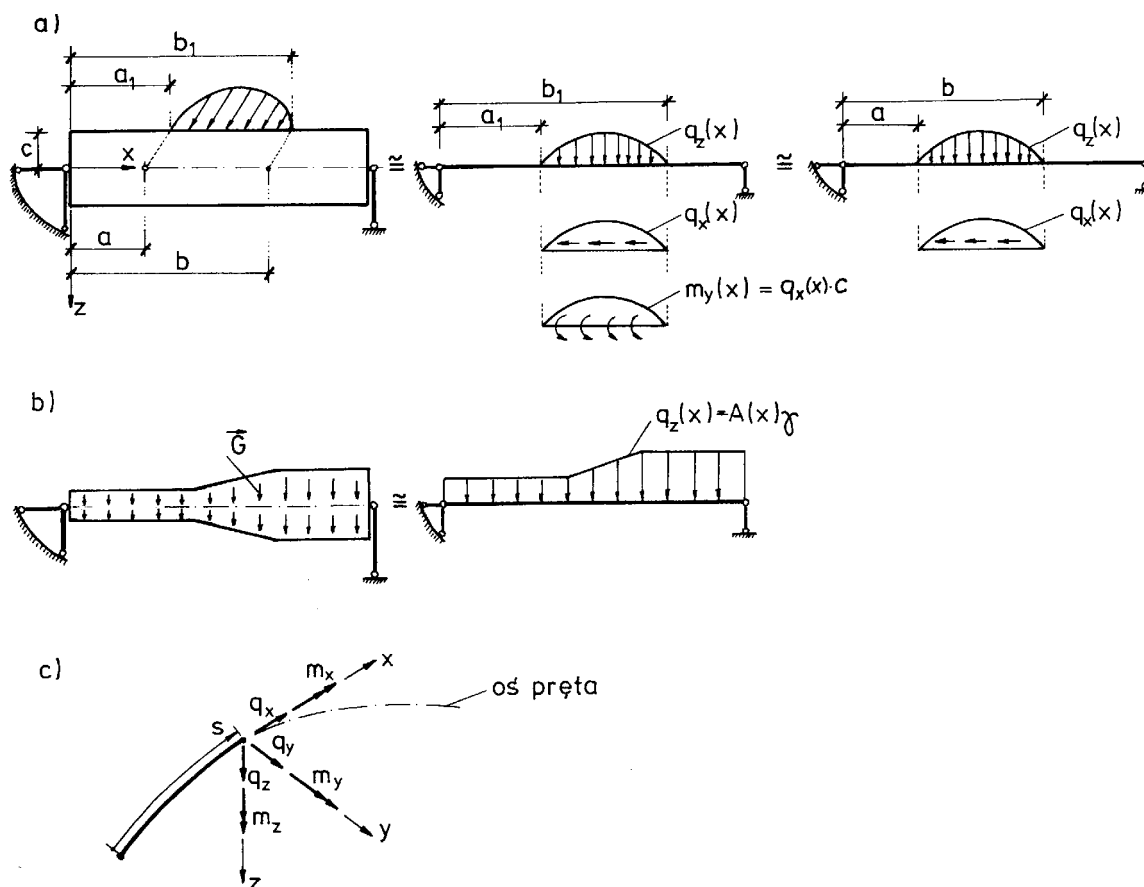
obciążeń do osi pręta otrzymujemy płaski układ sił działający w płaszczyźnie obciążenia  $\pi$ . Jest ona jednocześnie płaszczyzną symetrii pręta. W efekcie uzyskujemy schemat obciążenia przedstawiony na rys. 14.5b.



Rys. 14.5

Z reguły zakłada się, że obciążenia rosną od zera do swych końcowych wartości  $P_1, P_2, \dots, P_5$  oraz  $q_z(x)$ . Siły te powodują deformację osi pręta. Odnoszenie końcowych wartości obciążeń do nieodkształconej osi pręta nie jest zatem właściwe, upraszcza natomiast ilustrację problemu obciążeń. Dalsze szczegóły dotyczące zachowania się obciążenia w procesie deformacji pręta zawiera p. 14.6.

Rysunek 14.6a objaśnia sposób ustalania obciążenia ciągłego podczas działania wektora sił powierzchniowych tworzących kąt ostry z osią belki. Otrzymujemy tu trzy rodzaje obciążeń ciągłych: obciążenie prostopadłe do osi belki  $q_z(x)$ , obciążenie statyczne do osi belki  $q_x(x)$  oraz rozłożony w sposób ciągły moment zginający  $m_y(x)$ . Rysunek 14.6b ilustruje sposób uwzględniania sił masowych (na przykład sił ciężkości) przy ustalaniu obciążeń.



Rys. 14.6

W przypadku ogólnym na obciążenie pręta o osi prostej lub zakrzywionej składają się siły  $q_x(s), q_y(s), q_z(s)$  oraz momenty  $m_x(s), m_y(s), m_z(s)$ , odniesione do jednostki długości pręta, przy czym  $x, y, z$  oznaczają tu osie lokalnego układu współrzędnych (por. rys. 14.6c). Ogólne obciążenie pręta opisuje zatem macierz wierszowa  $\{F_i\}$  o elementach  $F_i$ , będących funkcjami zmiennej  $s$ :

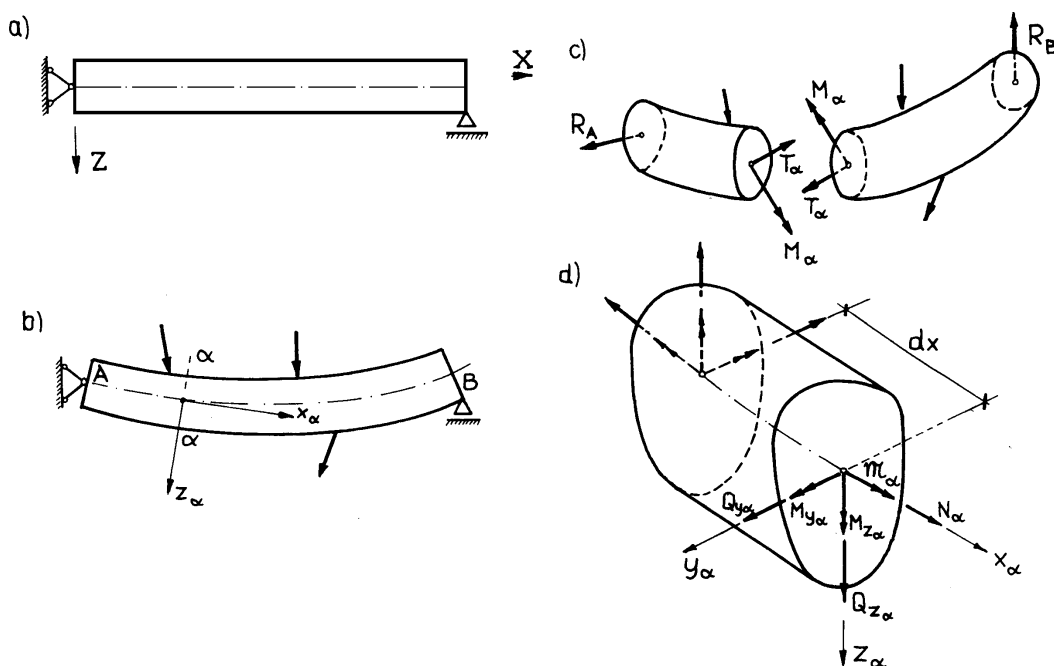
$$\{F_i\} = \{q_x, q_y, q_z, m_x, m_y, m_z\}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, 6. \quad (14.2)$$

Elementy  $F_i$  mogą przedstawiać również obciążenia skupione i odcinkowo ciągłe, jeżeli wyrazimy je za pomocą funkcji Heaviside'a  $H(s)$  i Diraca  $\delta(s)$ . Funkcje te będą omówione w p. 21.3.

#### 14.4. DEFINICJE SIŁ WEWNĘTRZNYCH W PRĘTACH

W celu zdefiniowania sił wewnętrznych<sup>\*)</sup> rozważymy pręt obciążony układem sił zewnętrznych (czynnych i biernych) będących w równowadze. Pod wpływem tych sił pręt się odkształci. W konfiguracji aktualnej (po odkształceniu) w wybranym punkcie osi dokonamy myślowego przekroju pręta płaszczyzną  $\alpha - \alpha$ , prostopadłą do jego odkształconej osi (rys. 14.7b). Zwróćmy uwagę, że w ogólności punkty materialne tworzące ten przekrój nie są tymi samymi punktami, które tworzą przekrój w konfiguracji pierwotnej. Identyeczność tych punktów zachodzi tylko wówczas, gdy przekrój po odkształceniu pozostaje płaski i prostopadły do wygiętej osi pręta (założenie Bernoulliego).

<sup>\*)</sup> Określenia: *siły wewnętrzne*, *siły przekrojowe*, *siły uogólnione*, *naprężenia uogólnione* są synonimami używanymi wymiennie.



Rys. 14.7

Obie wydzielone przekrojem części pręta muszą być w równowadze. Na każdą z nich działają:

- siły obciążenia zewnętrznego (siły czynne),
- siły reakcji zewnętrznych (siły bierne),
- siły wewnętrzne działające na przekrój  $\alpha - \alpha$ , czyli wektor siły  $\mathbf{T}_\alpha$  i wektor momentu  $\mathbf{M}_\alpha$  (rys. 14.7c).

Siły wewnętrzne są zatem wypadkowymi elementarnych wzajemnych oddziaływań obu części pręta oddzielonych przekrojem  $\alpha - \alpha$ . Warto odnotować, że zgodnie z trzecią zasadą Newtona o akcji i reakcji – wartości i kierunki wektorów  $\mathbf{T}_\alpha$  i  $\mathbf{M}_\alpha$  działających na obie części pręta są takie same, natomiast zwroty – przeciwne.

Wektor siły wypadkowej  $\mathbf{T}_\alpha$  rozkładamy na dwie siły styczne leżące w płaszczyźnie przekroju (tj. poprzeczne w stosunku do osi):  $Q_{y\alpha}$  i  $Q_{z\alpha}$  oraz siłę normalną do przekroju (tj. podłużną do osi),  $N_\alpha$ . Podobnie postępujemy z wektorem momentu  $\mathbf{M}_\alpha$ . Składowe styczne  $M_{y\alpha}$  i  $M_{z\alpha}$  nazywamy odpowiednio momentami zginającymi względem osi  $y_\alpha$  i  $z_\alpha$ , a składową normalną  $\mathfrak{M}_\alpha$  nazywamy momentem skręcającym. W przypadku ogólnym siły wewnętrzne działające na dany przekrój (tzw. uogólnione naprężenia) są więc określone przez sześć elementów macierzy  $\{Y_i\}$ :

$$\{Y_i\} = \{N, Q_y, Q_z, \mathfrak{M}, M_y, M_z\}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, 6. \quad (14.3)$$

