

15.



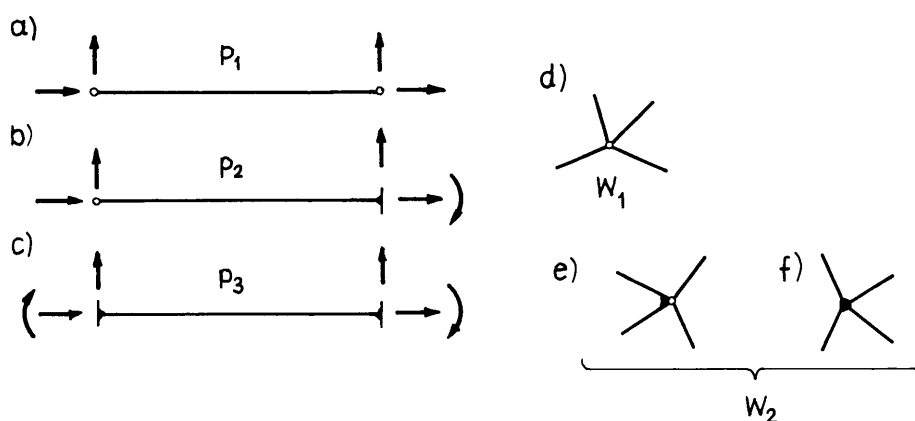
KONSTRUKCJE STATYCZNIE WYZNACZALNE

15.1. WARUNEK KONIECZNY STATYCZNEJ WYZNACZALNOŚCI
PŁASKICH KONSTRUKCJI PRĘTOWYCH

Na wstępie przypomnijmy, że podział na konstrukcje statycznie wyznaczalne i niewyznaczalne ma sens tylko wtedy, gdy w równaniach równowagi pomijamy deformacje konstrukcji. Oznacza to, że w tym i w dalszych rozdziałach trzeciej części podręcznika akceptujemy zasadę zeszytywnienia.

Zasadnicze problemy konstrukcji statycznie wyznaczalnych omówimy przede wszystkim na przykładach płaskich układów prętowych obciążonych w swej płaszczyźnie.

W każdej płaskiej konstrukcji prętowej można wyszczególnić trzy rodzaje prętów, różniących się liczbą sił brzegowych. Pierwszą grupę stanowią pręty obustronnie przegubowo połączone z resztą konstrukcji, w których występują cztery nieznane



Rys. 15.1

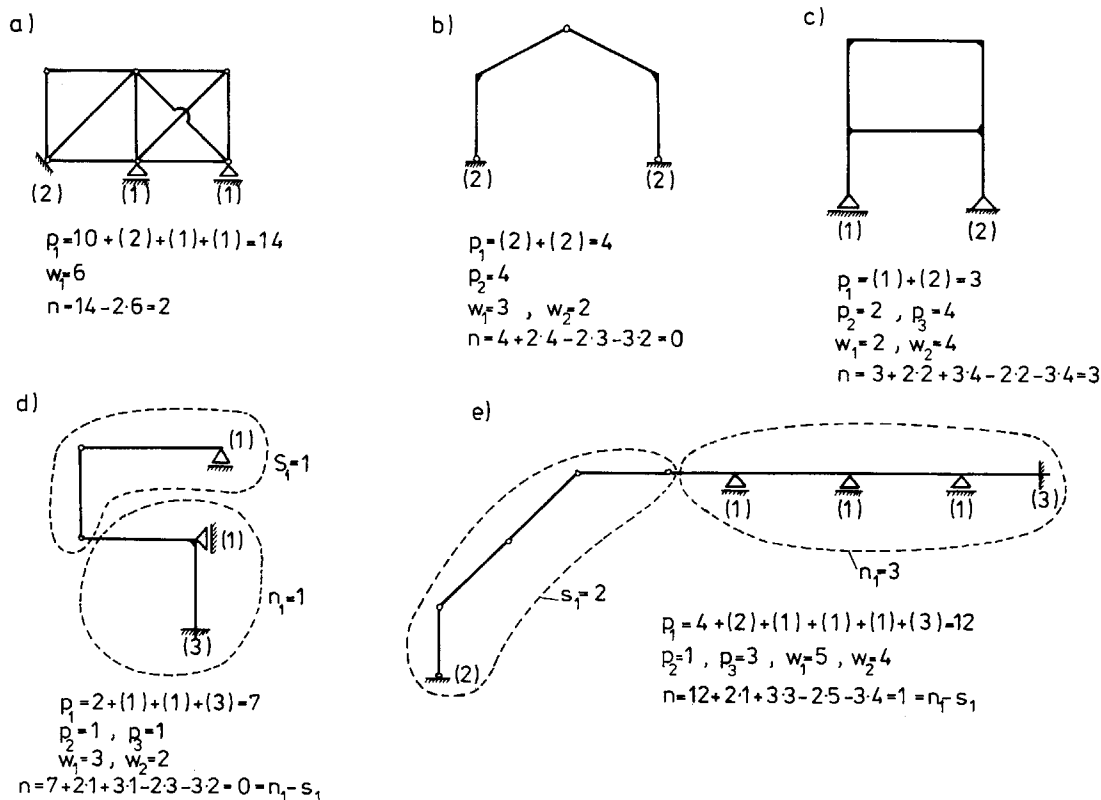
siły brzegowe (rys. 15.1a). Liczbę tych prętów oznaczmy przez p_1 . Druga grupa, określona liczbą p_2 , to pręty z jednej strony połączone przegubowo, a z drugiej utwierdzone, o pięciu składowych siłach brzegowych (rys. 15.1b). Pręty obustronnie utwierdzone w liczbie p_3 mają sześć składowych sił brzegowych (rys. 15.1c). Dla każdego z wyszczególnionych prętów można ułożyć trzy równania równowagi. Wobec tego liczbę nieznanymi sił brzegowych wyraża zależność:

$$(4p_1 - 3p_1) + (5p_2 - 3p_2) + (6p_3 - 3p_3) = p_1 + 2p_2 + 3p_3.$$

Poszczególne pręty są połączone między sobą w węzłach, dla których także można ułożyć równania równowagi. Rozróżniamy dwa rodzaje węzłów. Pierwszy to węzły, w których wszystkie pręty są połączone przegubowo (rys. 15.1d). Dla każdego takiego węzła można ułożyć tylko dwa równania równowagi sił (równanie momentów jest spełnione tożsamościowo). Liczbę węzłów przegubowych oznaczmy przez w_1 . Drugi rodzaj stanowią wszystkie inne węzły w liczbie w_2 , w których choćby dwa pręty są między sobą połączone w sposób sztywny (rys. 15.1e, f). Dla każdego takiego węzła można ułożyć trzy równania równowagi (dwie sumy rzutów sił i suma momentów). Ostatecznie liczba niewiadomych sił:

$$n = p_1 + 2p_2 + 3p_3 - 2w_1 - 2w_2. \quad (15.1)$$

Liczba n określa stopień statycznej niewyznaczalności konstrukcji. Trzeba dodać, że w liczbie prętów p_1 oraz węzłów w_1 i w_2 należy uwzględnić wszystkie pręty i węzły podporowe. Przykłady zastosowania wzoru (15.1) podano na rys. 15.2, na którym w nawiasach zaznaczono liczbę prętów podporowych.



Rys. 15.2

W układach statycznie wyznaczalnych liczba n musi być równa zero (por. np. rys. 15.2b):

$$n = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 2w_1 - 3w_2 = 0. \quad (15.2)$$

Stosownie do uwag z p. 14.10 przypominamy, że jest to tylko warunek konieczny. Mechaniczne stosowanie wzorów (15.1) lub (15.2) prowadzi do istotnych błędów. Zdarza się bowiem tak, że w pewnych fragmentach konstrukcja może być przesztyniowana (statycznie niewyznaczalna), a w innych – geometrycznie zmienna. Wówczas globalna wartość n dla całej konstrukcji jest różnicą między stopniem statycznej niewyznaczalności fragmentu przesztyniowanego n_1 a liczbą stopni swobody części geometrycznie zmiennej s_1 , tzn. $n = n_1 - s_1$. Przykłady takich pułapek ilustrują rys. 15.2d, e. Ogólnym sposobem identyfikacji układów geometrycznie zmiennych jest badanie rzędu macierzy zgodności geometrycznej (por. p. 14.10.4).

