



## WYBRANE PROBLEMY NIELINIOWE I NIESPRĘŻYSTE

### WPROWADZENIE

Mechanika nieliniowa zajmuje się problemami, w których zależności między naprężeniami lub siłami a wielkościami kinematycznymi są nieliniowe. Rozróżniamy dwa zasadnicze rodzaje nieliniowości: kinematyczną (tj. geometryczną) i fizyczną.

*Nieliniowość kinematyczna* pojawia się wtedy, gdy rozważany obiekt wykazuje duże odkształcenia albo duże przemieszczenia, albo duże odkształcenia i duże przemieszczenia jednocześnie (np. konstrukcje ciągnowe, pneumatyczne).

*Nieliniowość fizyczna* wynika z fizycznych własności materiału lub konstrukcji i objawia się wówczas, gdy związki konstytutywne są nieliniowe. Są to np. materiały nieliniowo-sprężyste lub plastyczne. Szczególnego typu nieliniowość fizyczną w zakresie małych przemieszczeń wykazują również konstrukcje wykonane z materiału liniowo-sprężystego, ale nie spełniające postulatów *Clapeyrona*. Mamy tu na myśli tzw. konstrukcje luzowe, czyli konstrukcje wykazujące niewielkie luzy w połączeniach elementów. W skali makro (na poziomie całej konstrukcji) obecność luzów jest przyczyną „zakleszczania się” (ang. *locking*), tzn. wzrostu sztywności w miarę wzrostu obciążenia. Zakleszczanie się oprócz sprężystości i plastyczności, można uważać za kolejny prototyp nieliniowego prawa fizycznego.

Jest oczywiste, że występują również przypadki bardziej złożone, w których rozważany obiekt wykazuje zarówno nieliniowość kinematyczną jak i fizyczną. Dla wszystkich zadań nieliniowych charakterystyczne jest to, że nie obowiązuje zasada superpozycji skutków.

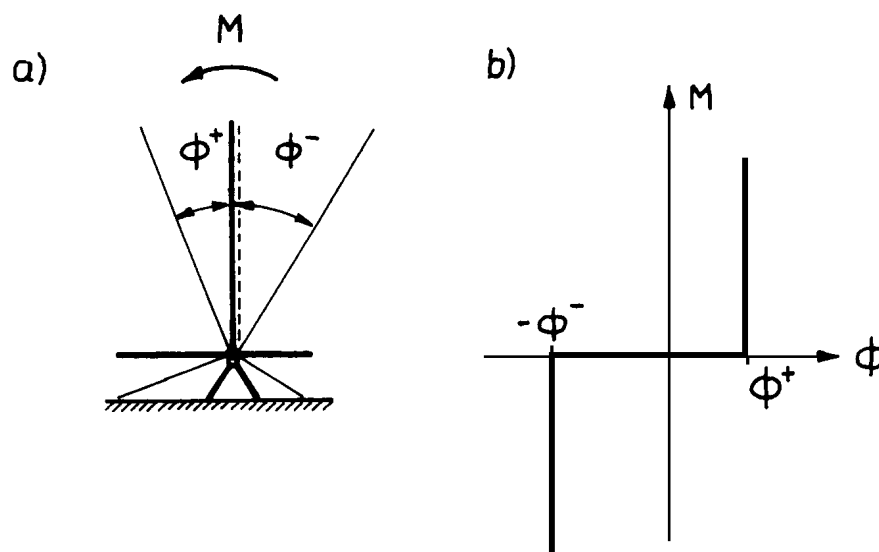
Do konstrukcji niesprężystych zaliczamy takie, których materiał poza cechami sprężystymi wykazuje inne cechy, np. lepkość. Należą do nich konstrukcje (materiały) lepko-sprężyste. Gdy zależność pomiędzy naprężeniem a prędkością odkształceń jest liniowa, to obowiązuje zasada superpozycji względem cykli naprężeń i odkształceń jako funkcji czasu. W odróżnieniu od procesów sprężystych są to jednak procesy, w których obserwujemy dyssypację energii.

W kolejnych rozdziałach tej części podręcznika przedstawimy specyfikę zadań nieliniowych i niesprężystych. Na początku omówimy konstrukcje prętowe wykonane z materiału liniowo-sprężystego wykazujące jednak cechy nieliniowe (w tym konstrukcję luzową). Dalej przedstawimy problematykę prętów wykonanych z materiałów fizycznie nieliniowych lub materiałów wykazujących cechy niesprężyste. Na koniec omówimy problemy stateczności.

## 17. NIELINIOWE ZACHOWANIE SIĘ KONSTRUKCJI WYKONANYCH Z MATERIAŁU LINIOWO-SPRĘŻYSTEGO

### 17.1. RAMA Z LUZAMI KĄTOWYMI NA PODPORACH

Omówimy efekty zastosowania podpory przegubowej z ograniczeniem kąta obrotu. Jest to tzw. *podpora luzowa*. Model takiej podpory ilustruje rysunek 17.1a.



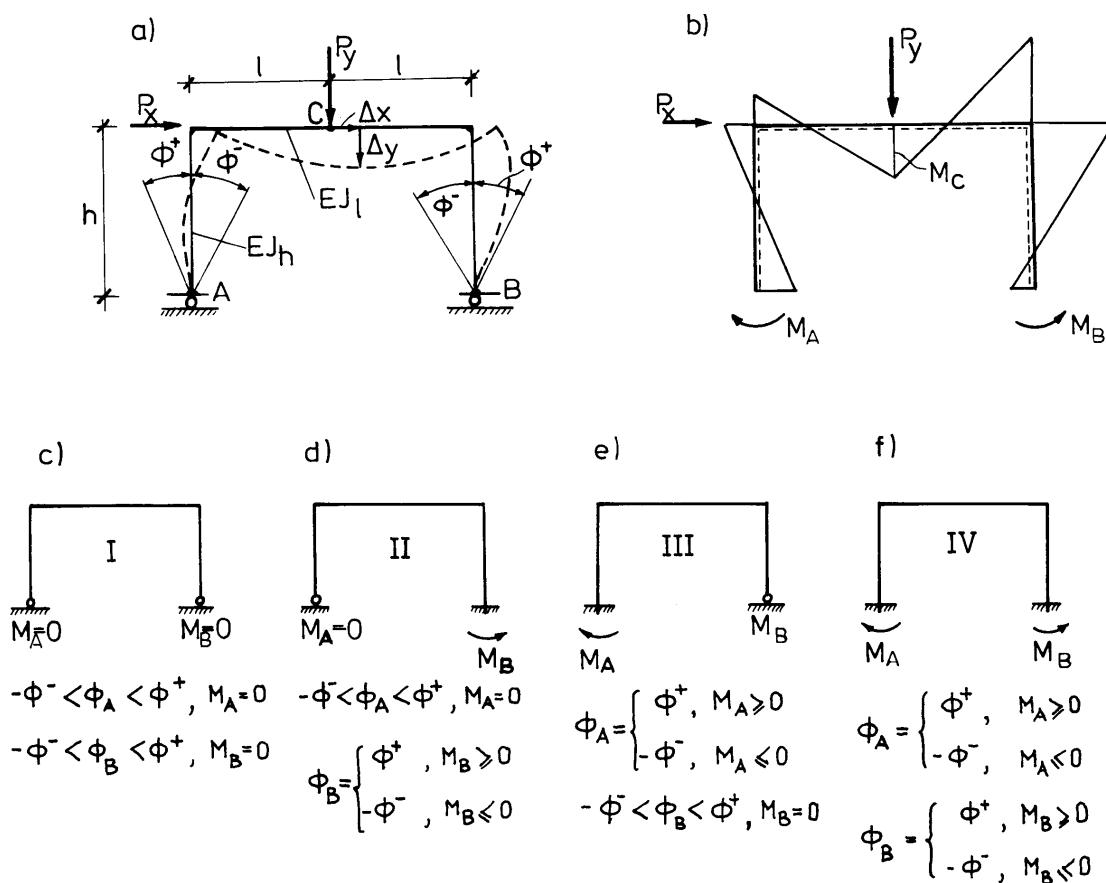
Rys. 17.1

Jeśli kąt obrotu pręta jest zawarty w przedziale  $(-\Phi^-, \Phi^+)$ , to mamy do czynienia ze zwykłą podporą przegubową. Dla wartości granicznych  $\Phi = \Phi^+$  lub  $\Phi = -\Phi^-$  podpora przybiera cechy utwierdzenia<sup>\*)</sup>. Charakterystykę fizyczną takiej podpory przedstawiają rysunek 17.1b oraz zależności (17.1):

$$\left. \begin{aligned} M &= 0, & -\Phi^- < \Phi < \Phi^+, \\ M &\geq 0, & \Phi = \Phi^+, \\ M &\leq 0, & \Phi = -\Phi^- \end{aligned} \right\} \quad (17.1)$$

Zachowanie omawianej podpory jest wobec tego nieliniowe. Zastosowanie podpór luzowych zilustrujemy na przykładzie ramy portalowej wykonanej z materiału liniowo-sprężystego. Całość rozważań odniesiemy do zakresu małych przemieszczeń. Obciążenie ramy stanowią dwie siły:  $P_x = p_x P_0$  oraz  $P_y = p_y P_0$ , przy czym  $p_x$  oraz  $p_y$  są bezwymiarowymi intensywnościami obciążeń, a  $P_0$  oznacza pewną stałą o wymiarze siły. Zadanie objaśnia rys. 17.2a.

<sup>\*)</sup> Problem ten należy do mechaniki układów z więzami jednostronnymi.



Rys. 17.2

Wszystkie możliwe warianty schematów statycznych ramy luzowej przedstawiają rys. 17.2c, d, e, f, przy czym dodatnie zwroty momentów podporowych zaznaczono na rys. 17.2b.

Przyjęcie podpór nieliniowych sprawia, że schemat statyczny ramy zmienia się wskutek narastania obciążeń. Jest to zatem konstrukcja, która nie spełnia postulatów *Clapeyrona*; wykresy *obciążenie - przemieszczenie* są liniami łamanymi, tzn. są nieliniowe. Racjonalne obrócenie wartości kątów  $\Phi^+$  i  $\Phi^-$  daje efekt „dostosowania” się schematu statycznego do intensywności i charakteru obciążenia. Wymienione cechy konstrukcji nie są bez znaczenia dla praktyki projektowej oraz analizy wpływu luzów podporowych na zachowanie się konstrukcji.