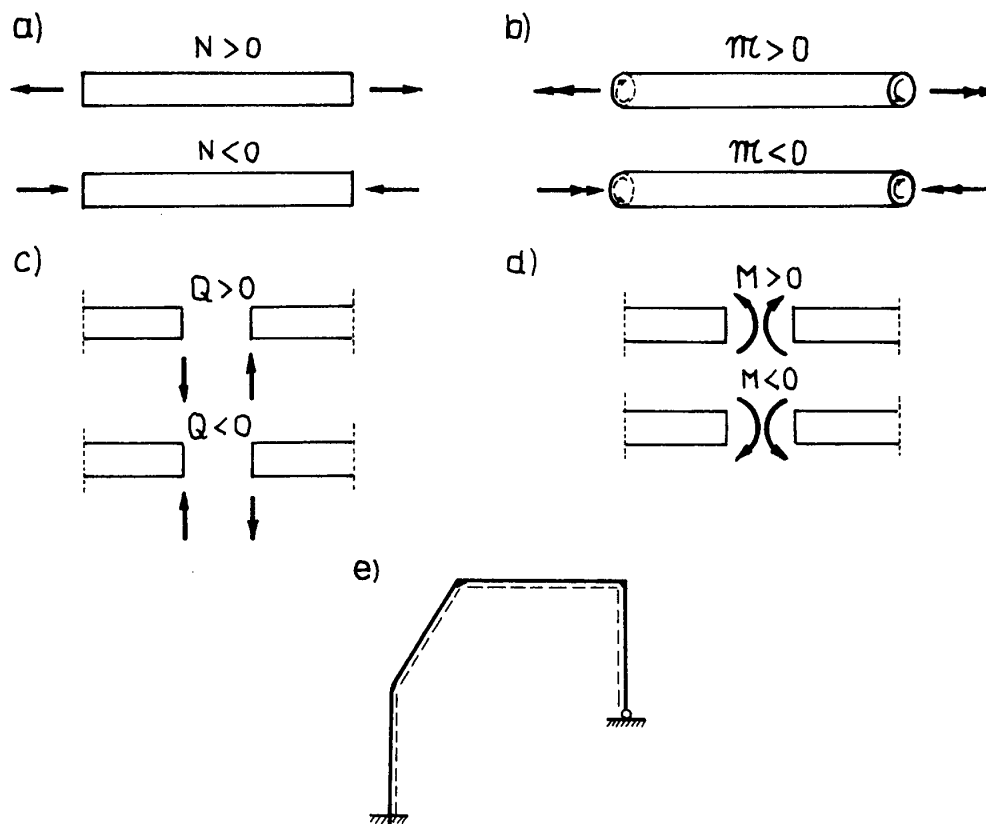
Znakowanie sił wewnętrznych jest związane z przyjętym układem współrzędnych. Założymy, że krzywoliniowa współrzędna  $s$  pokrywa się w konfiguracji odkształconej ze styczną do osi pręta, a osie lokalne  $y_\alpha$  i  $z_\alpha$  tworzą z nią układ prawoskrętny. Na płaszczyźnie przekroju, dla której zewnętrzny wektor normalny ma zwrot zgodny z osią  $s$  (dodatnia strona), dodatnie siły wewnętrzne mają zwroty zgodne ze zwrotami osi  $s, y_\alpha, z_\alpha$ . Na płaszczyźnie przekroju określonej przez normalną zewnętrzną o zwrocie przeciwnym do zwrotu osi  $s$  (ujemna strona) dodatnie siły wewnętrzne mają zwroty przeciwne do zwrotu osi  $s, y_\alpha, z_\alpha$ . Według tej, matematycznie spójnej, zasady znakowania wszystkie siły wewnętrzne z rys. 14.7 są dodatnie. Dla wyjaśnienia dodamy, że zwrot momentu zaznaczony podwójną strzałką odpowiada dzia-

łaniu statycznie równoważnej pary sił tworzącej z wektorem momentu śrubę prawoskrętną, tzn. taką, jaką tworzą osie przyjętego układu współrzędnych  $s, y_\alpha, z_\alpha$ .

W praktyce dążymy jednak do tego, by zasada znakowania była niezależna od przyjętego układu współrzędnych. Zasadę taką można zastosować tylko do znakowania siły normalnej, której dodatnia wartość oznacza rozciąganie pręta (rys. 14.8a).

Znakowanie momentu skręcającego można uzależnić tylko od „krętności” układu współrzędnych. Jeśli przyjmiemy, że wektor dodatniego momentu skręcającego „rozciąga” pręt, otrzymamy zasadę znakowania zilustrowaną na rys. 14.8b. W prawoskrętnym układzie współrzędnych, stosowanym powszechnie w mechanice, dodatni moment skręcający odpowiada przykładowo kierunkowi odkręcania nasadki pióra lub nakrętki śruby.

Bardzo duże znaczenie praktyczne mają płaskie układy prętowe, tzn. takie, w których osie wszystkich prętów leżą w tej samej płaszczyźnie. Najczęściej spotyka się zadania, w których siły zewnętrzne (czynne i bierne) leżą w jednej płaszczyźnie, pokrywającej się z płaszczyzną układu prętowego. W tych szczególnych przypadkach – zgodnie z wieloletnią tradycją – zasady znakowania sił poprzecznych i momentów zginających są już ustalone. Przyjmuje się mianowicie, że dodatnia siła poprzeczna usiłuje obrócić odcinek pręta zgodnie z ruchem wskazówki zegara (por. rys. 14.8c). Umowa ta zależy jednak od tego, z której strony płaszczyzny układu obserwujemy konstrukcję. Dla momentu zginającego przyjmuje się zasadę, że dodatni moment powoduje rozciąganie dolnych włókien pręta (por. rys. 14.8d). W przypadku prętów pionowych i pochyłych przed przystąpieniem do obliczeń zaznacza się linią przerywaną te włókna, które umownie uważamy za „dolne” (rys. 14.8e). Znakowania momentów można całkowicie zaniedbać, jeśli rzędne wykresu momentów odnosi się zawsze po stronie włókien rozciąganych. Ten sposób ma wiele zalet i jest stosowany również w tych przypadkach, gdy momenty są zaopatrzone w znak.

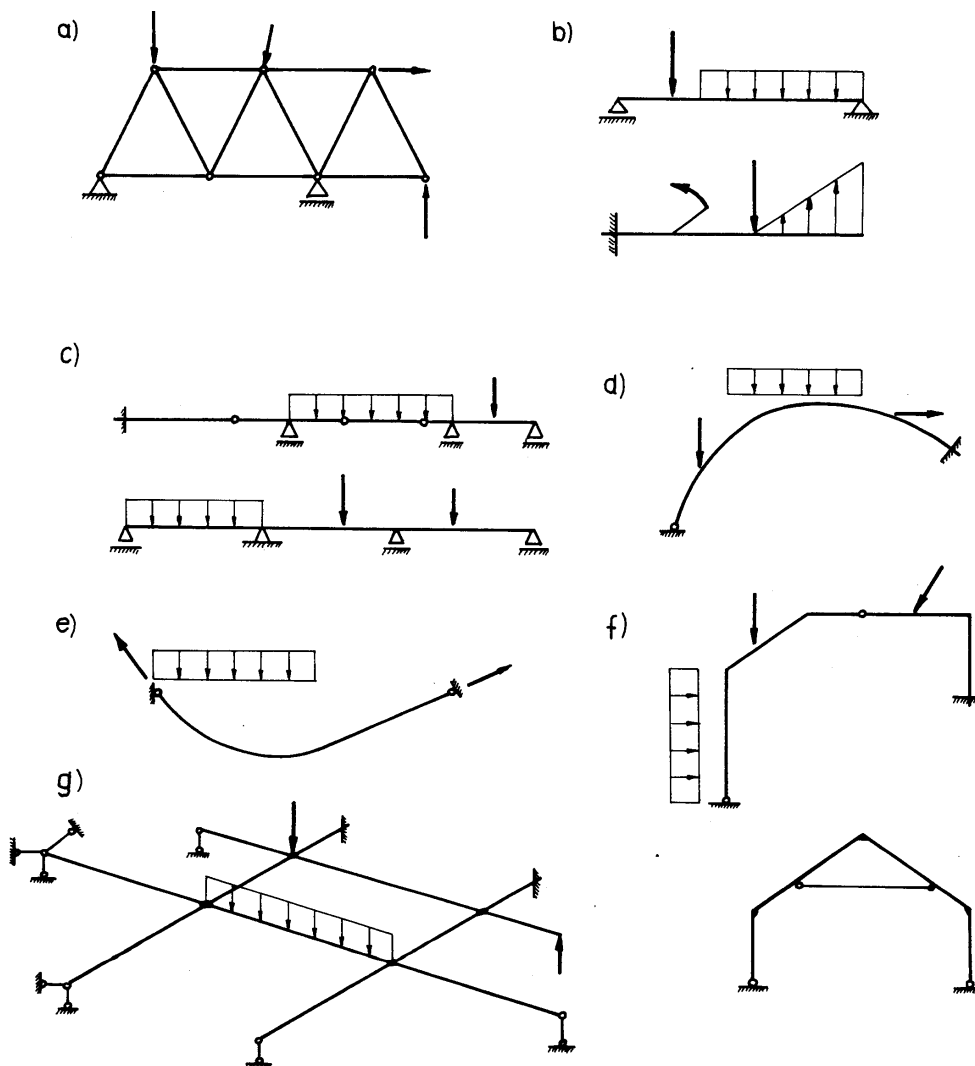


Rys. 14.8

## 14.5. KLASYFIKACJA UKŁADÓW PRĘTOWYCH

Nazewnictwo konstrukcji prętowych kształtowało się na przestrzeni stuleci. Nic dziwnego, że klasyfikacja układów prętowych nie jest merytorycznie spójna. O nazwie konstrukcji decydują zazwyczaj następujące cechy:

- sposób podparcia i połączenia prętów,
- kształt geometryczny osi,
- sposób obciążenia,
- zdolność konstrukcji do przejmowania określonych sił wewnętrznych.



Rys. 14.9

A oto określenia najczęściej spotykanych układów prętowych:

- **Kratownica** to układ prostoliniowych prętów połączonych ze sobą przegubowo. Obciążenie działa wyłącznie w postaci sił skupionych przyłożonych w węzłach, tj. w punktach połączenia prętów (rys. 14.9a). Przy tych założeniach pręty kratownicy przenoszą wyłącznie siły podłużne.
- **Belka** to pręt o osi prostoliniowej, obciążony poprzecznie. Belka podparta swobodnie w dwóch punktach (przegubowo) oraz belka wspornikowa noszą nazwę belek prostych (rys. 14.9b). Na rysunku 14.9c przedstawiono tzw. belki ciągłe (przegubowe i bezprzegubowe). Termin „belka” rezerwuje się dla prętów zginanych.

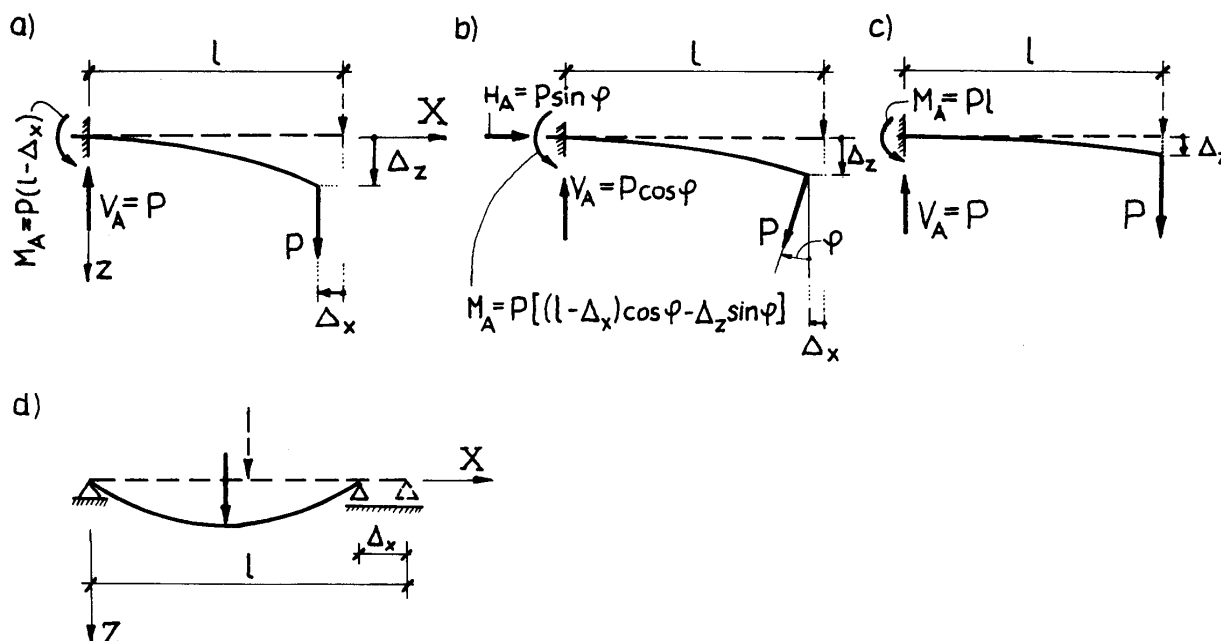
- **Luk** to pręt o osi zakrzywionej w pewnej płaszczyźnie. W lukach oprócz zginania i ścinania z reguły występują podłużne siły ściskające (rys. 14.9d).
- **Cięgno** to pręt mający tylko sztywność rozciągania. Przy obciążeniu poprzecznym równowaga cięgna wymaga zakrzywienia lub załamania osi (rys. 14.9e). Cięgno przenosi wyłącznie siły normalne rozciągające.
- **Rama** to układ prętów prostoliniowych połączonych w węzłach w sposób sztywny lub przegubowy (rys. 14.9f).
- **Ruszt** to rama płaska obciążona prostopadle do swej płaszczyzny (rys. 14.9g).