15.2. OBLICZANIE SIŁ WEWNĘTRZNYCH

W tym punkcie zilustrujemy analityczną postać metody statycznej i metodę kinematyczną. W metodzie statycznej wykorzystuje się ogólną zasadę wyznaczania sił wewnętrznych, polegającą na badaniu równowagi jednej myślowo wydzielonej części konstrukcji. Metoda kinematyczna opiera się na równaniu pracy wirtualnej przy wirtualnym stanie przemieszczeń ułożonym dla układu ciał idealnie sztywnych połączonych stosownie dobranymi więzami (równanie (14.8)).

Przyczyną pojawienia się reakcji podporowych R i sił wewnętrznych Y są obciążenia F . W równaniach równowagi wielkości te występują zawsze w pierwszej potęgze; tworzą zatem funkcje liniowe. Wobec tego dla przyczyny (obciążenia) i skutków (reakcje, siły wewnętrzne) obowiązuje zasada superpozycji:

$$\begin{cases} R(F_1, \dots, F_m) = R_1(F_1) + R_2(F_2) + \dots + R_m(F_m), \\ Y(F_1, \dots, F_m) = Y_1(F_1) + Y_2(F_2) + \dots + Y_m(F_m), \end{cases} \quad (15.3)$$

przy czym indeksy reakcji i sił wewnętrznych odpowiadają kolejnym numerom obciążeń.

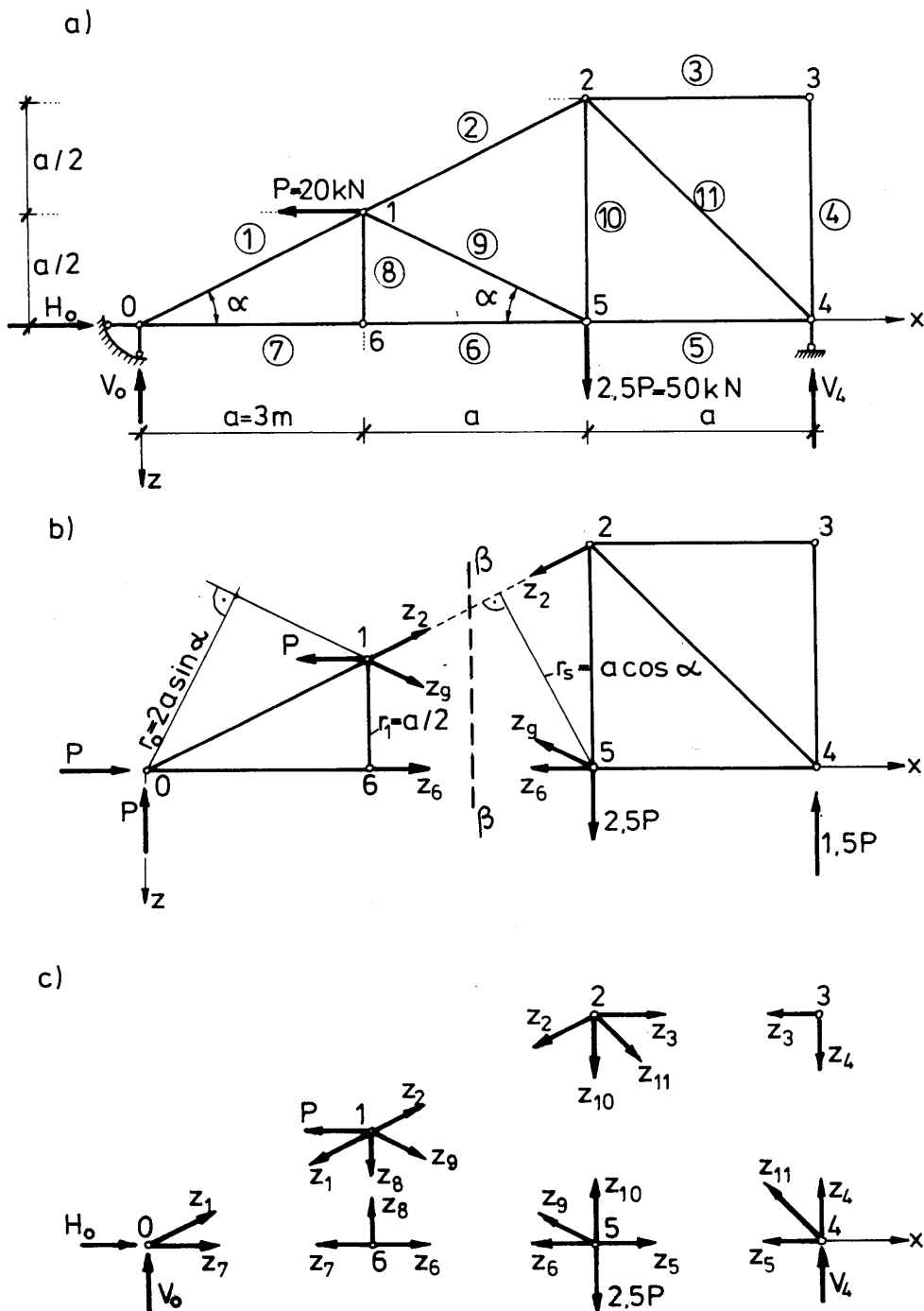
Równania (15.3) są słuszne dla dowolnego materiału, również nieliniowego. Jedynym ograniczeniem jest przyjęcie zasady zesztynienia. Dla jasności trzeba jednak dodać, że zasada superpozycji na ogół nie