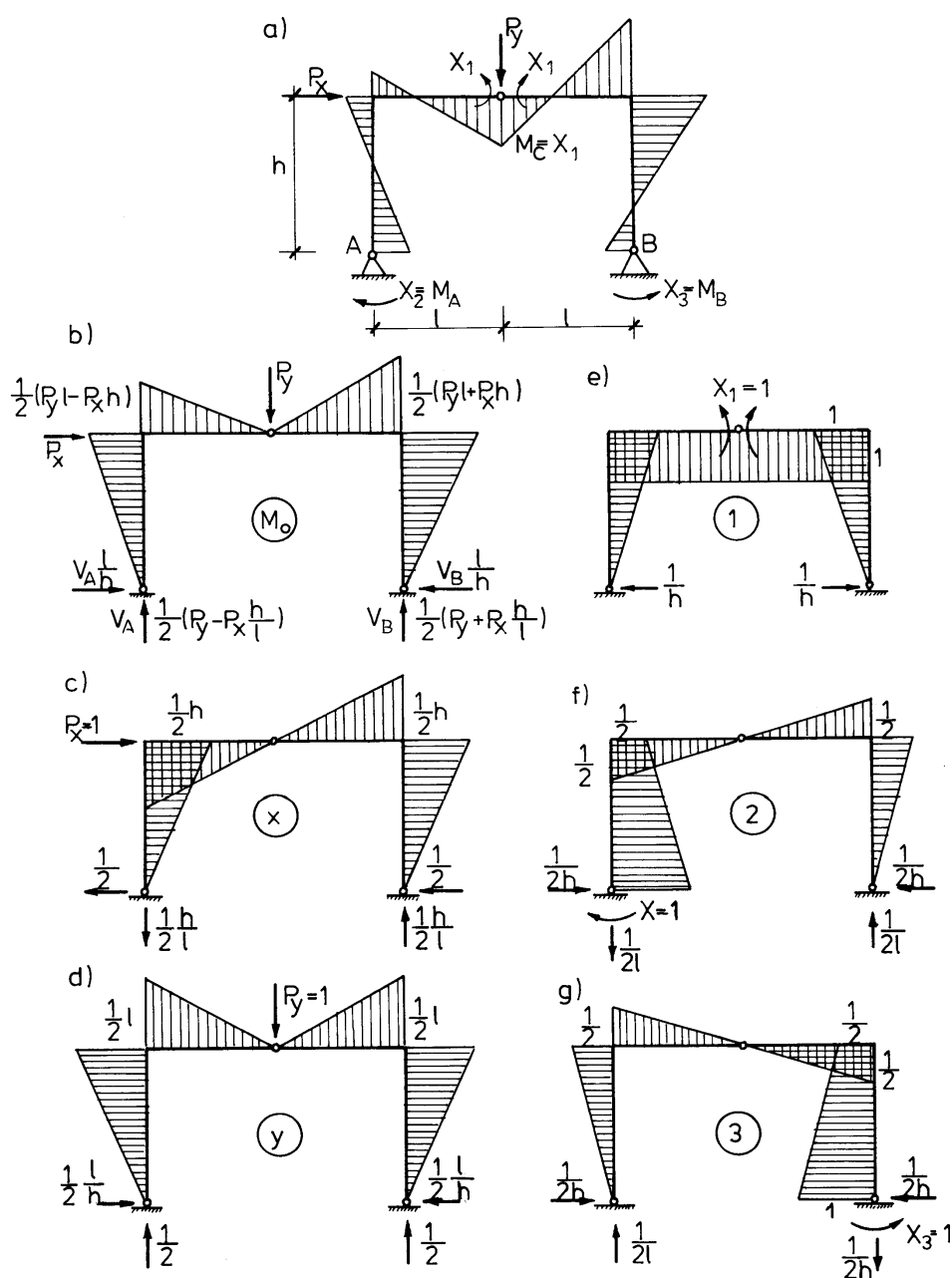
Do obliczenia ramy zastosowano metodę sił. Przy wyznaczaniu przemieszczeń uwzględniono jedynie wpływ zmiany krzywizn osi prętów. Przyjęto, że układ podstawowy jest ramą trójprzegubową (rys. 17.3a), a wszystkie pomocnicze wykresy momentów zginających obrazują kolejne rysunku 17.3. Punktem wyjścia są równania kanoniczne metody sił:

$$(a) \quad \begin{cases} X_1 \Delta_{11} + X_2 \Delta_{12} + X_3 \Delta_{13} = -\Delta_{1p}, \\ X_1 \Delta_{21} + X_2 \Delta_{22} + X_3 \Delta_{23} = -\Delta_{2p}, \\ X_1 \Delta_{31} + X_2 \Delta_{32} + X_3 \Delta_{33} = -\Delta_{3p}, \end{cases}$$

gdzie

(b)

$$\begin{cases}
 EA\Delta_{11} = \frac{2}{3}l(3+n), & EJ\Delta_{12} = EJ\Delta_{13} = \frac{1}{6}ln, \\
 EJ\Delta_{22} = EJ\Delta_{33} = \frac{1}{6}l(1+4n), & EJ\Delta_{23} = -\frac{1}{6}l(1+2n), \\
 EJ\Delta_{1p} = -\frac{1}{6}P_0l^2(3+2n)p_y, \\
 EJ\Delta_{2p} = -\frac{1}{12}P_0l^2\left[n p_y - \frac{h}{l}(2+3n)p_x\right], \\
 EJ\Delta_{3p} = -\frac{1}{12}P_0l^2\left[n p_y + \frac{h}{l}(2+3n)p_x\right], \\
 n = \frac{h}{l} \frac{J_1}{J_h}, \quad \Delta_{ik} = \Delta_{ki}.
 \end{cases}$$



Rys. 17.3

Kąty obrotu na podporach określają zależności

$$(c) \quad \begin{cases} \Phi_A = -(\Delta_{2p} + X_1\Delta_{21} + X_2\Delta_{22} + X_3\Delta_{23}), \\ \Phi_B = -(\Delta_{3p} + X_1\Delta_{31} + X_2\Delta_{32} + X_3\Delta_{33}). \end{cases}$$

O sztywności ramy decydują wartości przemieszczeń  $\Delta_x$  i  $\Delta_y$ . Przemieszczenia te obliczymy ze wzorów:

$$(d) \quad \begin{cases} \Delta_x = \Delta_{x0} + X_1\Delta_{x1} + X_2\Delta_{x2} + X_3\Delta_{x3}, \\ \Delta_y = \Delta_{y0} + X_1\Delta_{y1} + X_2\Delta_{y2} + X_3\Delta_{y3}, \end{cases}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \Delta_{x0} &= \int_s \frac{M_x M_0}{EJ} ds, & \Delta_{y0} &= \int_s \frac{M_y M_0}{EJ} ds, \\ \Delta_{xi} &= \int_s \frac{M_x M_i}{EJ} ds, & \Delta_{yi} &= \int_s \frac{M_y M_i}{EJ} ds; \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Momenty  $M_0$  w układzie podstawowym statycznie wyznaczalnym pochodzą od obciążenia zewnętrznego, a  $M_x$  i  $M_y$  są wywołane odpowiednio siłami  $P_x = 1$  (rys. 17.3c) i  $P_y = 1$  (rys. 17.3d). Po wykonaniu całkowania otrzymujemy:

$$(e) \quad \begin{cases} EJA_{x0} = \frac{1}{6} P_0 l^3 (1+n) \left(\frac{h}{l}\right)^2 p_x; & EJA_{x1} = 0; & EJA_{x2} = -EJA_{x3} = \frac{1}{12} l^2 (2+3n) \left(\frac{h}{l}\right); \\ EJA_{y0} = \frac{1}{6} P_0 l^3 (1+n) p_y; & EJA_{y1} = -\frac{1}{6} P_0 l^2 (3+2n); & EJA_{y2} = EJA_{y3} = -\frac{1}{12} l^2 n. \end{cases}$$

Wzory (c) i (d) są słuszne dla każdego z czterech schematów statycznych przedstawionych na rysunkach 17.2c, d, e, f, pod warunkiem podstawienia odpowiednich wartości momentów nadliczbowych  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$ . Równania kanoniczne (a) po podstawieniu zależności (b) można doprowadzić do postaci:

$$(f) \quad \begin{cases} 4(3+n)X_1 + nX_2 + nX_3 = P_0 l (3+2n) p_y, \\ nX_1 + (1+4n)X_2 - (1+2n)X_3 = \frac{1}{2} P_0 l [np_y - (2+3n)(h/l)p_x], \\ nX_1 - (1+2n)X_2 + (1+4n)X_3 = \frac{1}{2} P_0 l [np_y + (2+3n)(h/l)p_y]. \end{cases}$$

Dla poszczególnych schematów statycznych otrzymujemy następujące rozwiązania tego układu równań:

$$(g) \quad \begin{cases} \text{schemat I} \\ X_1 = P_0 l b_1 \cdot p_y, \quad X_2 = 0, \quad X_3 = 0, \\ \text{schemat II} \\ X_1 = P_0 l (-a_2 \cdot p_x + b_2 \cdot p_y), \quad X_2 = 0, \quad X_3 = P_0 l (c_2 \cdot p_x + d_2 \cdot p_y), \\ \text{schemat III} \\ X_1 = P_0 l (a_2 \cdot p_x + b_2 \cdot p_y), \quad X_2 = P_0 l (-c_2 \cdot p_x + d_2 \cdot p_y), \quad X_3 = 0, \\ \text{schemat IV} \\ X_1 = P_0 l b_3 \cdot p_y, \quad X_2 = P_0 l (-c_3 \cdot p_x + d_3 \cdot p_y), \quad X_3 = P_0 l (c_3 \cdot p_x + d_3 \cdot p_y). \end{cases}$$

gdzie

$$(h) \quad \begin{cases} b_1 = \frac{3+2n}{4(3+n)}, & a_2 = \frac{n(2+3n)}{2(12+52n+15n^2)} \cdot \left(\frac{h}{l}\right), & b_2 = \frac{6+28n+15n^2}{2(12+52n+15n^2)}, \\ c_2 = \frac{2(3+n)(2+3n)}{12+52n+15n^2} \cdot \left(\frac{h}{l}\right), & & d_2 = \frac{3n}{12+52n+15n^2}, \\ b_3 = \frac{2+n}{2(4+n)}, & c_3 = \frac{(2+3n)}{4(1+3n)} \cdot \left(\frac{h}{l}\right), & d_3 = \frac{1}{2(4+n)}. \end{cases}$$

Po uwzględnieniu powyższych zależności w równaniach (c) otrzymujemy wzory na kąty obrotu na podporach w schematach I÷III:

$$(i) \quad \begin{cases} \text{schemat I} \\ \varphi_A = -\alpha_1 \cdot p_x + \beta_1 \cdot p_y, & \varphi_B = \alpha_1 \cdot p_x + \beta_1 \cdot p_y, \\ \text{schemat II} \\ \varphi_A = -\alpha_2 \cdot p_x + \beta_2 \cdot p_y, & \varphi_B = 0, \\ \text{schemat III} \\ \varphi_A = 0, & \varphi_B = \alpha_2 \cdot p_x + \beta_2 \cdot p_y. \end{cases}$$

gdzie:

$$(j) \quad \begin{cases} \varphi_A = \Phi_A \cdot \frac{EJ}{P_0 l^2}, & \varphi_B = \Phi_B \cdot \frac{EJ}{P_0 l^2}, \\ \alpha_1 = \frac{2+3n}{12} \cdot \left(\frac{h}{l}\right), & \beta_1 = \frac{n}{8(3+n)}, \\ \alpha_2 = \frac{n(4+n)(2+3n)}{2(12+52n+15n^2)} \cdot \left(\frac{h}{l}\right), & \beta_2 = \frac{n(j+3n)}{12+52n+15n^2}. \end{cases}$$

Według równań (d) obliczono przemieszczenia  $\Delta_x = \delta_x \cdot \frac{P_0 l^3}{EJ}$  oraz  $\Delta_y = \delta_y \cdot \frac{P_0 l^3}{EJ}$ :

$$(k) \quad \begin{cases} \text{schemat I: } \delta_x = A_1 \cdot p_x; & \delta_y = D_1 \cdot p_y, \\ \text{schemat II: } \delta_x = A_2 \cdot p_x - B_2 \cdot p_y; & \delta_y = -B_2 \cdot p_x + D_2 \cdot p_y, \\ \text{schemat III: } \delta_x = A_2 \cdot p_x + B_2 \cdot p_y; & \delta_y = B_2 \cdot p_x + D_2 \cdot p_y, \\ \text{schemat IV: } \delta_x = A_4 \cdot p_x; & \delta_y = D_4 \cdot p_y, \end{cases}$$

przy czym

$$(l) \quad \begin{cases} A_1 = \frac{j+n}{6} \cdot \left(\frac{h}{l}\right)^2, & D_1 = \frac{3+4n}{24(3+n)}, \\ A_2 = \frac{n(12+14n+3n^2)}{3(12+52n+15n^2)} \cdot \left(\frac{h}{l}\right)^2, & B_2 = \frac{n(2+3n)}{4(12+52n+15n^2)} \cdot \left(\frac{h}{l}\right), \\ A_4 = \frac{n(4+3n)}{24(1+3n)} \cdot \left(\frac{h}{l}\right)^2, & D_2 = \frac{3+16n+15n^2}{6(12+52n+15n^2)}, & D_4 = \frac{1+n}{6(4+n)}. \end{cases}$$

Ustalimy teraz warunki, w których realizują się poszczególne schematy statyczne.