Poza tym stosuje się bardziej szczegółowe terminy. Określenie „słup” oznacza pręt pionowy poddany ścisnaniu. Rozciągany pręt pionowy nosi nazwę „wieszak”. „Rygiel” to zazwyczaj poziomy element ramy przenoszący momenty zginające.

### 14.6. OBLICZANIE SIŁ WEWNĘTRZNYCH. ZASADA ZESZTYWNIENIA

Ogólny sposób wyznaczania sił wewnętrznych w przekroju  $\alpha - \alpha$  polega na badaniu równowagi jednej dowolnie wybranej części pręta oddzielonej tym przekrojem. Do wyznaczenia sił wewnętrznych za pomocą równań równowagi muszą być dane:

- przemieszczenia każdego przekroju pręta,
- zachowanie się obciążenia w procesie deformacji,
- siły reakcji więzów.



Rys. 14.10

Informacja, że obciążenia rosną od zera do swej końcowej wartości, jest niewystarczająca, gdyż obciążenie związane z danym punktem materialnym może w procesie odkształcenia zachować swój kierunek w przestrzeni (rys. 14.10a) lub nie (rys. 14.10b). W pierwszym przypadku mamy do czynienia z ob-

ciężeniem konserwatywnym. Odpowiada ono sytuacjom, w których praca obciążenia zależy tylko od konfiguracji początkowej i końcowej. Drugi przypadek odpowiada obciążeniu niekonserwatywnemu. Jest oczywiste, że w obu przypadkach podanych na rys. 14.10a, b reakcje więzów podporowych i siły wewnętrzne będą różne. Zachowanie się obciążenia w procesie deformacji warunkuje stosowanie twierdzenia o minimum energii potencjalnej – obciążenie musi być wówczas konserwatywne. Ma to duże znaczenie w problemach stateczności.

Do obliczenia reakcji podporowych niezbędna jest zazwyczaj znajomość przemieszczenia tylko pewnych przekrojów pręta. Widać to wyraźnie na rys. 14.10a, b. W pewnych przypadkach wymaganie to nie jest konieczne, co pokazuje rys. 14.10d. Niemniej jednak do ścisłego określenia sił wewnętrznych w każdym przekroju musimy znać deformacje całego pręta.

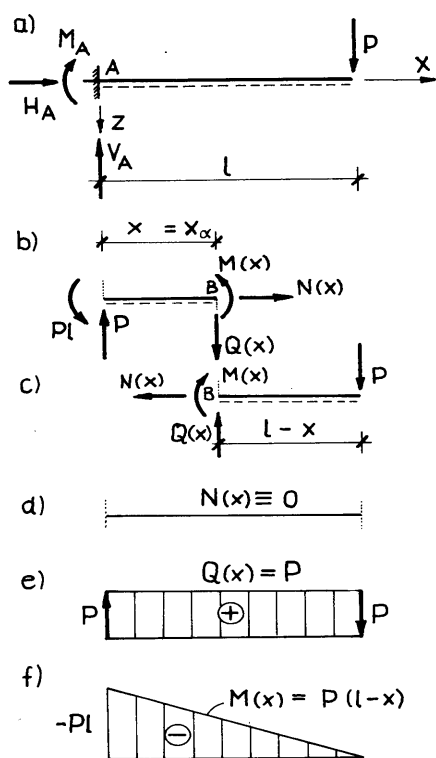
Problem wyznaczania sił wewnętrznych upraszcza się znakomicie, gdy przyjmiemy, że przemieszczenia konstrukcji są bardzo małe. Założenie to jest uzasadnione, gdyż w technice wymagamy na ogół odpowiednio dużej sztywności konstrukcji. Wyjątek stanowią tu konstrukcje ciągnowe i pneumatyczne. Założenie małych przemieszczeń pozwala zaniedbać rozróżnianie konfiguracji przed i po odkształceniu, a w równaniach równowagi można pominąć wpływ deformacji. Inaczej mówiąc, przy układaniu równań równowagi pręty traktujemy jak ciała sztywne zajmujące pod obciążeniem konfigurację początkową. Stwierdzenie powyższe stanowi treść tzw. **zasady zeszywnienia**. Zastosowanie tej zasady do belki z rys. 14.10c umożliwia obliczenie zarówno reakcji, jak i sił wewnętrznych wyłącznie z równań równowagi.

Reakcje podpory utwierdzonej  $V_A, H_A, M_A$  wyznaczamy na podstawie równań (c) z p. 14.1 (por. rys. 14.11a):

$$\begin{aligned}\sum P_x^{(i)} &= 0: & H_A &= 0, \\ \sum P_z^{(i)} &= 0: & -V_A + P &= 0, \quad V_A = P, \\ \sum M_y^{(i)} &= \sum M_A = 0: & M_A + Pl &= 0, \quad M_A = -Pl.\end{aligned}$$

Podobnie wyznaczymy siły wewnętrzne  $N(x), Q(x), M(x)$ , badając równowagę jednej z części odciętej przekrojem  $x = x_\alpha$ . Przykładowo dla części lewej z rysunku 14.10b mamy:

$$\begin{aligned}\sum P_x^{(i)} &= 0: & N(x) &= 0, \\ \sum P_z^{(i)} &= 0: & P = Q(x) &= 0, \quad Q(x) = P, \\ \sum M_y^{(i)} &= \sum M_B = 0: & -Pl - M(x) + Px &= 0, \quad M(x) = -P(l - x).\end{aligned}$$



Rys. 14.11

Identyczne wyniki uzyskamy za pomocą równań równowagi ułożonych dla części prawej (rys. 14.11c). Wykresy sił wewnętrznych przedstawiają rys. 14.11d, e, f. Zwróćmy uwagę na to, że rzędne wykresu  $M(x)$  odłożone są po stronie włókien rozciąganych.

### 14.7 KONSTRUKCJE STATYCZNIE WYZNACZALNE I STATYCZNIE NIWYZNACZALNE

Jeżeli dla dowolnego obciążenia konstrukcji reakcje i siły wewnętrzne można wyznaczyć wyłącznie z równań równowagi, to konstrukcję taką nazywamy statycznie wyznaczalną. Wszystkie inne tworzą zbiór konstrukcji statycznie niewyznaczalnych. W konstrukcjach tych do określenia pola statycznego (tj. reakcji i sił wewnętrznych) oprócz równań równowagi wykorzystuje się dodatkowo informacje o polu przemieszczeń, które zależą m. in. od własności fizycznych materiału. Należy podkreślić, że w ramach teorii kinematycznie nieliniowej, w której nie obowiązuje zasada zeszytywnienia, każda konstrukcja jest statycznie niewyznaczalna. W takich przypadkach w równaniach równowagi występują nieznane przemieszczenia, do których wyznaczenia niezbędna jest analiza deformacji konstrukcji. Wniosek ten wynika z rozważań zawartych w p. 14.6.

Przykładem konstrukcji statycznie wyznaczalnej jest belka wspornikowa z rys. 14.10c, której rozwiązanie podano na rys. 14.11. Bardzo istotną cechą konstrukcji statycznie wyznaczalnych jest to, że zerowemu obciążeniu odpowiadają zawsze zerowe reakcje i siły wewnętrzne. W konstrukcjach statycznie niewyznaczalnych już tak nie jest, gdyż mogą w nich występować różne od zera reakcje i siły wewnętrzne będące w równowadze z zerowym obciążeniem. Teoria konstrukcji statycznie wyznaczalnych ma znaczenie podstawowe, służy bowiem także do obliczania konstrukcji statycznie niewyznaczalnych.

Na podstawie poprzedniego punktu można wnioskować, że podział na konstrukcje statycznie wyznaczalne i niewyznaczalne wynika z przyjęcia zasady zeszytywnienia. Znaczenie tej zasady wykracza jednak poza konstrukcje o małych przemieszczeniach. Załóżmy, że przy pełnym obciążeniu  $P$  konstrukcja wykazuje duże przemieszczenia. Wyobraźmy sobie, że obciążenie przyrasta w czasie skokowo o tak małe wartości  $\Delta P$ , że przyrosty przemieszczeń konstrukcji są również bardzo małe. Wówczas na każdym kroku obciążenia można przyjąć, że jest słuszna zasada zeszytywnienia. Pozwala to na przybliżone obliczenie sił

wewnętrznych, jeżeli uwzględnimy przemieszczenia konstrukcji skumulowane w krokach poprzednich. Idea metody przyrostowej jest bardzo często stosowana do obliczania konstrukcji wykazujących duże przemieszczenia.

### 14.8. RÓWNANIA PRACY WIRTUALNEJ DLA KONSTRUKCJI PRĘTOWYCH

Fizyczne podstawy metod mechaniki budowli wywodzą się z równań pracy wirtualnej, stąd fundamentalne znaczenie tych równań.

Równania pracy wirtualnej są słuszne dla dowolnego modelu fizycznego materiału. Wynikają z nich zarówno zasady energetyczne, jak i równania równowagi, są bardzo użyteczne podczas wyznaczania przemieszczeń i wielkości statycznych. W dalszych rozdziałach pokażemy niektóre zastosowania tych równań.

Dla ciała o objętości  $V$  ograniczonego powierzchnią  $S$  równania pracy wirtualnej mają postać (por. wzory (3.2) i (3.3)):

$$(a) \quad \int_S p_i \bar{u}_i dS + \int_V G_i \bar{u}_i dV = \int_V \sigma_{ij} \bar{\epsilon}_{ij} dV,$$

$$(b) \quad \int_S \bar{p}_i u_i dS + \int_V \bar{G}_i u_i dV = \int_V \bar{\sigma}_{ij} \epsilon_{ij} dV,$$

przy czym wielkości wirtualne dla odróżnienia od rzeczywistych zaznaczono nadkreśleniem. Między wielkościami rzeczywistymi a wirtualnymi nie ma żadnego związku przyczynowego. Muszą one jedynie spełniać warunki dopuszczalności statycznej i kinematycznej.

W tym punkcie nadamy równaniom (a) i (b) postać przydatną do analizy konstrukcji prętowych.

W konstrukcjach prętowych wszystkie siły zewnętrzne są przyłożone do osi pręta, wobec czego różnice między siłami powierzchniowymi i masowymi znikają. Stosownie do ustaleń p. 14.3, traktującego o obciążeniach, lewe strony równań (a) i (b) można zapisać według schematu:

$$\int_S p_i u_i dS + \int_V G_i u_i dV = \int_s (q_x u + q_y v + q_z w + m_x \psi + m_y \varphi_y + m_z \varphi_z) ds = \int_s \left( \sum_{i=1}^6 F_i d_i \right) ds. \quad (14.4)$$

Wzór (14.4), przedstawiający pracę sił zewnętrznych, oraz wyrażenia na pracę sił wewnętrznych, podane w drugiej części, pozwalają otrzymać ogólną postać równań pracy wirtualnej dla konstrukcji prętowych:

– wirtualny stan przemieszczeń:

$$\begin{aligned} & \int_s (q_x \bar{u} + q_y \bar{v} + q_z \bar{w} + m_x \bar{\psi} + m_y \bar{\varphi}_y + m_z \bar{\varphi}_z) ds = \\ & = \int_s (N \bar{\lambda} + Q_y \bar{\beta}_y + Q_z \bar{\beta}_z + M \bar{\theta} + M_y \bar{\kappa}_y + M_z \bar{\kappa}_z) ds, \end{aligned} \quad (14.5)$$

lub krócej

$$\int_s \left( \sum_{i=1}^6 F_i \cdot \bar{d}_i \right) ds = \int_s \left( \sum_{i=1}^6 Y_i \cdot \bar{e}_i \right) ds, \quad (14.5a)$$

– wirtualny stan sił:

$$\begin{aligned}
& \int_s (\bar{q}_x u + \bar{q}_y v + \bar{q}_z w + \bar{m}_x \psi + \bar{m}_y \phi_y + \bar{m}_z \phi_z) ds = \\
& = \int_s (\bar{N} \lambda + \bar{Q}_y \beta_y + \bar{Q}_z \beta_z + \bar{\mathcal{M}} \theta + \bar{M}_y \chi_y + \bar{M}_z \chi_z) ds,
\end{aligned} \quad (14.6)$$

lub

$$\int_s \left( \sum_{i=1}^6 \bar{F}_i \cdot d_i \right) ds = \int_s \left( \sum_{i=1}^6 \bar{Y}_i \cdot e_i \right) ds. \quad (14.6a)$$

W równaniach tych  $\lambda, \beta_y, \beta_z, \theta, k_y, k_z$  oznaczają odpowiednio tzw. uogólnione odkształcenia pręta: wydłużenie względne osi, średnie kąty ścinania oraz jednostkowy kąt skręcenia i krzywizny osi pręta. Wielkości te można uważać za elementy pewnej macierzy odkształceń uogólnionych  $\{e_i\}$ :

$$\{e_i\} = \{\lambda, \beta_y, \beta_z, \theta, k_y, k_z\}, \quad i = 1, 2, \dots, 6. \quad (14.7)$$

Warto przytoczyć pewien szczególny przypadek równań pracy wirtualnej (14.5). Chodzi o postać tych równań dla układu ciał idealnie sztywnych, w których dopuszczalne przemieszczenia wykluczają występowanie uogólnionych odkształceń. Wówczas prawa strona wzoru (14.5) jest zawsze równa zeru:

$$\int_s (q_x \bar{u} + q_y \bar{v} + q_z \bar{w} + m_x \bar{\psi} + m_y \bar{\phi}_y + m_z \bar{\phi}_z) ds = 0 \quad (14.8)$$

lub

$$\int_s \left( \sum_{i=1}^6 F_i \cdot \bar{d}_i \right) ds = 0. \quad (14.8a)$$

Równania (14.8) mają duże znaczenie praktyczne przy wyznaczaniu reakcji więzów i sił wewnętrznych.

Równania (14.5) i (14.6) obowiązują również dla prętów silnie zakrzywionych. Trzeba wówczas zamiast zmiany krzywizny  $k$  wpisać wyrażenie  $k + \lambda/r$ , gdzie  $r$  oznacza początkowy promień zakrzywienia osi pręta.

Równania pracy wirtualnej zapisane w postaci (14.5) i (14.6) obowiązują przy założeniu płaskich przekrojów (niekoniecznie normalnych do wygiętej osi pręta) oraz swobodnej deplanacji przekroju podczas skręcania. W innych przypadkach trzeba wprowadzić pewne modyfikacje tych równań. Niemniej ich sens pozostaje ten sam: lewe strony wyrażają pracę sił zewnętrznych, a prawe – pracę sił wewnętrznych. Na przykład w prostoliniowych prętach cienkościennych o przekroju otwartym, podlegających założeniom teorii *Własowa*, prawe strony równań pracy wirtualnej przybierają postać (por. wzór (13.51)):

$$\int_s (N \lambda + B k_\omega + \mathcal{M}_v \theta + M_y k_y + M_z k_z) ds, \quad (14.9)$$

gdzie  $B$  i  $\mathcal{M}_v$  oznaczają odpowiednio bimoment i moment skręcający *Saint-Venanta*, natomiast krzywizna „skrętna”  $k_\omega = \theta' = \psi''$ . W wyrażeniu (14.9) nie występują składniki  $Q_y \beta_y + Q_z \beta_z$ , bo w teorii *Własowa* zakłada się, że  $\beta_y = \beta_z = 0$ .

## 14.9. TWIERDZENIA ENERGETYCZNE DLA PRĘTÓW SPRĘŻYSTYCH

### 14.9.1. Twierdzenie Clapeyrona

Matematyczna treść twierdzeń energetycznych wynika z rezultatów uzyskanych dla ośrodka ciągłego w rozdziale 5.

Twierdzenie *Clapeyrona* dla konstrukcji prętowych wyraża równanie:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_s (q_x u + q_y v + q_z w + m_x \psi + m_y \phi_y + m_z \phi_z) ds = \\ = \int_s \frac{1}{2} (N\lambda + Q_y \beta_y + Q_z \beta_z + \mathfrak{M}\theta + M_y k_y + M_z k_z) ds, \end{aligned} \quad (14.10)$$

lub

$$\frac{1}{2} \int_s \left( \sum_{i=1}^6 F_i \cdot d_i \right) ds = \int_s \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 Y_i \cdot e_i \right) ds, \quad i = 1, 2, \dots, 6. \quad (14.10a)$$

Budowa wzoru (14.10) wynika bezpośrednio z rozważań zawartych w p. 14.8. Wzór ten można również traktować jako szczególny przypadek równań pracy wirtualnej, w których wielkości wirtualne utożsamia się z wielkościami rzeczywistymi. Założenie takie jest uzasadnione tym, że wielkości wirtualne są dowolne i dopuszczalne, mogą zatem być także wielkościami rzeczywistymi.

Wzór (14.10) obowiązuje tylko dla układów *Clapeyrona*, czyli układów, w których zależności między obciążeniami i przemieszczeniami są liniowe, a ponadto nie występują wstępne naprężenia lub odkształcenia oraz zmiany temperatury.

### 14.9.2. Twierdzenie o minimum energii potencjalnej

Energię potencjalną definiuje się następująco:

$$(a) \quad \Pi = \int_V W[\epsilon_{ij}(u_k)] dV - \int_{Sp} p_i u_i dS - \int_V G_i u_i dV,$$

przy czym  $W(\epsilon_{ij})$  jest funkcją energii odkształcenia sprężystego mającą własność potencjału:

$$(b) \quad \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} = \sigma_{ij}.$$

Odpowiednią postać równania (a) dla prętów otrzymamy natychmiast, jeżeli posłużymy się wielkościami uogólnionymi  $F_i, d_i, Y_i, e_i$ :

$$\Pi = \Pi(d_i) = \int_s W[e_i(d_i)] ds - \int_{s_F} \left( \sum_{i=1}^6 F_i d_i \right), \quad (14.11)$$

przy czym

$$\frac{\partial W}{\partial e_i} = Y_i, \quad i = 1, 2, \dots, 6. \quad (14.12)$$

Dla pręta liniowo-sprężystego

$$W(e_i) = \frac{1}{2} \left[ EA\lambda^2 + \frac{GA}{k_y} \beta_y^2 + \frac{GA}{k_z} \beta_z^2 + GJ_s \Theta^2 + EJ_y k_y^2 + EJ_z k_z^2 \right] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 D_i e_i^2, \quad (14.13)$$

gdzie  $D_i$  oznaczają kolejno odpowiednie sztywności przekroju pręta  $EA$ ,  $GA/k_y$ , ...,  $EJ_z$ .

Warunkiem stanu równowagi jest osiągnięcie przez energię potencjalną  $\Pi(d_i)$  wartości ekstremalnej. Równowaga stateczna odpowiada natomiast takiemu kinematycznie dopuszczalnemu polu przemieszczeń, które nadaje energii potencjalnej wartość minimalną:

$$\Pi(d_i) = \min. \quad (14.14)$$

Twierdzenie to jest słuszne również dla prętów nieliniowo-sprężystych. Przemieszczenia konstrukcji mogą być dowolnie duże pod warunkiem, że obciążenia są konserwatywne.

Omówimy jeszcze jeden bardzo ważny przypadek szczególny, gdy obciążenie składa się również z obciążeń skupionych  $P_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ). Mogą to być siły lub momenty skupione. Dla jasności zapisu oddziaływania te wydzielimy, przyjmując, że

$$\int_s \left( \sum_{i=1}^6 F_i d_i \right) ds = \int_{s_F} \left( \sum_{i=1}^6 F_i d_i \right) ds + \sum_{j=1}^m P_j \Delta_j,$$

gdzie  $D_i$  oznacza rzut przemieszczenia punktu przyłożenia obciążenia skupionego  $P_j$  na linię działania tego obciążenia. Energię potencjalną  $\Pi(d_i, \Delta_j)$  wyrazimy więc jak następuje:

$$(c) \quad \Pi(d_i, \Delta_j) = \int_s W[e_i(d_k)] ds - \int_{s_F} \left( \sum_{i=1}^6 F_i d_i \right) ds - \sum_{j=1}^m P_j \Delta_j.$$

Warunkiem koniecznym występowania stanu równowagi jest zerowanie się pochodnej energii  $\Pi$  względem przemieszczenia  $\Delta_j$ , czyli  $\partial \Pi / \partial \Delta_j = 0$ , co na podstawie wzoru (c) prowadzi do zależności:

$$P_j = \frac{\partial U}{\partial \Delta_j}, \quad (14.15)$$

gdzie  $U = U(e_i, \Delta_j) = \int_s W(e_i, \Delta_j) ds$  i oznacza całkowitą energię odkształcenia wyrażoną przez wielkości kinematyczne.

### 14.9.3. Twierdzenie o minimum energii dopełniającej. Zasada Castigliano

Energię dopełniającą  $\Pi^*$  definiuje się następująco:

$$(d) \quad \Pi^* = \int_V W(\sigma_{ij}) dV - \int_{S_u} p_i u_i ds,$$

przy czym  $W(\sigma_{ij})$  jest funkcją energii naprężeń mającą własność potencjału:

$$(e) \quad \frac{\partial W}{\partial \sigma_{ij}} = \varepsilon_{ij}.$$

Dla prętów odpowiednia postać energii dopełniającej  $\Pi^*$  przedstawia wzór:

$$\Pi^* = \int_s W(Y_i) ds - \int_{s_d} \left( \sum_{i=1}^6 F_i d_i \right) ds, \quad (14.16)$$

przy czym

$$\frac{\partial W}{\partial Y_k} = e_k, \quad k = 1, 2, \dots, 6. \quad (14.17)$$

Dla pręta liniowo-sprężystego

$$W(Y_i) = \frac{1}{2} \left[ \frac{N^2}{EA} + \frac{Q_y^2}{(GA/k_y)} + \frac{Q_z^2}{(GA/k_z)} + \frac{\mathfrak{M}^2}{GJ_s} + \frac{M_y^2}{EJ_y} + \frac{M_z^2}{EJ_z} \right] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 \frac{Y_i^2}{D_i}. \quad (14.18)$$

Twierdzenie o minimum energii dopełniającej głosi, że spośród wszystkich dopuszczalnych pól statycznych (naprężeń uogólnionych i sił zewnętrznych) realizuje się to pole, które nadaje energii dopełniającej wartość minimalną, czyli:

$$\Pi^*(Y_i, F_k) = \min. \quad (14.19)$$

Szczególnym przypadkiem tego twierdzenia jest tzw. **zasada Castigliano**, która ma zastosowanie, gdy poza obciążeniami ciągłymi  $F_k$  występują również obciążenia skupione  $P_j$ . Wówczas

$$(f) \quad \Pi^* = \Pi^*(Y_i, F_k, P_j) = \int_s W(Y_i, P_j) ds - \int_{s_d} \left( \sum_{i=1}^6 F_i d_i \right) ds - \sum_{j=1}^m P_j \Delta_j.$$

Warunkiem istnienia ekstremum energii dopełniającej jest znikanie pochodnej energii dopełniającej względem siły  $P_j$ , czyli  $(\partial \Pi^* / \partial P_j) = 0$ . Warunek ten zastosowany do równania (f) prowadzi do zależności:

$$\Delta_j = \frac{\partial U}{\partial P_j}, \quad (14.20)$$

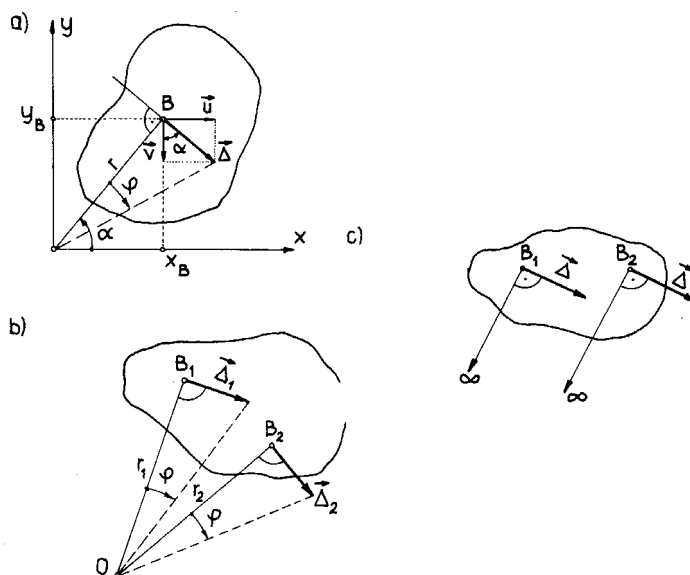
gdzie  $U = U(Y_i, P_j) = \int_s W(Y_i, P_j) ds$  i oznacza całkowitą energię odkształcenia wyrażoną przez wielkości statyczne. Równanie (14.20) stanowi treść wspomnianej wyżej zasady *Castigliano*.