Schemat I, stosownie do rys. 17.2c, realizuje się wówczas, gdy są spełnione nierówności:

$$(m) \quad -\gamma \cdot \varphi_0 < \varphi_A < \varphi_0, \quad -\gamma \cdot \varphi_0 < \varphi_B < \varphi_0,$$

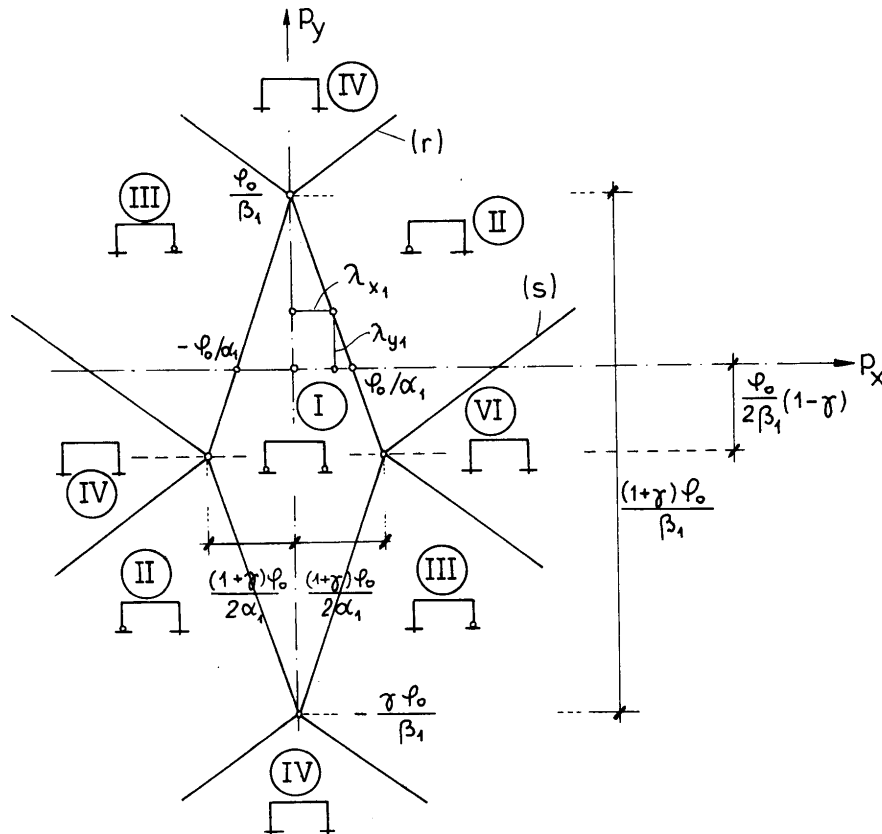
gdzie

$$\varphi_0 = \Phi^+ \cdot \frac{EJ}{P_0 l^2}, \quad \gamma \cdot \varphi_0 = \Phi^- \cdot \frac{EJ}{P_0 l^2}.$$

W nierównościach tych wyrazimy kąty  $\varphi_A$  i  $\varphi_B$  przez parametry obciążeń  $p_x$  i  $p_y$ . Ostatecznie otrzymujemy cztery nierówności:

$$(n) \quad \begin{cases} \frac{p_x}{\left(-\frac{\varphi_0}{\alpha_1}\right)} + \frac{p_y}{\left(\frac{\varphi_0}{\beta_1}\right)} < 1, & \frac{p_x}{\left(\frac{\varphi_0}{\alpha_1}\right)} + \frac{p_y}{\left(\frac{\varphi_0}{\beta_1}\right)} < 1, \\ \frac{p_x}{\left(\gamma \frac{\varphi_0}{\alpha_1}\right)} + \frac{p_y}{\left(-\gamma \frac{\varphi_0}{\beta_1}\right)} < 1, & \frac{p_x}{\left(-\gamma \frac{\varphi_0}{\alpha_1}\right)} + \frac{p_y}{\left(-\gamma \frac{\varphi_0}{\beta_1}\right)} < 1. \end{cases}$$

Granica obszaru wyznaczonego tymi nierównościami jest równoległobokiem zaznaczonym na rys. 17.4, gdzie przyjęto, że  $\gamma > 1$ .



Rys. 17.4

Dla schematu II obowiązują nierówności:

$$(o) \quad \begin{cases} \varphi_A < \varphi_0 \quad ; \quad \varphi_A > -\gamma \cdot \varphi_0, \\ \text{przy czym} \\ \varphi_B = \varphi_0, \quad \text{gdy} \quad M_B \geq 0, \quad \text{lub} \quad \varphi_B = -\gamma \cdot \varphi_0, \quad \text{gdy} \quad M_B \leq 0. \end{cases}$$

Rozważymy najpierw przypadek taki, że  $\varphi_A < \varphi_0$ ,  $\varphi_B = \varphi_0$ . Kąt  $\varphi_A$  jest sumą dwóch wartości  $\varphi_{A1}$  i  $\Delta\varphi_A$ . Wartość  $\varphi_{A1}$  jest kątem obrotu lewej podpory w chwili, gdy kąt  $\varphi_B$  osiąga wartość  $\varphi_0$ . Obciążenia  $p_x$  i  $p_y$  przyjmują wówczas wartości  $p_{x1}$  i  $p_{y1}$  oraz odpowiadają pewnemu punktowi leżącemu na granicy obszaru, w którym realizuje się schemat I (por. rys. 17.4). Wynika stąd, że

$$\begin{aligned} \varphi_{A1} &= -\alpha_1 \cdot p_{x1} + \beta_1 \cdot p_{y1}, \\ \varphi_B = \varphi_0 &= \alpha_1 \cdot p_{x1} + \beta_1 \cdot p_{y1}. \end{aligned}$$

Kąt  $\Delta\varphi_A$  realizuje się już w schemacie II. Wobec tego

$$\varphi_A = \varphi_{A1} + \Delta\varphi_A = -\alpha_1 p_{x1} + \beta_1 p_{y1} - \alpha_2(p_x - p_{x1}) + \beta_2(p_y - p_{y1}) < \varphi_0,$$

skąd

$$-\alpha_2 \cdot p_x + \beta_2 \cdot p_y < \varphi_0 + p_{x1}(\alpha_1 - \alpha_2) - p_{y1}(\beta_1 - \beta_2).$$

Ponieważ  $\varphi_B = \varphi_0$ , więc

$$-\alpha_2 \cdot p_x + \beta_2 \cdot p_y < \frac{2\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1} \cdot \left( \alpha_1 p_{x1} + \frac{\alpha_1 \beta_2}{2\alpha_1 - \alpha_2} \cdot p_{y1} \right).$$

Uwzględnivszy wzory (j) stwierdzamy, że

$$(p) \quad \frac{\alpha_1 \cdot \beta_2}{2\alpha_1 - \alpha_2} = \beta_1,$$

co prowadzi do nierówności:

$$-\alpha_2 \cdot p_x + \beta_2 \cdot p_y < \frac{2\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1} \cdot \varphi_0$$

lub po przekształceniu

$$(r) \quad \frac{p_x}{\left( -\frac{2\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 \cdot \alpha_2} \cdot \varphi_0 \right)} + \frac{p_y}{\left( \frac{\varphi_0}{\beta_1} \right)} < 1.$$

W analogiczny sposób analizujemy drugi przypadek:  $\varphi_A > -\gamma\varphi_0$  oraz  $\varphi_B > \varphi_0$ . Otrzymujemy wtedy nierówność:

$$\varphi_A = \varphi_{A1} + \Delta\varphi_A = -\alpha_1 \cdot p_{x1} + \beta_1 \cdot p_{y1} - \alpha_2(p_x - p_{x1}) + \beta_2(p_y - p_{y1}) > -\gamma\varphi_0,$$

którą można przedstawić w postaci:

$$-\alpha_2 \cdot p_x + \beta_2 \cdot p_y > -\gamma \cdot \varphi_0 + p_{x1}(\alpha_1 - \alpha_2) - p_{y1}(\beta_1 - \beta_2).$$

Ponieważ  $\beta_1 \cdot p_{y1} = \varphi_0 - \alpha_1 \cdot p_{x1}$ , więc

$$-\alpha_2 \cdot p_x + \beta_2 \cdot p_y > -\gamma \cdot \varphi_0 - \varphi_0 + \frac{2\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1} \cdot (\alpha_1 \cdot p_{x1} + \beta_1 \cdot p_{y1}),$$

skąd

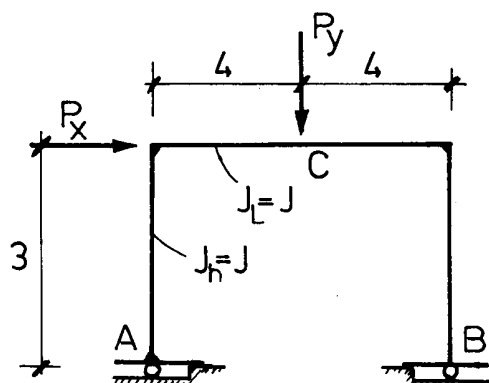
$$-\alpha_2 \cdot p_x + \beta_2 \cdot p_y > -\varphi_0 \left( -\gamma - 1 + 2 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) = \left( 1 - \gamma - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) \varphi_0.$$

Ostatecznie dla  $\gamma > 1 - \alpha_2/\alpha_1$  otrzymujemy:

$$(s) \quad \frac{p_x}{\left( 1 - \gamma - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) \cdot \varphi_0 / \alpha_2} + \frac{p_y}{-\left( 1 - \gamma - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) \cdot \varphi_0 / \beta_2} < 1.$$

Nierówności ( $r$ ) i ( $s$ ) wyznaczają obszar, w którym realizuje się schemat II. Obszar ten oraz wyniki analizy pozostałych przypadków zobrazowano na rys. 17.4.

Efekty ilościowe oraz dalsze efekty jakościowe pokażemy na przykładzie ramy przedstawionej na rys. 17.5.



Rys. 17.5

Pręty ramy są wykonane ze stalowych dwuteowników równoległościennych IPE 200 ( $E = 2 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$ ,  $J = 2770 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$ ). Obciążenia  $P_x$  i  $P_y$  zmieniają się w granicach:

$$-4 \text{ kN} \leq P_x \leq 4 \text{ kN}, \quad 4 \text{ kN} \leq P_y \leq 24 \text{ kN}.$$

Siła  $P_y = 4 \text{ kN}$  symbolizuje obciążenia stałe pochodzące od ciężaru własnego konstrukcji. Jeżeli przyjmujemy, że  $P_0 = 4 \text{ kN}$ , to na płaszczyźnie obciążeń  $p_x$  i  $p_y$  punkt A o współrzędnych  $p_x = 0$  i  $p_y = 1$  odpowiada obciążeniu ciężarem własnym. Dla obciążeń zmiennych mamy:

$$-1 \leq p_x \leq 1, \quad 1 \leq p_y \leq 6.$$

Własności podpór charakteryzują wartości  $\gamma = 0$  oraz  $\varphi_0 = 0,075 \text{ rad}$ . Oznacza to, że kąt  $\Phi^- = 0$ , a kąt

$$\Phi^+ = \varphi_0 \cdot \frac{P_0 l^2}{EJ} = 0,075 \cdot \frac{4 \cdot 4^2}{2 \cdot 2770} = 8,6664 \cdot 10^{-4} \text{ rad}.$$

Z wymiarów geometrycznych prętów ramy wynika, że  $n = h/l = 0,75$ . Na podstawie wzorów ( $h$ ), ( $j$ ) i ( $l$ ) obliczono:

$$\begin{aligned} b_1 &= 0,300, & a_2 &= 0,2011, & b_2 &= 0,2981, & c_2 &= 0,4022, & d_2 &= 0,03788, \\ b_3 &= 0,289, & c_3 &= 0,2452, & d_3 &= 0,1053, \\ \alpha_1 &= 0,2656, & \beta_1 &= 0,0250, & \alpha_2 &= 0,09552, & \beta_2 &= 0,04101, \\ A_1 &= 0,1641, & A_2 &= 0,05722, & A_4 &= 0,0338, \\ D_1 &= 0,6667, & B_2 &= 0,1006, & D_2 &= 0,06572, & D_4 &= 0,0614. \end{aligned}$$

Na rysunku 17.6 przedstawiono obszar obciążeń zewnętrznych oraz obszary poszczególnych schematów statycznych. Rama wykazuje cechy konstrukcji fizycznie nieliniowej i wzmacnia się w miarę wzrostu obciążenia.