## 14.10. O KINEMATYCE I STATYCE UKŁADÓW CIAŁ IDEALNIE SZTYWNYCH

### 14.10.1. Małe przemieszczenia tarczy sztywnej

Problematykę zawartą w tytule tego punktu omówimy na przykładzie układów płaskich. Jako model ciała idealnie sztywnego przyjmijmy nieodkształcalną figurę płaską, czyli tzw. tarczę sztywną.

Z mechaniki teoretycznej wiadomo, że dowolny przyrost przemieszczeń ciała sztywnego można traktować jako obrót tego ciała wokół chwilowego bieguna obrotu. Przesunięcie równoległe (translacja) stanowi przypadek szczególny, w którym chwilowy biegun obrotu leży w nieskończoności.



Rys. 14.12

Rozważmy obrót tarczy sztywnej wokół bieguna leżącego w początku przyjętego układu współrzędnych  $x, y$  (rys. 14.12a). Jeśli kąt obrotu  $\varphi$  jest mały, to można przyjąć, że wektory przemieszczenia poszczególnych punktów tarczy są prostopadłe do kierunku promieni łączących te punkty z biegunem obrotu. Ilustruje to rys. 14.12a, na którym dla wybranego punktu  $B$  wektor przemieszczenia  $\Delta$  jest prostopadły do promienia  $r$ , przy czym

$$\Delta = r \cdot \operatorname{tg} \varphi \approx r \cdot \varphi \quad (14.21)$$

Rzuty przemieszczenia  $\Delta$  na osie  $x$  i  $y$  wynoszą:

$$\begin{aligned} (a) \quad u &= \Delta \sin \alpha = \varphi \cdot (r \sin \alpha), \\ (b) \quad v &= -\Delta \cos \alpha = -\varphi \cdot (r \cos \alpha). \end{aligned}$$

Ponieważ współrzędne punktu  $B$  wyrażają się wzorami

$$\begin{aligned} (c) \quad x_B &= r \cos \alpha, \\ (d) \quad y_B &= r \sin \alpha, \end{aligned}$$

więc zależności (a) i (b) można zapisać w postaci:

$$\left. \begin{aligned} u &= \varphi \cdot y_B, \\ v &= -\varphi \cdot x_B. \end{aligned} \right\} \quad (14.22)$$

Równanie (14.22) prowadzi do bardzo użytecznego wniosku, a mianowicie:

*Bezwzględna wartość dowolnej składowej wektora przemieszczenia jest iloczynem kąta obrotu tarczy i odległości tej składowej od bieguna obrotu.*

Drugie ważne spostrzeżenie dotyczy sposobu wyznaczenia położenia bieguna obrotu (por. rys. 14.12b):

*Jeżeli znamy kierunki wektorów przemieszczenia dwóch różnych punktów tarczy, to chwilowy biegun obrotu leży w punkcie przecięcia się prostych prostopadłych do tych wektorów.*

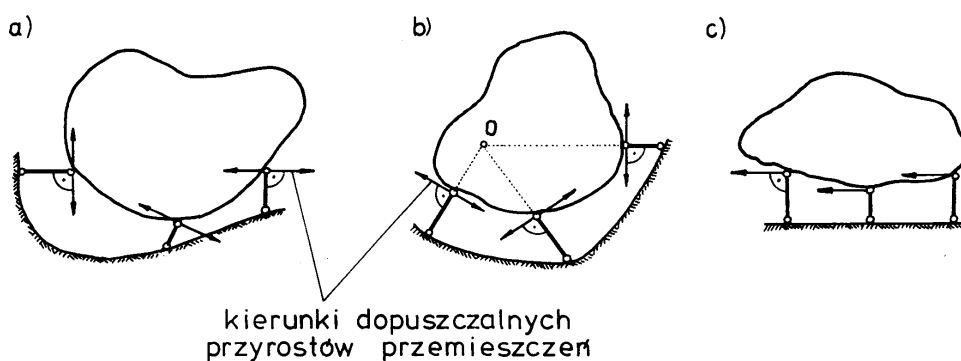
Ponieważ każdy z punktów tworzących tarczę obraca się względem bieguna obrotu o ten sam kąt równy kątowi obrotu całej tarczy  $\varphi$ , zatem na podstawie (14.21) otrzymujemy zależność:

$$\varphi = \frac{\Delta_1}{r_1} = \frac{\Delta_2}{r_2} = \dots = \frac{\Delta_n}{r_n} = \text{const.} \quad (14.23)$$

W szczególnym przypadku, gdy tarcza podlega wyłącznie translacji, chwilowy biegun obrotu leży w nieskończoności (w punkcie przecięcia się dwóch prostych równoległych – por. rys. 14.12c).

#### 14.10.1. Warunek geometrycznej niezmienności i kinematyka układu tarcz sztywnych

Tarcza sztywna na płaszczyźnie ma trzy stopnie swobody. Do jej unieruchomienia niezbędne są zatem co najmniej trzy pręty podporowe (rys. 14.13a). Jest to tylko warunek konieczny, ponieważ tarcza z rys. 14.13b może obracać się wokół bieguna  $O$ , leżącego w punkcie przecięcia się wszystkich trzech prętów podporowych. Tarcza ta ma więc jeden stopień swobody i jest chwilowo geometrycznie zmienna.



Rys. 14.13

Dla układu złożonego z większej liczby tarcz warunek konieczny ich unieruchomienia jest następujący:

$$(e) \quad p = 3t,$$

gdzie  $p$  jest łączną liczbą prętów podporowych, a  $t$  – liczbą tarcz w układzie. Na podstawie równania (e) można sprecyzować trzy przypadki:

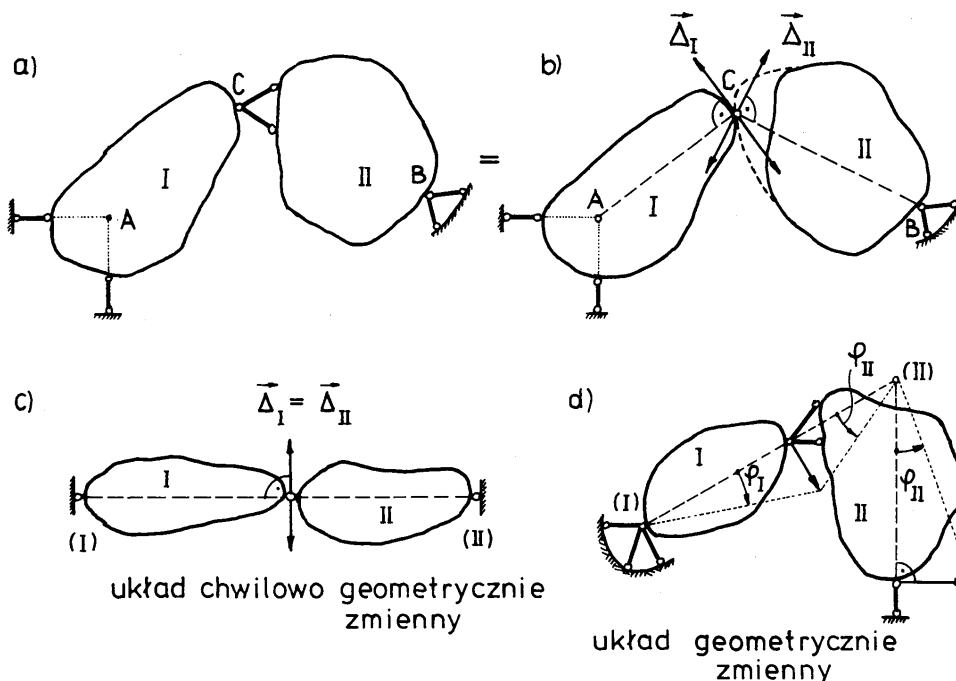
- 1) gdy  $p < 3t$ , układ jest geometrycznie zmienny,
- 2) gdy  $p = 3t$ , układ jest geometrycznie niezmienny,
- 3) gdy  $p > 3t$ , układ jest geometrycznie niezmienny i przesztyniony.

Powyższy podział jest słuszny, jeżeli wykluczmy z równań przypadki szczególne podane przykładowo na rys. 14.13b, c, 14.14c, d.

W każdej poprawnie zaprojektowanej konstrukcji, której elementy – zgodnie z zasadą zesztynienia – można traktować jak tarcze sztywne, liczba więzów (prętów podporowych) musi spełniać **konieczny warunek** niezmienności geometrycznej.

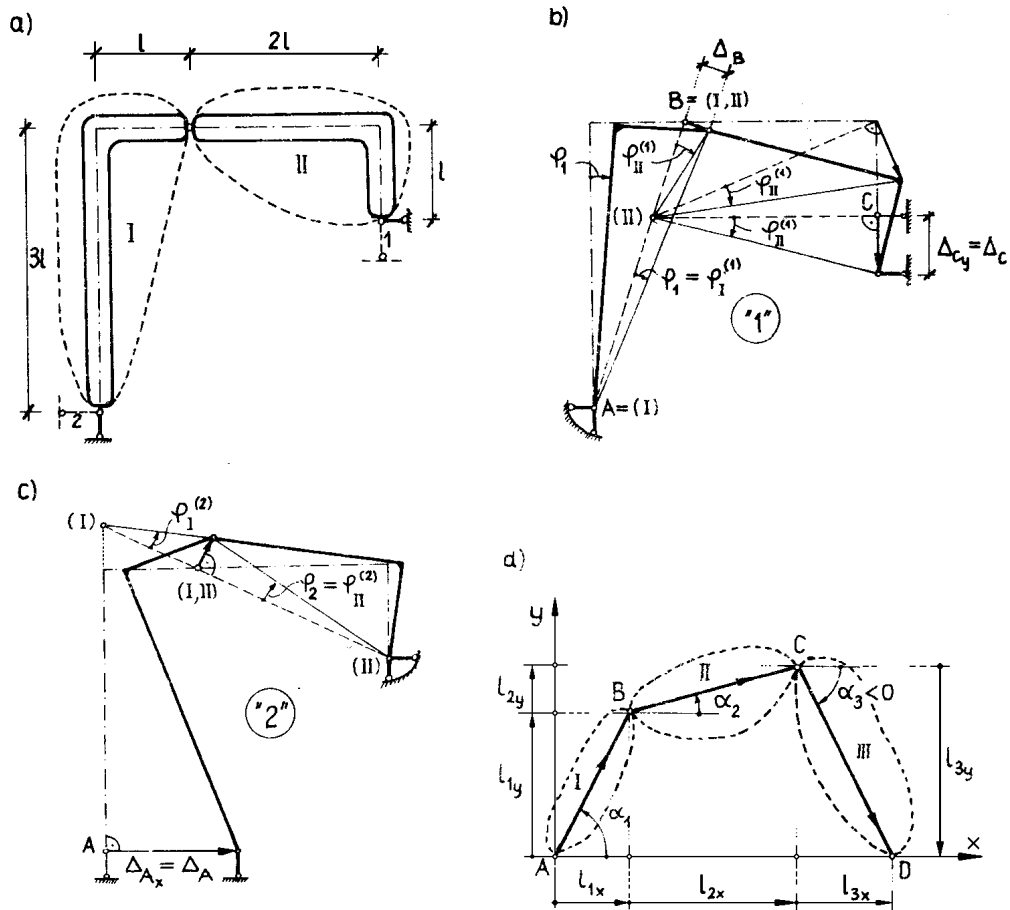
$$p \geq 3t. \quad (14.24)$$

Liczba  $n = p - 3t$  określa stopień przesztynienia układu. Warunek **dostateczny** niezmienności geometrycznej układu sformułujemy w p. 14.10.4.