Każdemu punktowi przestrzeni obciążeń  $p_x, p_y$  można przypisać odpowiednie bezwymiarowe przemieszczenia  $\delta_x$  i  $\delta_y$ . Obliczymy przykładowo przemieszczenia stowarzyszone z punktami A, K, L i G:

– punkt  $A$  ( $p_x = 0$ ,  $p_y = 1$ ):

$$\delta_x = 0, \quad \delta_y = 0,0667 \cdot 1 = 0,0667.$$

– punkt  $K$  ( $p_x = 0,1279$ ,  $p_y = 1,6394$ ):

$$\delta_x = 0 + 0,1279 \cdot 0,1641 = 0,02099,$$

$$\delta_y = 0,0667 + (1,6394 - 1) \cdot 0,06667 = 0,1093.$$

– punkt  $L$  ( $p_x = 0,7488$ ,  $p_y = 4,7439$ ):

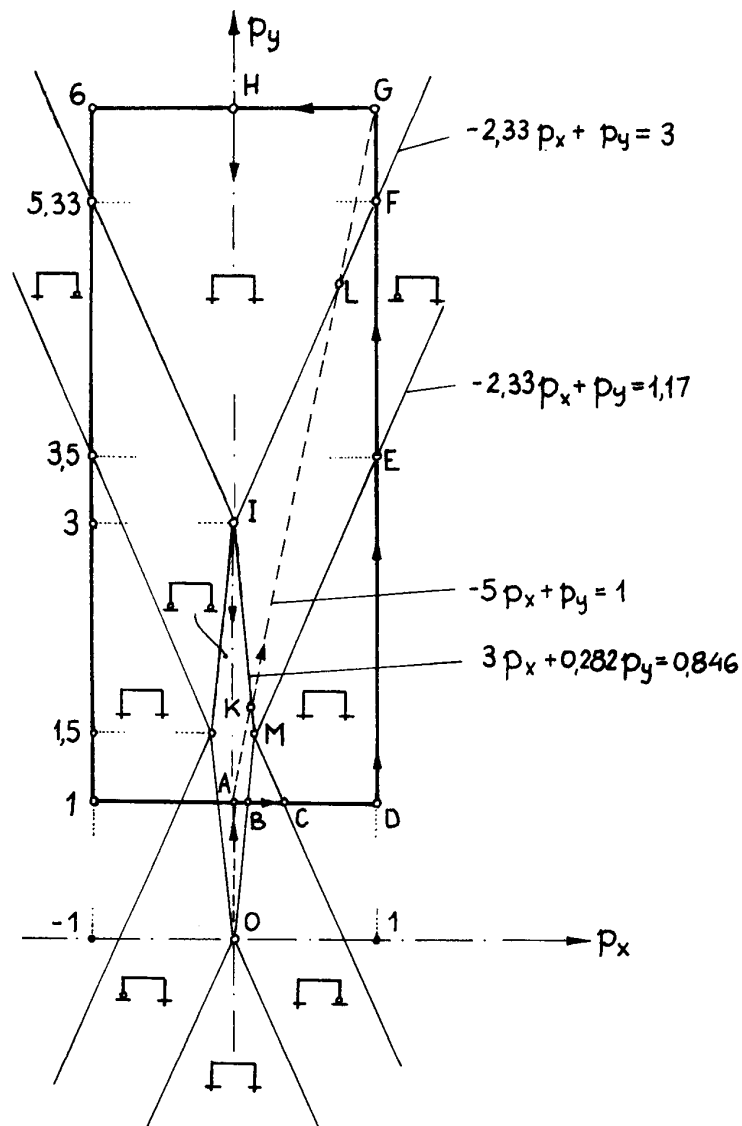
$$\delta_x = 0,02099 + (0,7488 - 0,1279) \cdot 0,05722 - (4,7439 - 1,6394) \cdot 0,01006 = 0,02529,$$

$$\delta_y = 0,1093 - (0,7488 - 0,1279) \cdot 0,01006 + (4,7439 - 1,6394) \cdot 0,06572 = 0,3070.$$

– punkt  $G$  ( $p_x = 1$ ,  $p_y = 6$ ):

$$\delta_x = 0,02529 + (1 - 0,7488) \cdot 0,0338 = 0,0338,$$

$$\delta_y = 0,3070 + (6 - 4,7439) \cdot 0,0614 = 0,3842.$$



Rys. 17.6

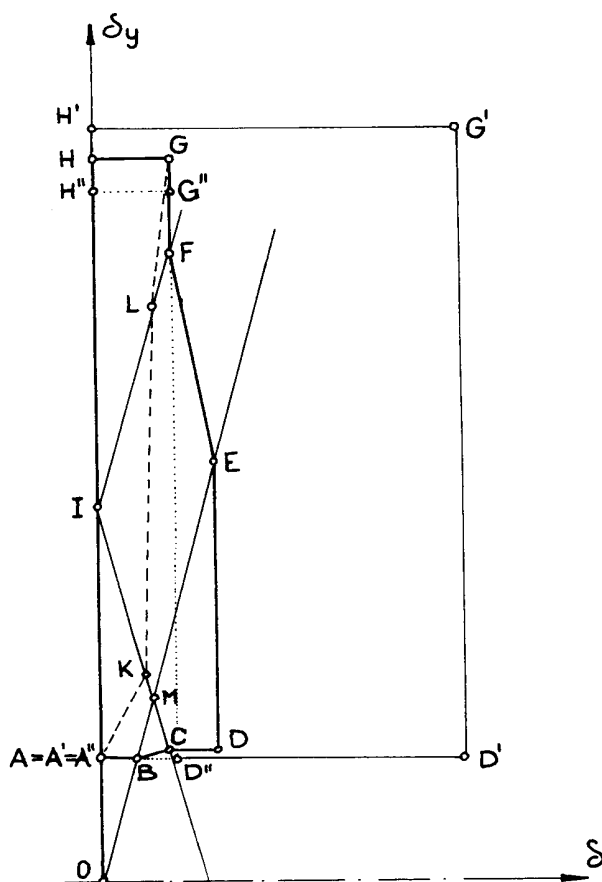
Rezultaty dla pozostałych punktów zestawiono niżej:

$B(0,0941; 1)$ :	$\delta_x = 0,01544$ ,	$\delta_y = 0,0667$ ,
$C(0,3557; 1)$ :	$\delta_x = 0,03041$ ,	$\delta_y = 0,0693$ ,
$D(1; 1)$ :	$\delta_x = 0,05219$ ,	$\delta_y = 0,0693$ ,
$E(1; 3,5)$ :	$\delta_x = 0,05219$ ,	$\delta_y = 0,2228$ ,
$F(1; 5,329)$ :	$\delta_x = 0,03380$ ,	$\delta_y = 0,3430$ ,
$G(1; 6)$ :	$\delta_x = 0,03380$ ,	$\delta_y = 0,3842$ ,
$H(0; 6)$ :	$\delta_x = 0$ ,	$\delta_y = 0,3842$ ,
$I(0; 3)$ :	$\delta_x = 0$ ,	$\delta_y = 0,2000$ .

Widzimy zatem, że między punktami przestrzeni obciążeń a punktami przestrzeni przemieszczeń istnieje wzajemnie jednoznaczne przyporządkowanie. Własność ta pozwala na graficzne przedstawienie poszczególnych dróg obciążenia i schematów statycznych w przestrzeni przemieszczeń  $\delta_x$  i  $\delta_y$ . W rozważanym zadaniu ilustruje to rys. 17.7. Prostokątnemu obszarowi obciążeń odpowiada wielobok  $ABCDEFGH$  w przestrzeni przemieszczeń. Dla porównania zaznaczono prostokąty  $A'D'G'H'$  i  $A''D''G''H''$ , które otrzymujemy odpowiednio dla schematu I i schematu IV.

Na zakończenie omówimy jeszcze zmiany energii sprężystej występujące w zamkniętym cyklu obciążenia na drodze  $ABCDEFGHIA$ . Energię tę obliczymy z zależności:

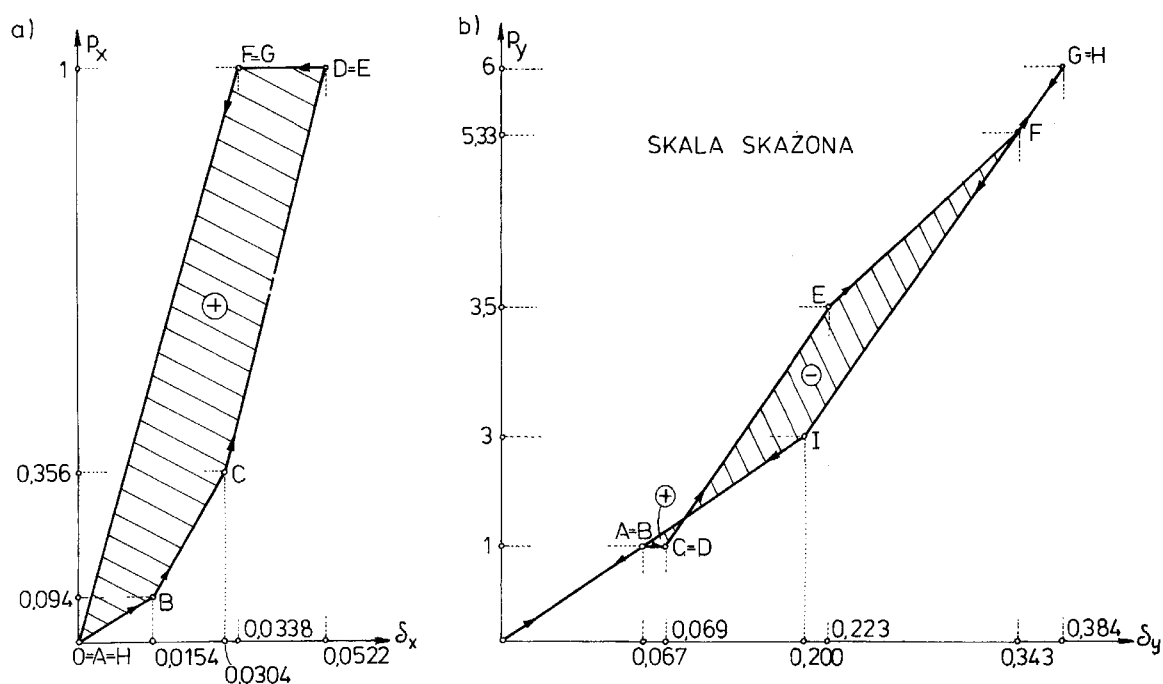
$$L_c = L_x + L_y = \int (P_x \cdot d\Delta_x + P_y \cdot d\Delta_y) = \frac{P_0^2 l^3}{EJ} \int (p_x d\delta_x + p_y d\delta_y) = \frac{P_0^2 l^3}{EJ} \cdot (l_x + l_y).$$



Rys. 17.7

Aktualna wartość energii sprężystej  $L_c$  jest zatem sumą pól zawartych pod wykresami  $P_x(\Delta_x)$  i  $P_y(\Delta_y)$ . Wykresy te podano na rys. 17.8. Jak widać, linie obciążeń i odciążeń na obu wykresach nie pokrywają się. Dla rozważanego cyklu obciążenia w płaszczyźnie  $P_x, \Delta_x$  obserwujemy „produkcję” energii, a na płaszczyźnie  $P_y, \Delta_y$  – „dyssypację” energii. Ponieważ jednak rozważany proces jest sprężysty, suma „produkcji” i „dyssypacji” energii jest równa zero. Łatwo to sprawdzić rachunkowo. Dla poszczególnych punktów obliczono:

A:	$l_x = 0,$	$l_y = 0,0333,$	$l_c = 0,0333,$
B:	$l_x = 0,0007,$	$l_y = 0,0333,$	$l_c = 0,0340,$
C:	$l_x = 0,0041,$	$l_y = 0,0353,$	$l_c = 0,0394,$
D:	$l_x = 0,0189,$	$l_y = 0,0353,$	$l_c = 0,0542,$
E:	$l_x = 0,0189,$	$l_y = 0,3818,$	$l_c = 0,4007,$
F:	$l_x = 0,0005,$	$l_y = 0,9118,$	$l_c = 0,9123,$
G:	$l_x = 0,0005,$	$l_y = 1,1441,$	$l_c = 1,1446,$
H:	$l_x = -0,0164,$	$l_y = 1,1441,$	$l_c = 1,277,$
I:	$l_x = -0,0164,$	$l_y = 0,3164,$	$l_c = 0,300,$
A:	$l_x = -0,0164,$	$l_y = 0,0164,$	$l_c = 0.$