Rys. 14.14

Omówimy krótko układy geometrycznie zmiennie (przypadek 1), które także mają duże znaczenie praktyczne. Chodzi mianowicie o określenie kinematyki takich układów. Liczba  $s = 3t - p$  określa liczbę stopni swobody układu geometrycznie zmiennego. Gdy liczba stopni swobody  $s > 1$ , to kinematyka wypadkowa jest kombinacją liniową poszczególnych mechanizmów o jednym stopniu swobody. Rozważmy przykładowo układ dwóch ciał przedstawiony na rys. 14.15. Układ ten ma dwa stopnie swobody ( $s = 3 \cdot 2 - 4 = 2$ ). Wprowadzenie dwóch dodatkowych prętów podporowych 1 i 2 powoduje, że układ staje się geometrycznie niezmienny. Pierwszy mechanizm o jednym stopniu swobody uzyskujemy po usunięciu podpory 1, a drugi – również o jednym stopniu swobody – po usunięciu podpory 2. Każdy z mechanizmów jest jednoznacznie określony przez kąt obrotu wybranej tarczy. Przyjmijmy zatem, że kąt  $\varphi_1$  określa mechanizm 1, a kąt  $\varphi_2$  określa mechanizm 2.



Rys. 14.15

Dokonyamy najpierw analizy mechanizmu 1 (rys. 14.15b). Punkt (I) oznacza biegun obrotu tarczy I. Punkt ten pokrywa się z podporą A. Biegun obrotu tarczy II leży na prostych prostopadłych do znanych kierunków wektorów przemieszczenia dwóch punktów B i C należących do tarczy II. Wzajemny biegun obrotu obu tarcz (I, II) leży w punkcie B. Charakterystyczne jest to, że bieguny (I), (I, II) i (II) leżą na jednej prostej. Z porównania długości wektora  $\Delta_B$  wyznaczonej z kinematyki tarcz I i II otrzymujemy zależność między kątami  $\varphi_I^{(1)}$  i  $\varphi_{II}^{(1)}$ :

$$3 \cdot \varphi_I^{(1)} = 1 \cdot \varphi_{II}^{(1)}.$$

Ponieważ  $\varphi_I = \varphi_I^{(1)}$ , więc dla mechanizmu 1 mamy

$$\varphi_I^{(1)} = \varphi_1, \quad \varphi_{II}^{(1)} = 3\varphi_1.$$

W podobny sposób ustalamy położenie bieguna obrotu i zależności między kątami w mechanizmie 2 (rys. 14.15c):

$$1 \cdot \varphi_I^{(2)} = -2 \cdot \varphi_{II}^{(2)}.$$

Ponieważ  $\varphi_2 = \varphi_{II}^{(2)}$ , więc  $\varphi_I^{(2)} = -2 \cdot \varphi_{II}^{(2)} = -2 \cdot \varphi_2$ . Ostatecznie otrzymujemy:

$$(f) \quad \begin{cases} \varphi_I = \varphi_I^{(1)} + \varphi_{II}^{(2)} = \varphi_1 - 2\varphi_2, \\ \varphi_{II} = \varphi_{II}^{(1)} + \varphi_{II}^{(2)} = 3\varphi_1 + \varphi_2. \end{cases}$$

Zależność (f) jest ilustracją faktu, że kinematyka układu o dwóch stopniach swobody jest kombinacją liniową dwóch mechanizmów składowych, określonych przez dwa kąty obrotu  $\varphi_I$  i  $\varphi_{II}$ .

Kąty obrotu układu tarcz sztywnych, tworzących mechanizm o jednym stopniu swobody (tzw. łańcuch kinematyczny), można również wyznaczyć analitycznie, bez uciekania się do wyznaczania biegunów obrotu poszczególnych tarcz.

Dla ilustracji sposobu analitycznego rozważymy układ trzech tarcz sztywnych o jednym stopniu swobody, przedstawiony na rys. 14.15d. Idea tego sposobu polega na wykorzystaniu równań sumy rzutów przemieszczeń na osie układu współrzędnych  $x, y$ . Składowe przemieszczenia punktu  $D$  – stosownie do wzoru (14.22) – wynoszą:

$$(g) \quad \begin{cases} \Delta_{Dx} = \sum \Delta_x = l_{1y} \cdot \varphi_I + l_{2y} \cdot \varphi_{II} + l_{3y} \cdot \varphi_{III}, \\ \Delta_{Dy} = \sum \Delta_y = -l_{1x} \cdot \varphi_I - l_{2x} \cdot \varphi_{II} - l_{3x} \cdot \varphi_{III}. \end{cases}$$

Należy zwrócić uwagę, że dodatnie kąty  $\varphi_I, \varphi_{II}$  i  $\varphi_{III}$  odpowiadają tutaj obrotowi zgodnemu z kierunkiem ruchu wskazówek zegara, a znaki rzutów długości prętów  $l_{ix}, l_{iy}$  traktuje się jako składowe wektorów  $AB, BC$  i  $CD$ , czyli:

$$(h) \quad \begin{cases} l_{ix} = l_i \cdot \cos \alpha_i, \\ l_{iy} = l_i \cdot \sin \alpha_i. \end{cases}$$

Ponieważ punkt  $D$  jest nieruchomy, więc  $\Delta_{Dx} = \Delta_{Dy} = 0$ , a zależności (g) tworzą układ dwóch równań jednorodnych o trzech niewiadomych  $\varphi_I, \varphi_{II}$  i  $\varphi_{III}$ :

$$(i) \quad \begin{cases} l_{1y} \cdot \varphi_I + l_{2y} \cdot \varphi_{II} + l_{3y} \cdot \varphi_{III} = 0, \\ l_{1x} \cdot \varphi_I + l_{2x} \cdot \varphi_{II} + l_{3x} \cdot \varphi_{III} = 0. \end{cases}$$

Z układu tego można wyznaczyć stosunki niewiadomych kątów. Przyjawszy przykładowo, że  $t_2 = \varphi_{II}/\varphi_I$  oraz  $t_3 = \varphi_{III}/\varphi_I$ , otrzymujemy dwa równania o dwóch niewiadomych  $t_2$  i  $t_3$ :

$$(j) \quad \begin{cases} l_{2y} \cdot t_2 + l_{3y} \cdot t_3 = -l_{1y}, \\ l_{2x} \cdot t_2 + l_{3x} \cdot t_3 = -l_{1x}, \end{cases}$$

stąd

$$\varphi_{II} = t_2 \cdot \varphi_I = \frac{l_{1x}l_{3y} - l_{1y}l_{3x}}{l_{2y}l_{3x} - l_{2x}l_{3y}} \cdot \varphi_I,$$

$$\varphi_{III} = t_3 \cdot \varphi_I = \frac{l_{1y}l_{2x} - l_{1x}l_{2y}}{l_{2y}l_{3x} - l_{2x}l_{3y}} \cdot \varphi_I.$$

Dalsze zastosowania sposobu analitycznego pokażemy na przykładach łańcuchów kinematycznych podanych na rys. 14.15b, c.

Dla układu z rys. 14.15b mamy:

$$\Delta_{Cx} = 3l\varphi_I^{(1)} - l\varphi_{II}^{(1)} = 0,$$

$$\Delta_{Cy} = -l \cdot \varphi_I^{(1)} - 2l \cdot \varphi_{II}^{(1)} = \Delta_C.$$

Z pierwszego równania otrzymujemy, że  $3\varphi_I^{(1)} = \varphi_{II}^{(1)}$ , co pokrywa się z wynikiem uzyskanym wcześniej. Drugie równanie wyraża jedynie związek między wartościami kątów  $\varphi_I^{(1)}$  i  $\varphi_{II}^{(1)}$  a przemieszczeniem  $\Delta_C$ .

Dla układu z rysunku 14.15c mamy:

$$\Delta_{Cx} = -\Delta_A + 3l\varphi_I^{(2)} - l\varphi_{II}^{(2)} = 0,$$

$$\Delta_{Cy} = -l\varphi_I^{(2)} - 2l\varphi_{II}^{(2)} = 0.$$

Interesująca nas zależność pomiędzy kątami  $\varphi_I^{(2)}$  a  $\varphi_{II}^{(2)}$  wynika z drugiego równania:  $\varphi_I^{(2)} = -2\varphi_{II}^{(2)}$ . Wynik ten jest identyczny z wynikiem uzyskanym za pomocą planu biegunów.

### 14.10.3. Warunek statycznej wyznaczalności i równowaga układu tarcz sztywnych

Statyczna wyznaczalność w przypadku układu tarcz sztywnych oznacza, że reakcje wszystkich więzów (tj. prętów podporowych i prętów łączących tarcze) można obliczyć wyłącznie z równań równowagi. Dla każdej tarczy można ułożyć trzy równania równowagi. Wobec tego liczba składowych reakcji (liczba prętów) w układzie wyznaczalnym wynosi  $3t$ . Wyróżnimy trzy przypadki:

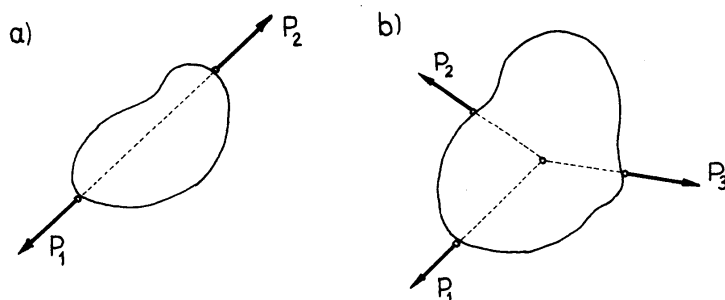
- 1) gdy  $p < 3t$ , układ równań statyki jest sprzeczny,
- 2) gdy  $p = 3t$ , układ jest statycznie wyznaczalny,
- 3) gdy  $p > 3t$ , układ jest statycznie niewyznaczalny.

Z powyższego wynika silny związek statyki z kinematyką. Przypadek 1) odpowiada układom geometrycznie zmiennym, przypadek 2) – geometrycznie niezmiennym, a przypadek 3) – układom przesztynionym. W statyce konstrukcji liczba  $n = p - 3t$  nazywa się stopniem statycznej niewyznaczalności układu. Liczba ta jest odpowiednikiem stopnia przesztynienia w kinematyce konstrukcyjnej. Należy dodać, że warunek  $p = 3t$  jest tylko **warunkiem koniecznym** statycznej wyznaczalności. Warunek ten mówi, że liczba równań równowagi jest równa liczbie niewiadomych reakcji (sił w prętach). Może się okazać, że wyznacznik układu równań równowagi jest równy zeru i wówczas nie ma jednoznacznego rozwiązania. Ten szczególny przypadek odpowiada układom geometrycznie zmiennym (por. rys. 14.13b, i rys. 14.14c, d). Badanie wartości wyznacznika równań równowagi jest więc metodą pozwalającą **zidentyfikować układy geometrycznie zmienne**. Wyjaśnienie pochodzenia tej metody oraz sposobu powiązania statyki z kinematyką układów zawiera p. 14.10.4.

Jeżeli  $p > 3t$ , to dla tarcz idealnie sztywnych nie można wyznaczyć reakcji więzów. Możliwość taka pojawia się dopiero po odstąpieniu od założenia o idealnej sztywności tarcz.

Podczas badania równowagi warto pamiętać o tym, że jeżeli na układ tarcz działają:

- tylko dwie siły, to równowaga zachodzi wtedy, gdy linie działania tych sił pokrywają się, wartości są równe a zwroty przeciwne (rys. 14.16a),
- tylko trzy siły, to równowaga zachodzi wtedy, gdy linie działania tych sił przecinają się w jednym punkcie (rys. 14.16b).