Rys. 17.8

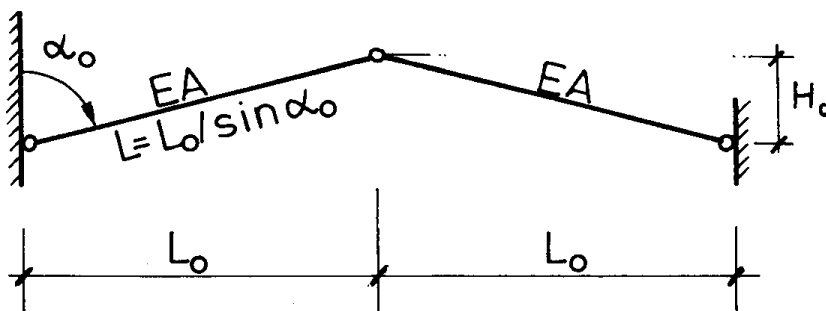
Największa energia sprężysta występuje w punkcie  $G$  ( $l_c = 1,1446$ ). Gdyby założyć, że w całym zakresie obciążeń realizuje się schemat I, to energia ta  $l_c = 1,282$ , a gdy realizuje się tylko schemat IV, to  $l_c = 1,122$ . Widzimy zatem, że energia sprężysta może być pewną miarą podatności konstrukcji. Im większa energia sprężysta, tym większa podatność. Fakt ten wykorzystuje się czasem do oszacowania globalnej sztywności konstrukcji.

W podsumowaniu warto zwrócić uwagę na to, że problemy nieliniowe są z reguły bardzo skomplikowane i wymagają do żmudnych rachunków. Przekonywującym potwierdzeniem tego wniosku jest przedstawiony wyżej problem ramy na nieliniowych podporach.

## 17.2. KRATOWNICA MISESA

### 17.2.1. Wprowadzenie

Nazwa „kratownica Misesa” odnosi się do kratownicy dwuprętowej, przedstawiona na rys. 17.9. Zbadamy zachowanie się układu pod wpływem symetrycznego obciążenia pionowego siłą  $P$  zaczepioną w węźle środkowym.



Rys. 17.9

Jeżeli wyniosłość kratownicy mierzona stosunkiem  $H_0/L_0$  jest mała, to prawidłowy opis deformacji kratownicy wymaga odstąpienia od zasady zeszywnienia. Innymi słowy, równania równowagi trzeba układać dla konfiguracji aktualnej (po odkształceniu). Otrzymujemy zatem problem kinematycznie (geometrycznie) nieliniowy. W celu zilustrowania powyższych stwierdzeń zadanie rozwiążemy w dwóch wariantach: liniowym (przy akceptacji zasady zeszywnienia) i nieliniowym.

Geometrię odkształcenia opiszemy pionowym przemieszczeniem  $v$  punktu przyłożenia obciążenia, przy założeniu, że deformacja konstrukcji jest symetryczna. Przyjmijmy nadto, że odkształcenia liniowe prętów są małe, a materiał prętów kratownicy jest liniowo-sprężysty.

Zależność między siłą  $P$  a przemieszczeniem  $v$  ustalimy na podstawie twierdzenia o minimum energii potencjalnej (por. p. 14.9.2). Pokażemy, że równowaga układu ma miejsce dla takiej wartości  $v$ , która ekstremalizuje energię potencjalną  $\Pi(v)$ , określoną wzorem (14.11). Wzór ten w naszym zadaniu przybiera postać:

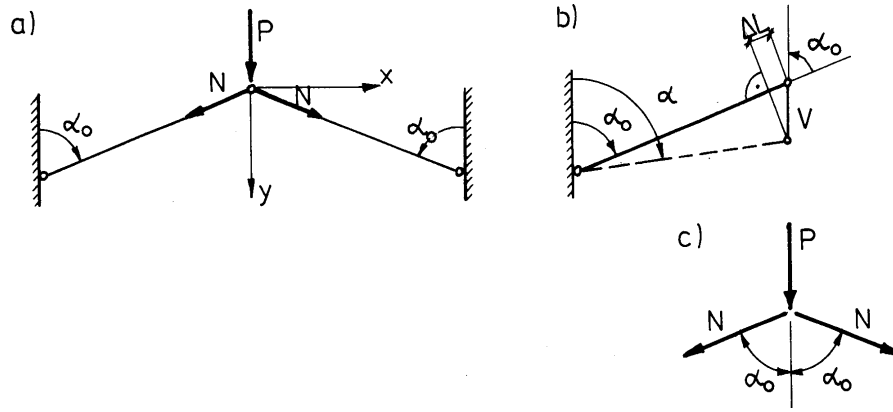
$$(a) \quad \Pi = \int_s \frac{1}{2} \cdot EA \lambda^2 \cdot ds - P \cdot v,$$

gdzie  $\lambda = \Delta L / L$  i oznacza wydłużenie względne osi prętów, a  $L = L_0 / (\sin \alpha_0)$ .

### 17.2.2. Zadanie kinematycznie liniowe

W zakresie małych przemieszczeń zależność między zmianą długości prętów  $\Delta L$  i przemieszczeniem  $v$  jest liniowa (por. rys. 17.10b):

$$(b) \quad \Delta L = -v \cdot \cos \alpha_0.$$



Rys. 17.10

Wobec tego

$$(c) \quad \lambda = -v \cdot \frac{\cos \alpha_0}{L_0} \cdot \sin \alpha_0,$$

a energia potencjalna

$$(d) \quad \Pi(v) = 2 \cdot \int_0^l \frac{1}{2} \lambda^2 EA \cdot dx - P \cdot v = EA \lambda^2 L - P v = \left( \frac{EA}{L_0} \cos^2 \alpha_0 \cdot \sin \alpha_0 \right) \cdot v^2 - P \cdot v.$$

Ekstremum funkcji  $\Pi(v)$  zachodzi, jeżeli  $\partial \Pi / \partial v = 0$ :

$$(e) \quad \frac{\partial \Pi}{\partial v} = \left( \frac{2EA}{L_0} \cos^2 \alpha_0 \cdot \sin \alpha_0 \right) \cdot v - P = 0.$$

Łatwo zauważyć, że druga pochodna energii potencjalnej względem przemieszczenia  $v$  jest zawsze większa od zera:  $\partial^2 \Pi / \partial v^2 > 0$ , więc stan równowagi określony zależnością (e) odpowiada minimum energii potencjalnej. Zależność (e) można uzyskać także z równania równowagi zapisanego w konfiguracji pierwotnej. Z rysunku 17.10c wynika bowiem następujące równanie równowagi:

$$P = -2N \cos \alpha_0.$$

Ponieważ jednak

$$N = EA \lambda = EA \cdot \frac{\Delta L}{L} = \left( -\frac{EA}{L_0} \cdot \cos \alpha_0 \cdot \sin \alpha_0 \right) \cdot v,$$

więc

$$(f) \quad P = \left( \frac{2EA}{L_0} \cdot \cos^2 \alpha_0 \cdot \sin \alpha_0 \right) \cdot v.$$

Wzór (f) pokrywa się z zależnością (e), uzyskaną metodą energetycznej.

### 17.2.3. Zadanie kinematycznie nieliniowe

Gdy uwzględnimy zmiany geometrii układu, wówczas zależność  $\Delta L(v)$  jest bardziej złożona. Ze wzoru Pitagorasa otrzymujemy (rys. 17.9):

$$L = \sqrt{L_0^2 + H_0^2} = L_0 / \sin \alpha_0, \quad L + \Delta L = \sqrt{L_0^2 + (H_0 - v)^2},$$

skąd

$$(g) \quad \lambda = \frac{\Delta L}{L} = \frac{\sqrt{L_0^2 + (H_0 - v)^2} - \sqrt{L_0^2 + H_0^2}}{L_0} \cdot \sin \alpha_0.$$

Wobec powyższego energia potencjalna układu

$$(h) \quad \Pi(v) = 2 \int_0^L \frac{1}{2} EA \lambda^2 dx - Pv = \frac{EA}{L_0} \left[ \sqrt{L_0^2 + (H_0 - v)^2} - \sqrt{L_0^2 + H_0^2} \right] \sin \alpha_0 - Pv.$$

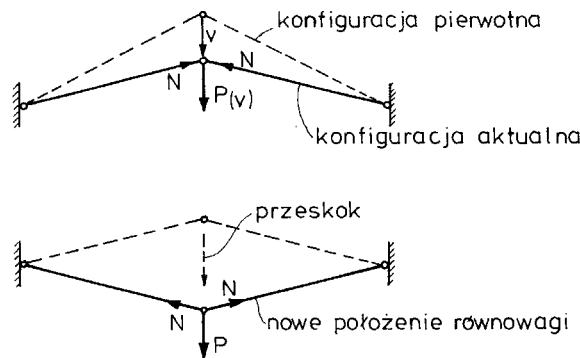
Warunek ekstremum funkcji  $\Pi(v)$  prowadzi do zależności:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial v} = -\frac{EA}{L_0} \cdot \sin \alpha_0 \cdot \frac{\sqrt{L_0^2 + (H_0 - v)^2} - \sqrt{L_0^2 + H_0^2}}{\sqrt{L_0^2 + (H_0 - v)^2}} \cdot (H_0 - v) - P = 0,$$

skąd

$$(i) \quad P(v) = 2EA \left( \operatorname{ctg} \alpha_0 - \frac{v}{L_0} \right) \cdot \left[ \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \operatorname{ctg} \alpha_0 - \frac{v}{L_0} \right)^2}} - \sin \alpha_0 \right].$$

Identyczny wynik otrzymujemy z równania równowagi sił w konfiguracji aktualnej (ryz. 17.11).



Rys. 17.11

Zależność  $P(v)$  może odpowiadać równowadze statecznej ( $\partial P / \partial v = P_{,v} > 0$ ) lub niestatecznej ( $P_{,v} < 0$ ). Z budowy zależności (i) wnioskujemy, że pochodna  $P_{,v}$  jest równa drugiej pochodnej energii potencjalnej. Równowaga stateczna występuje zatem wówczas, gdy energia potencjalna osiąga minimum, tzn. gdy  $\partial \Pi / \partial v = 0$ ,  $\partial^2 \Pi / \partial v^2 > 0$ , natomiast równowaga jest niestateczna, gdy energia potencjalna osiąga maksimum:  $\partial \Pi / \partial v = 0$ ,  $\partial^2 \Pi / \partial v^2 < 0$ . Problem stateczności równowagi zilustrujemy również w przykładzie liczbowym.

### 17.2.4. Przykład liczbowy<sup>\*)</sup>

Obliczenia wykonano dla następujących danych:

$$L_0 = 1,0 \text{ m}, \quad E = 2,1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2, \quad A = 10^{-3} \text{ m}^2, \quad \text{ctg} \alpha_0 = 0,1, \quad P = 40 \text{ kN}.$$

W zadaniu liniowym stosownie do wzoru (d), otrzymano:

$$\Pi(v) = 2069 \cdot v^2 - P \cdot v$$

Warunek równowagi  $\partial \Pi / \partial v = 0$  prowadzi do zależności:

$$P(v) = 4138 \cdot v.$$

Gdy  $P = 40 \text{ kN}$  Przemieszczenie pionowe wynosi  $v = v^* = 0,00967 \text{ m}$ .

Dla zadania nieliniowego obliczono (wzór (h)):

$$\Pi(v) = 208958 \cdot \left[ \sqrt{1 + (0,1 - v)^2} - \sqrt{1,01} \right] - P v.$$

Równowaga występuje, gdy  $\partial \Pi / \partial v = 0$ :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial v} = -417916 \cdot \left[ 1 - \sqrt{\frac{1}{1 + (0,1 - v)^2}} \right] \cdot (0,1 - v) - P = 0.$$

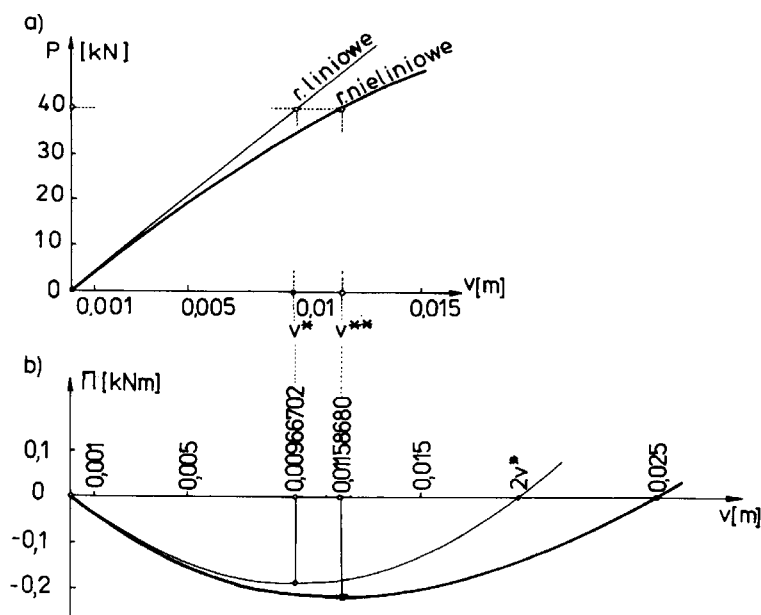
Po podstawieniu  $P = 40 \text{ kN}$  otrzymujemy  $v = v^* = 0,01159 \text{ m}$ . Zależność  $P(v)$  odpowiadająca równowadze przybiera postać:

$$P(v) = -417916 \cdot \left[ 1 - \sqrt{\frac{1,01}{1 + (0,1 - v)^2}} \right] \cdot (0,1 - v).$$

O stateczności równowagi mówi znak drugiej pochodnej energii potencjalnej:

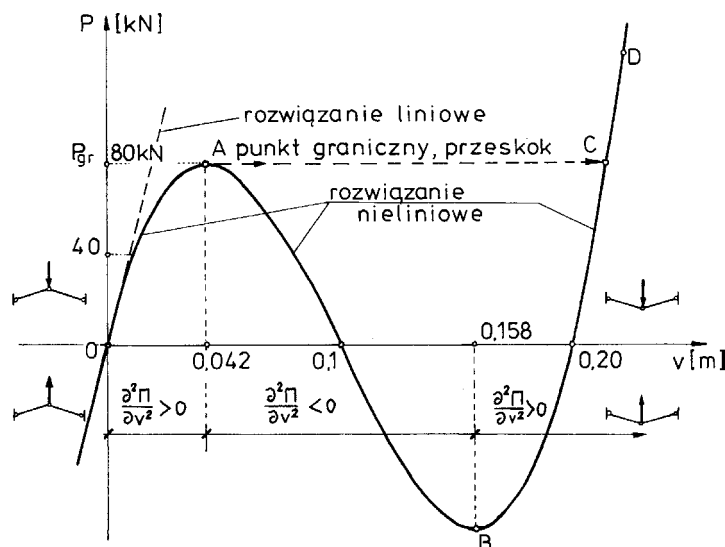
$$\frac{dP}{dv} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial v^2} = 417916 \cdot \left[ 1 - \sqrt{\frac{1,01}{1 + (0,1 - v)^2}} + \frac{\sqrt{1,01 \cdot (0,1 - v)^2}}{\left[ 1 + (0,1 - v)^2 \right]^{3/2}} \right].$$

<sup>\*)</sup> Obliczenia do tego przykładu wykonał W. Czarnecki.



Rys. 17.12

Wykresy funkcji  $\Pi(v)$  dla zadania liniowego i zadania nieliniowego zestawiono na rys. 17.12a. Dla siły  $P = 40$  kN minimum funkcji  $\Pi(v)$  odpowiada równowadze statecznej. Odpowiednie wykresy funkcji  $P(v)$  dla umiarkowanych wartości przemieszczeń podano na rys. 17.12b. Wyraźne różnice jakościowe uwidaczniają się dopiero przy większych wartościach przemieszczeń. Ilustruje to rys. 17.13. W zadaniu nieliniowym siła  $P$  rośnie do punktu A, kiedy  $dP/dv = \partial^2 \Pi / \partial v^2 \geq 0$ . W punkcie tym, zwanym punktem granicznym, funkcja  $P(v)$  osiąga lokalne maksimum:  $dP/dv = \partial^2 \Pi / \partial v^2 = 0$ . Przy dalszym powiększaniu siły  $P$  obserwujemy zjawisko tzw. przeskoku (ang. *snap-through*) i ustalenie się nowego położenia równowagi. Na wykresie  $P(v)$  odpowiada to przeskokowi z punktu A do punktu C. Opisane zjawisko umyka uwadze, jeżeli stosujemy podejście liniowe. Przeskok obserwujemy tylko wówczas, gdy czynnikiem sterującym jest obciążenie  $P$ . Jeżeli będziemy powiększać przemieszczenie  $v$  (sterowanie przemieszczeniem), to zaobserwujemy zmniejszenie reakcji pionowej węzła środkowego zgodnie z przebiegiem krzywej AB:  $dP/dv = \partial^2 \Pi / \partial v^2 < 0$ . Począwszy od punktu B dalszemu wzrostowi przemieszczenia  $v$  towarzyszy wzrost reakcji węzła środkowego (krzywa B – C – D:  $dP/dv = \partial^2 \Pi / \partial v^2 > 0$ ).

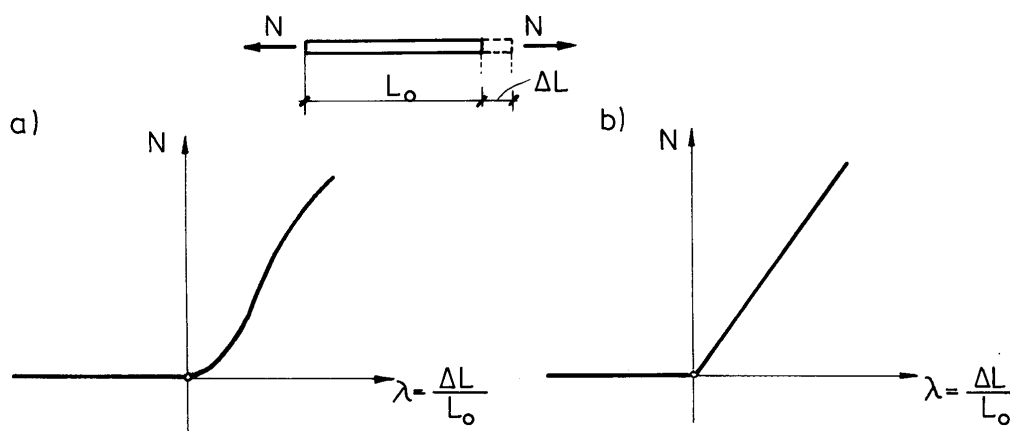


Rys. 17.13

Zjawisko przeskoku ma bardzo duże znaczenie w praktyce inżynierskiej. Najczęściej problem ten pojawia się w konstrukcjach powłokowych. Przykład kratownicy *Misesa* dowodzi, że opis niektórych zjawisk występujących w mechanice wymaga odejścia od zasady zeszywnienia.

### 17.3. CIĘGNO OBCIĄŻONE SIŁĄ SKUPIONĄ

Cięgno jest prętem mającym jedynie sztywność rozciągania. Cechy cięgna wykazują np. cienkie druty i liny. Zależność między siłą normalną a odkształceniem osi cięgna charakteryzuje rys. 17.14. Dla ujemnych odkształceń liniowych (tzn. skróceń) siła normalna jest równa zero<sup>\*)</sup>. Podczas rozciągania cięgno może zachowywać się nieliniowo (rys. 17.14a) lub liniowo (rys. 17.14b). W obu przypadkach mamy jednak do czynienia z fizyczną nieliniowością, gdyż funkcję odcinkowo liniową z rys. 17.14b też zaliczamy do zależności nieliniowych. Wykresy podane na rys. 17.14 nawiązują do odkształcenia zdefiniowanego jako stosunek wydłużenia cięgna do jego pierwotnej długości  $L_0$ ,  $\lambda = \Delta L / L_0$ . Sposób definiowania odkształcenia jest istotny, jeżeli wydłużenia cięgna są bardzo duże.



Rys. 17.14

W dalszym ciągu rozważania ograniczymy do cięgien o liniowej charakterystyce podczas rozciągania. Związek fizyczny, stosownie do rys. 17.14b, można zapisać następująco:

$$N = \begin{cases} k\lambda, & \lambda \geq 0, \\ 0, & \lambda < 0, \end{cases} \quad (17.2)$$

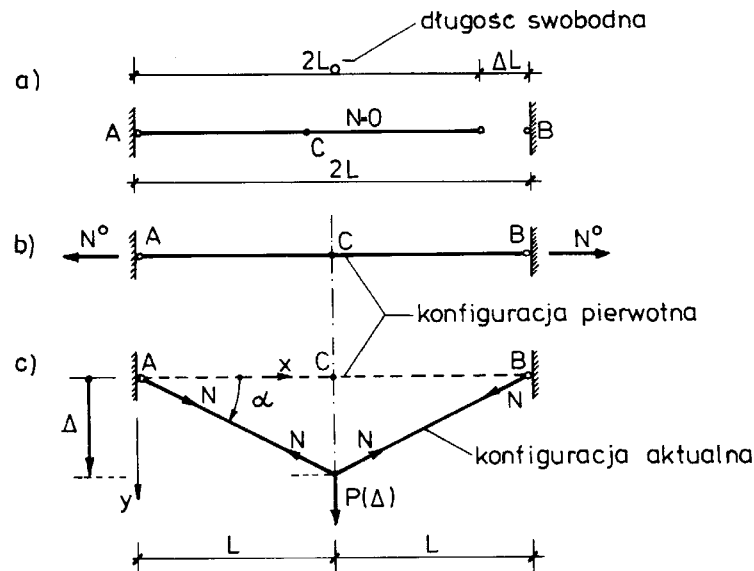
gdzie  $k$  oznacza sztywność rozciągania cięgna.

Materiałowi cięgna przypisuje się zazwyczaj cechy sprężystości liniowej, co pozwala przyjąć, że  $k = EA = \text{const}$ . Dla bardzo dużych odkształceń cięgna oznaczałoby to, że moduł sprężystości musi wzrastać, bo przekrój cięgna ulega zmniejszeniu. W zadaniach praktycznych wartości odkształceń są na tyle małe, że założenie stałej sztywności cięgna jest usprawiedliwione.

Przyjęciu obciążeń przez układ cięgnowy towarzyszą na ogół duże przemieszczenia. Z tego powodu problemy mechaniki cięgien są z natury rzeczy również geometrycznie nieliniowe.

Zasadniczym mankamentem konstrukcji cięgnowych jest ich mała sztywność. Dlatego przed przyłożeniem obciążenia zewnętrznego poszczególne cięgna są poddawane wstępnemu naciągowi. Wpływ naciągu na sztywność układu cięgnowego objaśnimy na przykładzie. Rozważymy nieważkie cięgno o długości swobodnej  $2L_0$ . Zamocujemy je na nieprzesuwnych podporach  $A$  i  $B$ , usytuowanych w odległościach  $2L > 2L_0$  (rys. 17.15a).

<sup>\*)</sup> Cięgno jest układem z więzami jednostronnymi.