Rys. 14.16

#### 14.10.4. Warunek dostateczny geometrycznej niezmienności układu ciał idealnie sztywnych

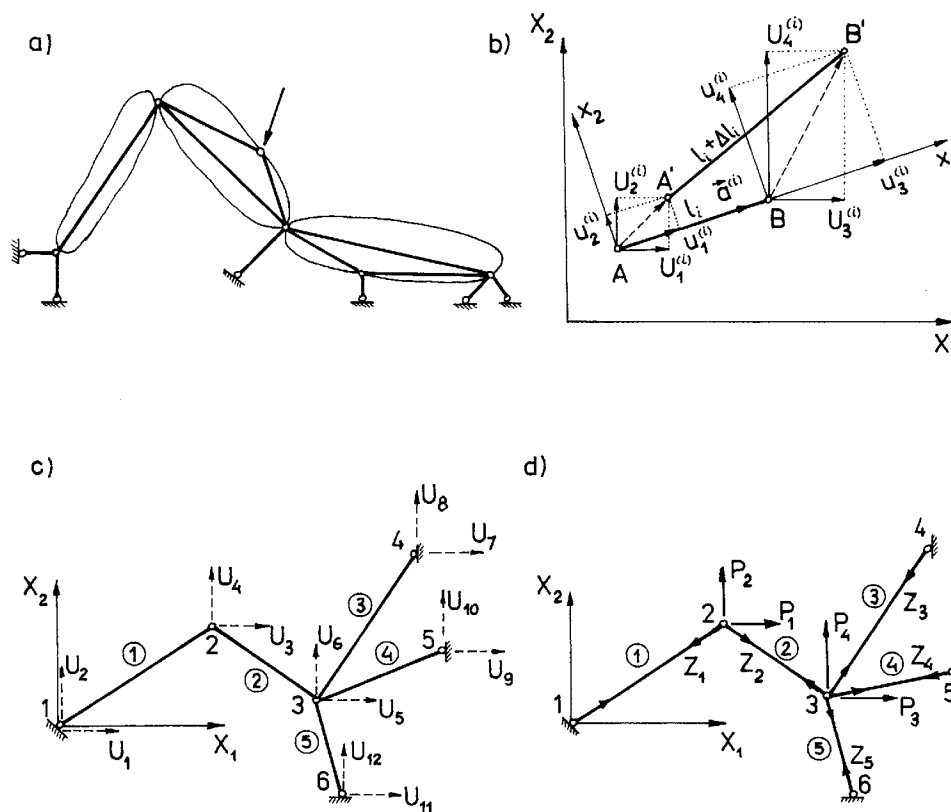
Ruch układu ciał sztywnych następuje wskutek niewystarczającej liczby lub niewłaściwego rozmieszczenia prętów podporowych. Rozważmy płaski układ idealnie sztywnych prętów połączonych ze sobą węzłami przegubowymi (kratownica). Przyjmijmy ponadto, że siły zewnętrzne obciążające układ działają wyłącznie w węzłach (rys. 14.17a). Za pomocą takiego modelu można również analizować dowolny układ tarcz sztywnych. Zakłada się przy tym, że węzły przegubowe występują dodatkowo w punktach przyłożenia sił zewnętrznych.

Ponieważ do unieruchomienia węzła na płaszczyźnie niezbędne są co najmniej dwa pręty, zatem warunek konieczny geometrycznej niezmienności rozważanych układów ma postać:

$$(a) \quad p \geq 2w,$$

gdzie  $p$  jest liczbą prętów a  $w$  – liczbą węzłów wewnętrznych (ruchomych, tzn. węzłów niepodporowych). Jeżeli  $p > 2w$ , to układ jest przesztyniony, a stopień przesztynienia takiego układu  $n = p - 2w$ .

Układ prętów jest geometrycznie niezmienny, jeżeli przemieszczeniu węzłów towarzyszą zmiany długości przynajmniej niektórych prętów. Inaczej mówiąc, zerowym wydłużeniom (skróceniom) prętów muszą odpowiadać tylko zerowe wartości przemieszczeń wszystkich węzłów. Jest to słowne sformułowanie **dostatecznego warunku** geometrycznej niezmienności.



Rys. 14.17

Zależności między przemieszczeniami węzłów a wydłużeniem pręta ustalimy na podstawie rys. 14.17b. W konfiguracji pierwotnej punkt  $A$  oznacza początek a punkt  $B$  koniec pręta o długości  $l_i$ . Oś pręta ma zatem zwrot zgodny z wektorem  $AB$ . Po odkształceniu punkt  $A$  zajmie położenie  $A'$ , a punkt  $B$  położenie  $B'$ . W układzie współrzędnych lokalnych  $x_1, x_2$  składowe wektorów przemieszczenia punktów  $A$  i  $B$  oznaczmy odpowiednio przez  $u_1^{(i)}, u_2^{(i)}$  i  $u_3^{(i)}, u_4^{(i)}$ . Położenie pręta względem globalnego układu współrzędnych  $X_1, X_2$  jest określone przez wartości kosinusów kierunkowych wektora jednostkowego  $\mathbf{a}^{(i)}$  którego zwrot jest zgodny ze zwrotem wektora  $AB$ :

$$(b) \quad \begin{cases} \mathbf{a}^{(i)} = (a_1^{(i)}, a_2^{(i)}), \\ a_1^{(i)} = \cos(a^{(i)}, X_1), \\ a_2^{(i)} = \cos(a^{(i)}, X_2). \end{cases}$$

Składowe wektorów przemieszczenia punktów  $A$  i  $B$  w globalnym układzie współrzędnych są oznaczone odpowiednio przez  $U_1^{(i)}, U_2^{(i)}$  i  $U_3^{(i)}, U_4^{(i)}$ .

Długość pręta po odkształceniu obliczymy ze wzoru *Pitagorasa*:

$$(c) \quad \begin{aligned} l_i + \Delta l_i &= \sqrt{\left(l_i + u_3^{(i)} - u_1^{(i)}\right)^2 + \left(u_4^{(i)} - u_2^{(i)}\right)^2} = \\ &= l_i \sqrt{1 + 2 \frac{u_3^{(i)} - u_1^{(i)}}{l_i} + \frac{\left(u_3^{(i)} - u_1^{(i)}\right)^2 + \left(u_4^{(i)} - u_2^{(i)}\right)^2}{l_i^2}}. \end{aligned}$$

Jeżeli przemieszczenia są bardzo małe w porównaniu z długością pręta, to uzasadnione jest uwzględnienie jedynie przyrostu długości jako liniowej funkcji składowych wektorów przemieszczeń:

$$l_i + \Delta l_i = l_i \sqrt{1 + 2 \frac{u_3^{(i)} - u_1^{(i)}}{l_i}} = l_i + u_3^{(i)} - u_1^{(i)},$$

skąd

$$(d) \quad \Delta l_i = u_3^{(i)} - u_1^{(i)}.$$

Wzór (d) wiąże przyrost długości pręta  $i$  z przemieszczeniami odmierzanymi w lokalnym układzie współrzędnych  $x_1, x_2$ . Ponieważ

$$(e) \quad \begin{cases} u_1^{(i)} = U_1^{(i)} a_1^{(i)} + U_2^{(i)} a_2^{(i)}, \\ u_3^{(i)} = U_3^{(i)} a_1^{(i)} + U_4^{(i)} a_2^{(i)}, \end{cases}$$

więc

$$(f) \quad \Delta l_i = \left(U_3^{(i)} - U_1^{(i)}\right) a_1^{(i)} + \left(U_4^{(i)} - U_2^{(i)}\right) a_2^{(i)}.$$

Wzór (f) pozwala obliczyć przyrost długości pręta, jeżeli są znane przemieszczenia węzłów odmierzone w układzie globalnym  $X_1, X_2$ . Obliczymy zatem wydłużenia prętów układu przedstawionego na rys. 14.17c. Numery prętów zapisano w kółkach, a zwrot ich osi odpowiada numeracji węzłów; niższy numer oznacza początek danego pręta. Ponieważ układ składa się z pięciu prętów, a liczba węzłów wewnętrznych wynosi dwa, zatem stopień przeszywnienia układu wynosi  $n = 1$ . Uwzględniając, że  $U_1 = U_2 = U_7 = U_8 = U_9 = U_{10} = U_{11} = U_{12} = 0$ , ze wzoru (f) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} U_3 a_1^{(1)} + U_4 a_2^{(1)} &= \Delta l_1, \\ (U_5 - U_3) a_1^{(2)} + (U_6 - U_4) a_2^{(2)} &= \Delta l_2, \\ -U_5 a_1^{(3)} - U_6 a_2^{(3)} &= \Delta l_3, \\ -U_5 a_1^{(4)} - U_6 a_2^{(4)} &= \Delta l_4, \\ -U_5 a_1^{(5)} - U_6 a_2^{(5)} &= \Delta l_5. \end{aligned}$$

Równania powyższe można zapisać w postaci macierzowej:

$$(g) \quad [C_{jk}] \cdot \{U_k\} = \{\Delta l_j\},$$

gdzie  $\{U_k\} = \{U_3, U_4, U_5, U_6\}$  jest wektorem przemieszczeń węzłów wewnętrznych,

$\{\Delta l_j\} = \{\Delta l_1, \Delta l_2, \Delta l_3, \Delta l_4, \Delta l_5\}$  jest wektorem wydłużeń prętów, a

$$(h) \quad [C_{jk}] = \begin{bmatrix} a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & 0 & 0 \\ -a_1^{(2)} & -a_2^{(2)} & a_1^{(2)} & a_2^{(2)} \\ 0 & 0 & -a_1^{(3)} & -a_2^{(3)} \\ 0 & 0 & -a_1^{(4)} & -a_2^{(4)} \\ 0 & 0 & -a_1^{(5)} & -a_2^{(5)} \end{bmatrix}$$

Macierz  $[C_{jk}]$  nazywa się macierzą zgodności geometrycznej. Liczba wierszy tej macierzy jest równa liczbie prętów ( $j = 1, 2, \dots, p$ ), zaś liczba kolumn jest równa liczbie stopni swobody węzłów wewnętrznych,  $s = 2w$  ( $k = 1, 2, \dots, a$ ).

Jak stwierdziliśmy wyżej, warunkiem geometrycznej niezmienności układu jest wymaganie, by zerowym wydłużeniom prętów odpowiadały zerowe wartości przemieszczeń węzłów wewnętrznych. Oznacza to, że w konstrukcjach geometrycznie niezmiennych układ równań jednorodnych,

$$(i) \quad [C_{jk}] \cdot \{U_k\} = 0,$$

może mieć tylko rozwiązanie zerowe, czyli  $\{U_k\} = 0$ . Stosownie do twierdzenia *Sylvestra* zachodzi to wówczas, gdy **rzęd macierzy**  $[C_{jk}]$ , czyli liczba liniowo niezależnych kolumn, jest równa **liczbie stopni swobody**:

$$(j) \quad \text{rz } [C_{jk}] = s.$$

Jeżeli

$$(k) \quad \text{rz } [C_{jk}] < s,$$

to konstrukcja jest geometrycznie zmienna. Przedstawione wyżej kryteria dotyczące problemu geometrycznej niezmienności konstrukcji są opisane szczegółowo w pracy [25].

Usytuowanie prętów tworzących konstrukcję z rys. 14.17c gwarantuje geometryczną niezmienną układu. Jeżeli jednak dla przykładu węzły 1, 2 i 3 leżałyby na jednej prostej, to otrzymalibyśmy układ chwilowo geometrycznie zmienny, bo węzeł 2 może wówczas ulec niewielkiemu przemieszczeniu bez zmiany długości prętów 1 i 2. Sytuacja taka zachodzi, gdy  $a_1^{(1)} = a_1^{(2)}$  oraz  $a_2^{(1)} = a_2^{(2)}$ . Wtedy z zależności

(h) widać, że rząd macierzy  $[C_{jk}]$  zmniejsza się o jedność, gdyż dwie pierwsze kolumny tej macierzy są proporcjonalne (tzn. liniowo zależne). Wobec powyższego

$$\text{rz } [C_{jk}] = 3 < s = 4.$$

Gdy  $p = 2w$ , macierz geometrycznej zgodności  $[C_{jk}]$  jest macierzą kwadratową, a badanie geometrycznej niezmienności konstrukcji sprowadza się do badania wartości wyznacznika tej macierzy. Układ równań (i) ma rozwiązanie trywialne (tj. zerowe) tylko wówczas, gdy wyznacznik tego układu jest różny od zera. Wobec powyższego warunek dostateczny geometrycznej niezmienności ma postać:

$$(l) \quad \det [C_{jk}] \neq 0.$$

Rozważymy obecnie równowagę układu prętów połączonych przegubami. Przyjmijmy, że konstrukcję z rys. 14.17c obciążono siłami przyłożonymi w węzłach wewnętrznych 2 i 3. Pod wpływem tych obciążeń w poszczególnych prętach wystąpiły siły osiowe  $Z_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 5$ ). Sytuację tę objaśnia rys. 14.17d. Z równowagi węzłów 2 i 3 wynikają następujące równania:

$$P_1 = Z_1 a_1^{(1)} - Z_2 a_1^{(2)},$$

$$P_2 = Z_1 a_2^{(1)} - Z_2 a_2^{(2)},$$

$$P_3 = Z_2 a_1^{(2)} - Z_3 a_1^{(3)} - Z_4 a_1^{(4)} - Z_5 a_1^{(5)},$$

$$P_4 = Z_2 a_2^{(2)} - Z_3 a_2^{(3)} - Z_4 a_2^{(4)} - Z_5 a_2^{(5)}.$$

Powyższe równania można zapisać w postaci macierzowej:

$$(m) \quad \{P_k\} = [D_{kj}] \cdot \{Z_j\},$$

gdzie  $\{Z_j\} = \{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5\}$  jest wektorem sił wewnętrznych w prętach,  $\{P_k\} = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$  jest wektorem sił węzłowych, a

$$(n) \quad [D_{kj}] = \begin{bmatrix} a_1^{(1)} & -a_1^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ a_2^{(1)} & -a_2^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1^{(2)} & -a_1^{(3)} & -a_1^{(4)} & -a_1^{(5)} \\ 0 & a_2^{(2)} & -a_2^{(3)} & -a_2^{(4)} & -a_2^{(5)} \end{bmatrix}.$$

Macierz  $[D_{kj}]$  jest **macierzą układu równań równowagi**. Liczba wierszy tej macierzy równa się  $2w$ , a liczba kolumn jest równa liczbie prętów  $p$ . Nietrudno zauważyć, że macierz  $[D_{kj}]$  jest równa transponowanej macierzy geometrycznej zgodności  $[C_{jk}]$

$$(o) \quad [D_{kj}] = [C_{jk}]^T.$$

Nie jest to przypadek, gdyż zależność (o) obowiązuje zawsze, niezależnie od rodzaju materiału, jeśli tylko przemieszczenia konstrukcji są na tyle małe, że słuszna jest zasada zeszytnienia. Stwierdzenie powyższe wynika z równania pracy wirtualnej:

$$(p) \quad \sum_{k=1}^s P_k \cdot U_k = \sum_{j=1}^p Z_j \cdot \Delta l_j.$$

Podstawiawszy bowiem zależności (i) oraz (m) otrzymujemy:

$$\sum_{k=1}^s \left( \sum_{j=1}^p D_{kj} \cdot Z_j \right) \cdot U_k = \sum_{j=1}^p Z_j \left( \sum_{k=1}^s C_{jk} \cdot U_k \right).$$

Wynika stąd, że między elementami macierzy  $[C_{jk}]$  i  $[D_{kj}]$  zachodzi zależność  $[C_{jk}] = [D_{kj}]$ , równoważna równaniu (o).

W układach statycznie wyznaczalnych liczba prętów jest równa podwojonej liczbie węzłów  $2w$ , bo dla każdego węzła można ułożyć dwa równania równowagi.

W układach tych macierz zgodności geometrycznej  $[C_{jk}]$  jest macierzą kwadratową, gdyż  $p = 2w - s$ . Zatem stosownie do zależności (l) warunkiem dostatecznym geometrycznej niezmienności jest wymaganie, by  $\det [C_{jk}] \neq 0$ , równoważne wymaganiu:  $\det [C_{jk}]^T = \det [D_{kj}] \neq 0$ . Wynika stąd słuszność metody identyfikowania układów geometrycznie zmiennych, polegającej na badaniu wartości wyznacznika układu równań równowagi.

Na zakończenie zwróćmy uwagę, że w przeprowadzonych wyżej rozważaniach podstawowe znaczenie mają zależności (g) i (m). Okazuje się, że zależności te są szczególnym przypadkiem postaci związków geometrycznych i równań równowagi dla układów dyskretnych:

$$(r) \quad \{e_j\} = [C_{jk}] \cdot \{d_k\},$$

$$(s) \quad \{P_k\} = [C_{jk}] \cdot \{Y_j\}.$$

W równaniach (r) symbole  $\{e_j\}$  oraz  $\{d_k\}$  oznaczają odpowiednio wektory uogólnionych odkształceń i przemieszczeń. W równaniach (s) przez  $\{P_k\}$  oznaczono wektor obciążeń węzłowych, a przez  $\{Y_j\}$  wek-

tor uogólnionych naprężeń. Prostokątna macierz  $[C_{jk}] = \mathbf{C}$ , występująca w obu równaniach, jest macierzą zgodności geometrycznej. Równania (r) i (s) można zapisać w nieco ogólniejszej, równoważnej postaci:

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \mathbf{C} \mathbf{d}, \\ p \times 1 \quad p \times s \quad s \times 1 \end{aligned} \quad (14.25)$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{C}^T \mathbf{Y},$$

$$s \times 1 \quad s \times p \quad p \times 1$$

gdzie  $\mathbf{e} = \{e_j\}$ ,  $\mathbf{d} = \{d_k\}$ ,  $\mathbf{P} = \{P_k\}$ ,  $\mathbf{Y} = \{Y_j\}$ ,  $\mathbf{C} = [C_{jk}]$ ,  $T$  oznacza operator transpozycji, a pod symbolami macierzy podano ich wymiary. Liczba  $p$  oznacza tutaj liczbę składowych uogólnionych naprężeń (lub odkształceń), a liczba  $s$  liczbę uogólnionych przemieszczeń (lub obciążeń). Zależności (14.25) ilustrują dualizm mechaniki: *macierz geometrycznej zgodności jest transpozycją macierzy równowagi*. Ten fascynujący związek kinematyki i statyki uzasadnił *Sewell* dopiero w 1969 roku. Warto pamiętać, że zależności (14.25) zostały wyprowadzone dla konstrukcji wykonanych z dowolnego materiału, wykazujących małe przemieszczenia. Dodajmy, że podobne pokrewieństwo równań równowagi i równań geometrycznych można wykazać również dla ośrodka ciągłego.

## 14.11. RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE RÓWNOWAGI PRĘTÓW

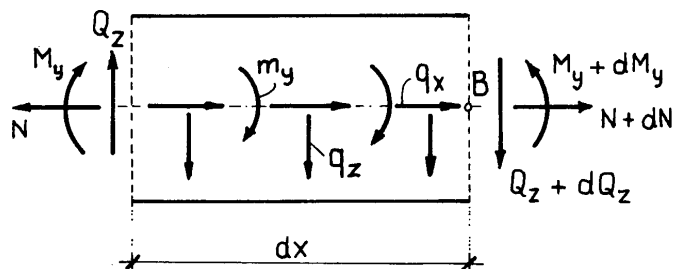
### 14.11.1. Pręty o osi prostoliniowej

Równania różniczkowe równowagi prętów zostały już wprowadzone w części drugiej. Stanowią one – jak wiadomo – odpowiedniki równań różniczkowych równowagi w ośrodku ciągłym. Są to zależności między uogólnionymi naprężeniami a obciążeniem pręta. Równania te mają charakter ogólny i bardzo często wykorzystuje się je podczas rozwiązywania konkretnych zadań z mechaniki układów prętowych.

Rozważania ograniczymy tylko do płaskiego układu sił przy założeniu zasady zeszytywnienia.

Rozpatrzmy równowagę nieskończenie małego odcinka pręta o długości  $dx$  (rys. 14.18):

$$\begin{aligned} (a) \quad \sum P_x &= N + dN - N + q_x dx = 0, \\ (b) \quad \sum P_z &= Q_z + dQ_z - Q_z + q_z dx = 0, \\ (c) \quad \sum M_B &= M_y + dM_y - M_y - Q_z dx - m_y dx + \frac{1}{2} q_z (dx)^2 = 0. \end{aligned}$$



Rys. 13.18

Po redukcji wyrazów podobnych oraz pominięciu w równaniu (c) składnika  $q_z(dx)^2/2$  jako małej wielkości wyższego rzędu otrzymujemy:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN}{dx} &= -q_x(x), \\ \frac{dQ_z}{dx} &= -q_z(x), \\ \frac{dM_y}{dx} - Q_z(x) &= m_y(x). \end{aligned} \right\} \quad (14.26)$$

W praktyce  $m_y(x)$  występuje niezmiernie rzadko. Po przyjęciu, że  $m_y(x) \equiv 0$ , równanie (14.26)<sub>3</sub> przybiera postać:

$$\frac{dM_y}{dx} - Q_z(x) = 0. \quad (14.26a)$$

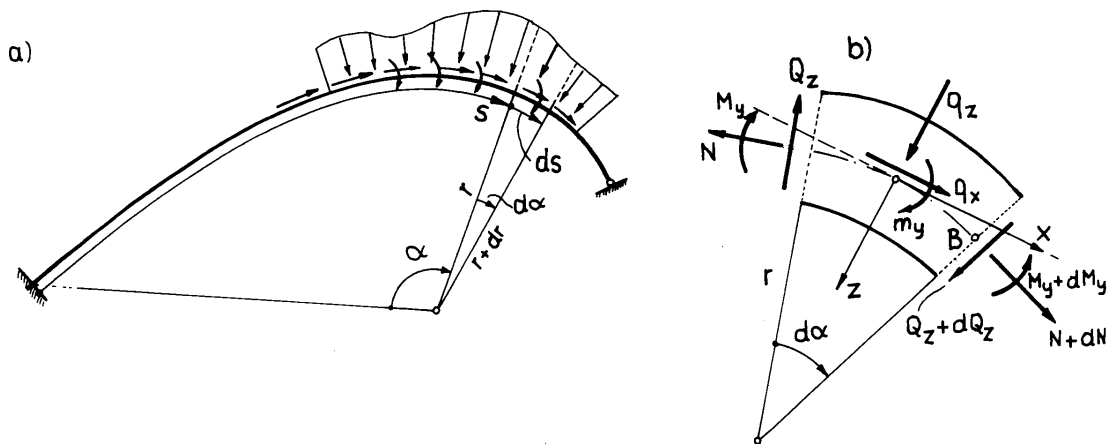
Równania (14.26) są poszukiwanymi równaniami różniczkowymi równowagi pręta prostoliniowego. Na podstawie równań (14.26)<sub>2</sub> i (14.26a) otrzymujemy często wykorzystywany związek między obciążeniem pręta  $q_z(x)$  a momentem zginającym  $M_y(x)$ :

$$\frac{d^2 M_y}{dx^2} = -q_z(x). \quad (14.27)$$

#### 14.11.2. Pręty o osi zakrzywionej

Rozważmy pręt przedstawiony na rys.14.9. Równania równowagi ułożone dla elementarnego odcinka tego pręta o długości  $ds$  prowadzą do następujących związków ( $\cos(d\alpha) \approx 1$ ,  $\sin(d\alpha) \approx \alpha$ ):

$$\begin{aligned} \sum P_x &= N + dN - N - Q_z d\alpha + q_x ds = 0, \\ \sum P_z &= Q_z + dQ_z - Q_z + N \cdot d\alpha + q_z ds = 0, \\ \sum M_B &= M_y + dM_y - M_y - Q_z ds - m_y ds + \frac{1}{2} q_z (ds)^2 = 0. \end{aligned}$$



Rys. 14.19

Po redukcji wyrazów podobnych i odrzuceniu bardzo małych wielkości otrzymujemy poszukiwane równania różniczkowe równowagi dla pręta o osi zakrzywionej:

$$\begin{aligned}\frac{dN}{ds} - \frac{Q_z}{r} &= -q_x(s), \\ \frac{dQ_z}{ds} + \frac{N}{r} &= -q_z(s), \\ \frac{dM_y}{ds} - Q_z(s) &= m_y(s).\end{aligned}\tag{14.28}$$

W przypadku, gdy  $r \rightarrow \infty$  i  $ds \rightarrow dx$  powyższe równania przechodzą w równania (14.26) dla pręta o osi prostoliniowej.