Rys. 17.15

Zamocowanie wymaga wstępnego wydłużenia o wartość  $\Delta L^0 = 2L - 2L_0$ , co odpowiada odkształceniu wstępnemu  $\lambda^0 = (L / L_0) - 1$  i wstępnemu naciągowi  $N^0 = k \cdot \lambda^0$  (rys. 17.15b). Po zamocowaniu cięgna na podporach przyłożymy zewnętrzną siłę skupioną  $P$  w połowie rozpiętości. W miarę wzrostu obciążenia cięgno wydłuża się, a gdy siła  $P$  osiągnie swą wartość końcową, układ przyjmie konfigurację aktualną przedstawioną na rys. 17.15c. Zadaniem naszym jest ustalenie zależności  $P(\Delta)$ , przy czym  $\Delta$  jest pionowym przemieszczeniem punktu przyłożenia siły. Do dyspozycji mamy:

– równanie równowagi

$$(a) \quad P = 2N \sin \alpha = 0, \quad \sin \alpha = \frac{\Delta}{L + \Delta L},$$

– równanie geometryczne

$$(b) \quad (L + \Delta L)^2 = \Delta^2 + L^2$$

– równanie fizyczne

$$(c) \quad N = k \cdot (\lambda^0 + \lambda), \quad \lambda = \frac{\Delta L}{L_0}.$$

Z równania (b) otrzymujemy związek:

$$\Delta L = L \cdot \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{\Delta}{L} \right)^2} - 1 \right] = L_0 \cdot (1 + \lambda^0) \cdot \left( \sqrt{1 + \left( \frac{\Delta}{L} \right)^2} - 1 \right),$$

z którego, po wykorzystaniu równań (a) i (c), wynikają zależności:

$$(d) \quad P = 2N \cdot \frac{\left(\frac{\Delta}{L}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{\Delta}{L}\right)^2}}, \quad N = k \cdot \left[ (1+\lambda^0) \cdot \sqrt{1+\left(\frac{\Delta}{L}\right)^2} - 1 \right]$$

oraz poszukiwany funkcję  $P(\Delta)$ :

$$(e) \quad P(\Delta) = 2k \cdot \left(\frac{\Delta}{L}\right) \cdot \frac{(1+\lambda^0) \cdot \sqrt{1+\left(\frac{\Delta}{L}\right)^2} - 1}{\sqrt{1+\left(\frac{\Delta}{L}\right)^2}}.$$

Wzory (d) i (e) można zapisać w postaci bezwymiarowej:

$$(f) \quad \begin{cases} n = (1+\lambda^0) \cdot \sqrt{1+\delta^2} - 1 \\ p = 2\delta \cdot \frac{(1+\lambda^0) \cdot \left[ \sqrt{1+\delta^2} - 1 \right]}{\sqrt{1+\delta^2}}, \end{cases}$$

gdzie  $n = N/k$ ,  $p = P/k$ ,  $\delta = \Delta/L$ .

Jeżeli wartość  $\delta^2$  jest mała w porównaniu z jednością, to poprzestając tylko na dwóch wyrazach rozwinięcia w szereg potęgowy, otrzymujemy w przybliżeniu:

$$\sqrt{1+\delta^2} \approx 1 + \frac{1}{2}\delta^2, \quad \frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}} \approx 1 - \frac{1}{2}\delta^2.$$

Wówczas wzory (f) upraszczają się do postaci:

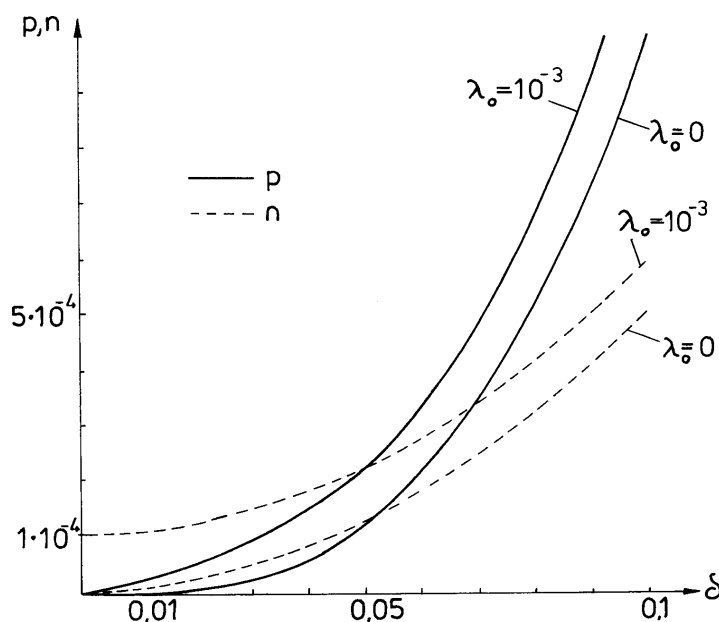
$$(g) \quad \begin{cases} n \approx \lambda^0 + \frac{1}{2}\delta^2 \cdot (1+\lambda^0) \approx \lambda^0 + \frac{1}{2}\delta^2, \\ p \approx 2\delta \left( \lambda^0 + \frac{1}{2}\delta^2 \right) \left( 1 - \frac{1}{2}\delta^2 \right) \approx 2\delta \left( \lambda^0 + \frac{1}{2}\delta^2 \right). \end{cases}$$

Miarą sztywności konstrukcji jest pochodna  $dp/d\delta$ .

$$(h) \quad \frac{dp}{d\delta} = 2\lambda^0 + 3\delta^2.$$

Widzimy zatem, że wstępny naciąg, mierzony wartością odkształcenia  $\lambda^0$ , w istotny sposób powiększa początkową sztywność układu ciągnowego. Dla obliczeń numerycznych bardzo korzystne jest również to, że sztywność ta jest różna od zera na początku procesu obciążenia, gdy  $p = 0$ . Zależność między bezwymiarowymi wartościami siły normalnej  $n$  i obciążenia  $p$  a ugięciem  $\delta$  ilustruje rys. 17.16. W celu po-

równania załączono wykresy dla  $\lambda^0 = 0,001$  i dla  $\lambda^0 = 0$ . Z rysunku 17.16 widać wyraźnie, że w układach ciągnowych nie obowiązuje zasada superpozycji, gdyż wykresy  $n(\delta)$  i  $p(\delta)$  są nieliniowe.



Rys. 17.16

W obliczeniach konstrukcji ciągnowych, wykazujących umiarkowane odkształcenia wstępne ( $\lambda^0 \ll 1$ ), stosuje się uproszczenie polegające na tym, że odkształcenia względne odnosi się na ogół nie do długości swobodnej  $L_0$ , lecz do aktualnej długości cięgna wydłużonego. Oznacza to, że stosujemy przybliżenie:

$$\frac{\Delta L}{L_0} \approx \frac{\Delta L}{L_0(1 + \lambda^0)}. \quad (17.3)$$

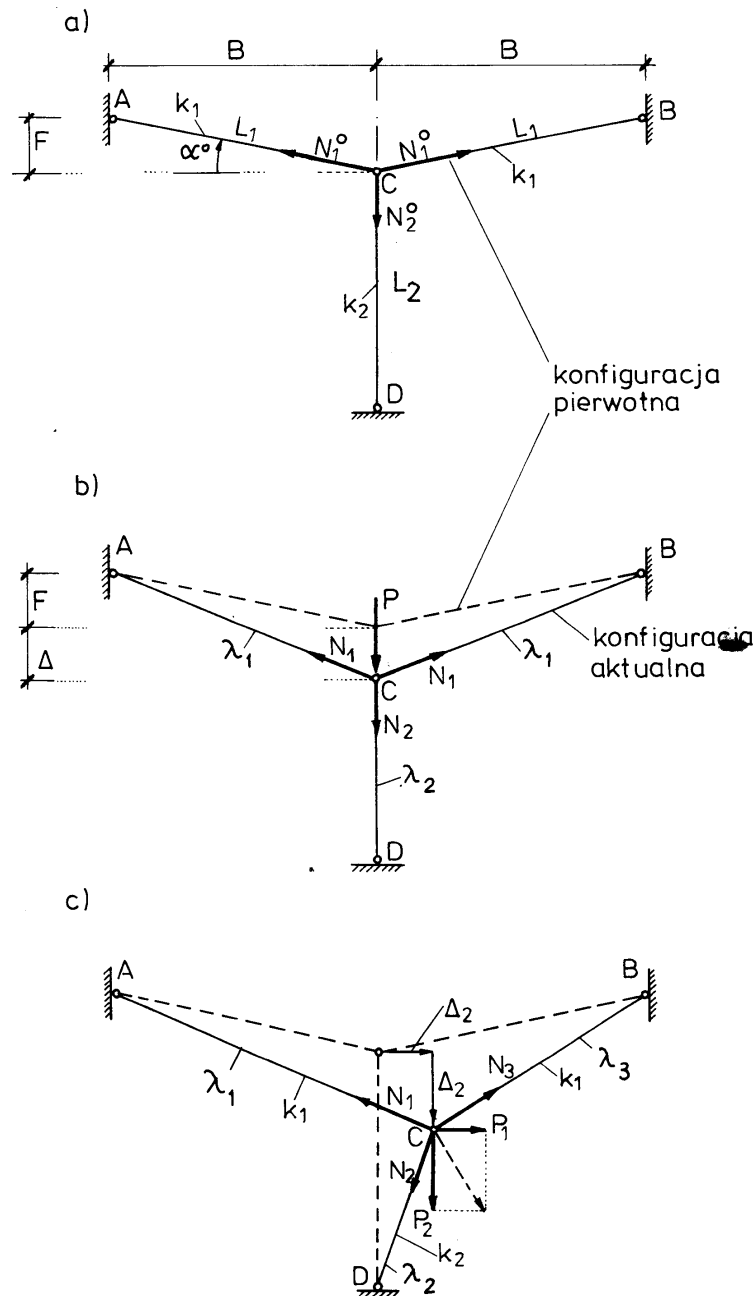
Zilustrujemy teraz wpływ nieliniowości fizycznej układu ciągnowego na zachowanie się układu w procesie odciążenia cięgna. Rozważmy układ złożony z trzech wstępnie napiętych cięgien (rys. 17.17a). Między siłami wstępnego naciągu występuje zależność wynikająca z równania równowagi węzła C:

$$2N_1^0 \sin \alpha^0 = N_2^0.$$

Jeżeli przyjmiemy, że sztywności cięgien AC i CB są równe i wynoszą  $k_1$ , a sztywność cięgna CD wynosi  $k_2$ , to podany wyżej warunek równowagi prowadzi do zależności:

$$(i) \quad \lambda_2^0 = 2 \frac{k_1}{k_2} \lambda_1^0 \cdot f,$$

gdzie  $\lambda_1^0$  oraz  $\lambda_2^0$  oznaczają odpowiednio wstępne wydłużenie względne cięgien AC i CB oraz CD, zaś  $f = F / L_1$ .



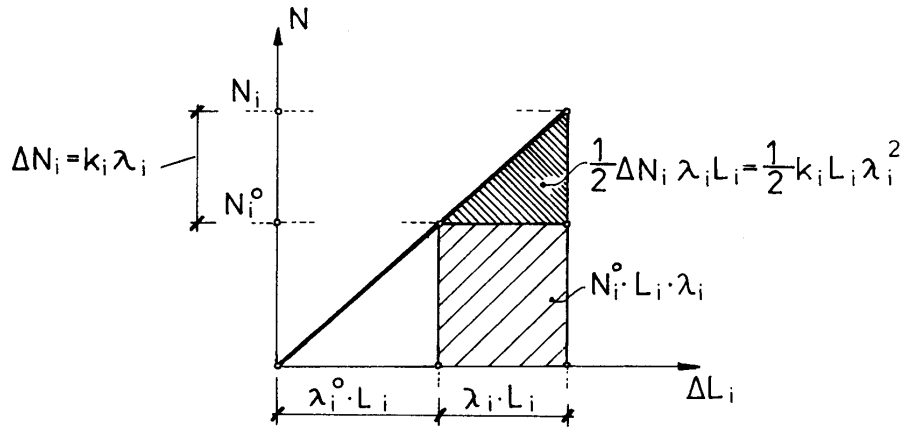
Rys. 17.17

Jak widać, wstępne wydłużenia cięgien nie mogą być zupełnie dowolne, co sprawia, że ustalenie konfiguracji wstępnej w bardziej rozbudowanych układach stanowi problem sam dla siebie. Uwaga ta nabiera ostrości, jeśli się zważyć że w praktyce wymagamy dodatkowo spełnienia warunku naprężeniowego ( $\sigma \leq \sigma_{\text{dop}}$ ).

Rozważany układ obciążymy pionową siłą skupioną (rys. 17.17b). Z symetrii obciążenia wnioskujemy, że punkt C ulegnie tylko przemieszczeniu pionowemu  $\Delta$ . Konfigurację aktualną można wyznaczyć tak samo jak w zadaniu poprzednim. Tym razem zastosujemy twierdzenie o minimum energii potencjalnej. Jeśli przyjmiemy przybliżenie (17.3), to wartość całkowita energia potencjalna układu

$$(j) \quad \Pi(\Delta) = \Pi^0 + 2N_1^0 \lambda_1 L_1 + N_2^0 \lambda_2 L_2 + 2 \cdot \frac{1}{2} k_1 L_1 \lambda_1^2 + \frac{1}{2} k_2 L_2 \lambda_2^2 - P \cdot \Delta$$

gdzie  $\Pi^0$  oznacza energię potencjalną wstępnego naciągu, a  $\lambda_1$  oraz  $\lambda_2$  – wydłużenia cięgien  $AC$  i  $CB$  oraz  $CD$ . Pochodzenie składników  $N_i^0 \lambda_i L_i + k_i L_i \lambda_i^2 / 2$  wynika



Rys. 17.18

wprost z rys. 17.18. Składniki te wyrażają zmianę energii zmagazynowanej w cięgnach w czasie przejścia z konfiguracji pierwotnej do konfiguracji aktualnej. Zmiana ta jest równa polu zakreskowanego trapezu (zbudowanego z trójkąta i prostokąta) na wykresie  $N_i(\Delta L_i)$ .

Warunkiem ekstremum energii  $\Pi$  jako funkcji przemieszczenia jest znikanie pierwszej pochodnej, tzn.  $\partial^2 \Pi / \partial \Delta = 0$ :

$$(k) \quad 2N_1^0 L_1 \frac{\partial \lambda_1}{\partial \Delta} + N_2^0 L_2 \frac{\partial \lambda_2}{\partial \Delta} + 2k_1 L_1 \lambda_1 \cdot \frac{\partial \lambda_1}{\partial \Delta} + k_2 L_2 \lambda_2 \cdot \frac{\partial \lambda_2}{\partial \Delta} - P = 0.$$

Równanie (k) ma sens równania równowagi (sumy rzutów sił na kierunek przemieszczenia  $\Delta$ ) i jest poszukiwaną zależnością  $P(\Delta)$ . Jeśli uwzględnimy, że siły wstępnego naciągu  $N_i^0 = k_i \lambda_i^0$ , to równanie (k) można przedstawić następująco:

$$(l) \quad P = 2L_1 k_1 (\lambda_1^0 + \lambda_1) \cdot \frac{\partial \lambda_1}{\partial \Delta} + L_2 k_2 (\lambda_2^0 + \lambda_2) \cdot \frac{\partial \lambda_2}{\partial \Delta}.$$

Z rysunku 17.17b wynikają zależności geometryczne:

$$L_1^2 (1 + \lambda_1)^2 = B^2 + (F + \Delta)^2; \quad \lambda_2 = -\frac{\Delta}{L_2},$$

skąd po uwzględnieniu, że  $L_1^2 = B^2 + F^2$ , dostajemy:

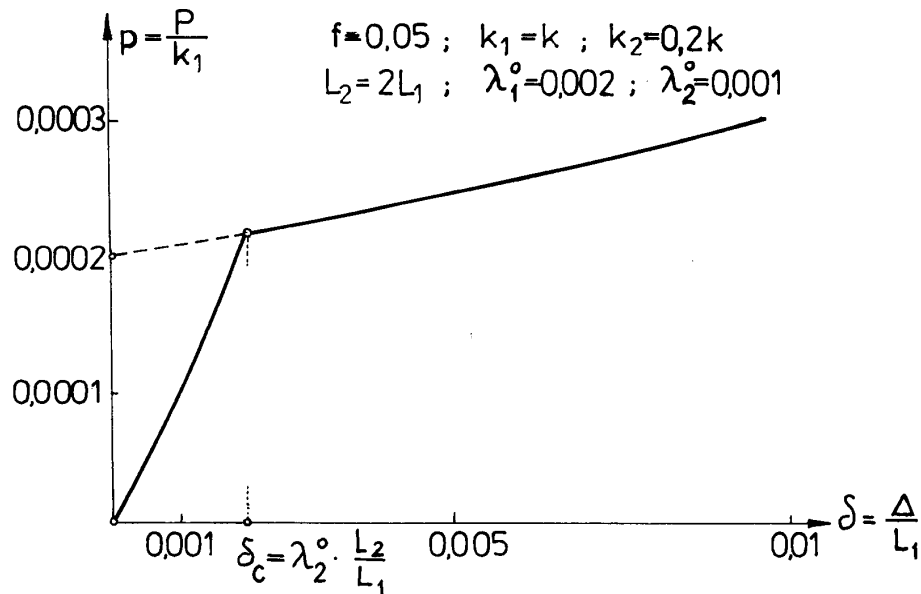
$$(m) \quad \begin{cases} \lambda_1 = \sqrt{1 + 2f\delta + \delta^2} - 1 \approx f\delta + \frac{1}{2}\delta^2, \\ \lambda_2 = -\delta \cdot \frac{L_1}{L_2}, \end{cases}$$

gdzie  $\delta = \Delta / L_1$ ,  $f = F / L_1$ . Po podstawieniu tych zależności do równania (l) otrzymujemy ostatecznie:

$$(n) \quad P(\delta) = \begin{cases} 2(\lambda_1^0 + f\delta + \frac{1}{2}\delta^2)(f + \delta) - \frac{k_2}{k_1} \left( \lambda_2^0 - \delta \frac{L_1}{L_2} \right), & \lambda_2^0 - \delta \frac{L_1}{L_2} > 0 \\ 2(\lambda_1^0 + f\delta + \frac{1}{2}\delta^2)(f + \delta), & \lambda_2^0 - \delta \frac{L_1}{L_2} \leq 0, \end{cases}$$

gdzie  $p = P / k_1$ .

Funkcja  $P(\delta)$  jest opisana dwoma wzorami. Pierwszy dotyczy przypadku, gdy cięgno  $CD$  jest jeszcze napięte, tzn. gdy  $\lambda_2^0 + \lambda_2 \geq 0$ . Drugi odpowiada sytuacji, gdy cięgno napinające  $CD$  jest już luźne. „Wyłączenie się” cięgna  $CD$  powoduje bardzo wyraźne zmniejszenie sztywności układu. Zjawisko to ilustruje rys. 17.19, na którym zamieszczono wykres  $p(\delta)$  opisany zależnością (n). Na uwagę zasługuje fakt, że przemieszczenia badanej konstrukcji cięgnowej są tak małe, iż wpływ zmian geometrii jest prawie niezauważalny.



Rys. 17.19

Omówione wyżej zadania pod względem rachunkowym są elementarne. Obliczenia komplikują się, gdy węzły układu mają większą liczbę stopni swobody. Wystarczy na przykład, by obciążenie węzła  $C$  było niesymetryczne. Pojawiają się wówczas niewiadome przemieszczenia  $\Delta_1$  i  $\Delta_2$ , które trzeba obliczyć z układu równań nieliniowych. Przypadek taki przedstawiono na rys. 17.17c. Wyrażenie na energię potencjalną układu przybiera wtedy postać:

$$\begin{aligned} \Pi(\Delta_1, \Delta_2) = & \Pi^0 + N_1^0 \lambda_1 L_1 + N_2^0 \lambda_2 L_2 + N_3^0 \lambda_3 L_3 + \\ & + \frac{1}{2} k_1 \lambda_1^2 L_1 + \frac{1}{2} k_2 \lambda_2^2 L_2 + \frac{1}{2} k_1 \lambda_3^2 L_1 - P_1 \Delta_1 - P_2 \Delta_2. \end{aligned}$$

Z warunków ekstremum funkcji  $\Pi(\Delta_1, \Delta_2)$  otrzymujemy

$$(c) \quad \begin{cases} \frac{\partial \Pi}{\partial \Delta_1} = 0; & k_1 L_1 (\lambda_1^0 + \lambda_1) \frac{\partial \lambda_1}{\partial \Delta_1} + k_2 L_2 (\lambda_2^0 + \lambda_2) \frac{\partial \lambda_2}{\partial \Delta_1} + k_1 L_1 (\lambda_1^0 + \lambda_3) \frac{\partial \lambda_3}{\partial \Delta_1} - P_1 = 0, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \Delta_2} = 0; & k_1 L_1 (\lambda_1^0 + \lambda_1) \frac{\partial \lambda_1}{\partial \Delta_2} + k_2 L_2 (\lambda_2^0 + \lambda_2) \frac{\partial \lambda_2}{\partial \Delta_2} + k_1 L_1 (\lambda_1^0 + \lambda_3) \frac{\partial \lambda_3}{\partial \Delta_2} - P_2 = 0. \end{cases}$$

Związki geometryczne wynikają z rys. 17.17c:

$$\begin{aligned}(L_1 + \Delta L_1)^2 &= (B + \Delta_1)^2 + (F + \Delta_2)^2, \\(L_2 + \Delta L_2)^2 &= \Delta_1^2 + (L_2 - \Delta_2)^2, \\(L_1 + \Delta L_3)^2 &= (B - \Delta_1)^2 + (F + \Delta_2)^2,\end{aligned}$$

skąd

$$(p) \quad \begin{cases} \lambda_1(\delta_1, \delta_2) = \sqrt{1 + 2b\delta_1 + 2f\delta_2 + \delta_1^2 + \delta_2^2} - 1 = b\delta_1 + f\delta_2 + \frac{1}{2}(\delta_1^2 + \delta_2^2), \\ \lambda_2(\delta_1, \delta_2) = \sqrt{\left(\frac{\Delta_1}{L_2}\right)^2 + \left(1 - \frac{\Delta_2}{L_2}\right)^2} - 1 \approx -\eta\delta_2 + \frac{1}{2}\eta^2(\delta_1^2 + \delta_2^2), \\ \lambda_3(\delta_1, \delta_2) = \sqrt{1 - 2b\delta_1 + 2f\delta_2 + \delta_1^2 + \delta_2^2} - 1 \approx -b\delta_1 + f\delta_2 + \frac{1}{2}(\delta_1^2 + \delta_2^2), \end{cases}$$

gdzie  $\eta = L_1 L_2$ ,  $b = B / L_1$ ,  $f = F / L_1$ ,  $\delta_1 = \Delta_1 L_1$ ,  $\delta_2 = \Delta_2 L_1$ .

Po uwzględnieniu zależności (p) w równaniach (o) uzyskujemy poszukiwany układ dwóch nieliniowych równań algebraicznych ze względu na bezwymiarowe przemieszczenia  $\delta_1$  i  $\delta_2$ :

$$(r) \quad \begin{cases} \delta_1 \left\{ 2\lambda_1^0 + 2b^2 + 2f\delta_2 + \delta_1^2 + \delta_2^2 + \frac{k_2}{k_2} \eta \left[ \lambda_2^0 - \eta\delta_2 + \frac{1}{2} \eta^2 (\delta_1^2 + \delta_2^2) \right] \right\} - p_1 = 0, \\ (f + \delta_2)(2\lambda_1^0 + 2f\delta_2 + \delta_1^2 + \delta_2^2) + \\ + \frac{k_2}{k_1} \cdot (-1 + \eta\delta_2) \cdot \left[ \lambda_2^0 - \eta\delta_2 + \frac{1}{2} \eta (\delta_1^2 + \delta_2^2) \right] - p_2 = 0. \end{cases}$$

Budowa tego układu zniechęca do poszukiwania rozwiązania ścisłego. W praktyce liczba stopni swobody jest na ogół duża i dlatego stosuje się metody przybliżone ukierunkowane na wykorzystanie komputera. Najczęściej stosuje się wówczas metodę *Newtona-Raphsona*, opisaną w dodatku. „Ręczne” rozwiązanie układu tą metodą pozostawimy najbardziej wytrwałym Czytelnikom. W trakcie obliczeń należy zwrócić uwagę, że wyłączenie danego cięgna występuje w momencie, gdy całkowite wydłużenie cięgna jest równe zero. Powoduje to odpowiednią modyfikację układu równań (r).