dotyczy naprężeń. Wyjątek stanowią układy kratowe i pewne inne przypadki szczególne. Rozszerzenie zasady superpozycji nie tylko na naprężenia ale i na odkształcenie i przemieszczenie jest słuszne dla materiałów liniowo-sprężystych.

15.2.1. Przykłady zastosowania metody statycznej

Przykład 1

Obliczyć siły w prętach kratownicy przedstawionej na rys. 15.3a.



Rys. 15.3

Rozwiązanie

Osie prętów kratownicy tworzą siatkę trójkątną, co przy trzech składowych reakcji świadczy o tym, że konstrukcja jest geometrycznie niezmienna ($s = 0$) i statycznie wyznaczalna ($n = 0$).

a. Obliczenie reakcji

$$\begin{aligned}\sum P_x &= H_0 - P = 0; \quad H_0 = P, \\ \sum M_4 &= 3aV_0 - 0,5aP - 2,5aP = 0; \quad V_0 = P, \\ \sum M_0 &= -3aV_4 + 2,5 \cdot 2aP - 0,5aP = 0; \quad V_4 = 1,5P.\end{aligned}$$

Sprawdzenie:

$$\sum P_z = 2,5P - V_0 - V_4 = 0.$$

b. Obliczenie sił w prętach

Podzielimy kratownicę na dwie części przekrojem $\beta - \beta$ (rys. 15.3b). Mamy do dyspozycji trzy równania równowagi, z których można wyznaczyć trzy siły: Z_2 , Z_6 i Z_9 . Zakładamy pierwotnie, że siły te są dodatnie, czyli zwroty ich odpowiadają rozciąganiu prętów. Rozważmy przykładowo równowagę prawej części kratownicy. Ułożymy kolejno równanie równowagi momentów względem punktów 0, 1 i 5. Użytkamy wówczas rozprężenie układu równań liniowych względem niewiadomych Z_9 , Z_6 i Z_2 :

$$\begin{aligned}\sum M_0 &= 3a \cdot 1,5P - 2a \cdot 2,5P + Z_9 \cdot r_0 = 0, \quad Z_9 = \left(\frac{Pa}{2} \right) / r_0 = \frac{\sqrt{5}}{4} P, \\ \sum M_1 &= 2a \cdot 1,5P - a \cdot 2,5P - Z_6 \cdot r_1 = 0, \quad Z_6 = \left(\frac{Pa}{2} \right) / r_1 = P, \\ \sum M_5 &= a \cdot 1,5P + Z_2 \cdot r_5 = 0, \quad Z_2 = \left(-\frac{3Pa}{2} \right) / r_5 = -\frac{3\sqrt{5}}{4} P.\end{aligned}$$

Wartość siły Z_9 można uważać za iloraz momentu sił zewnętrznych rozważanej części kratownicy względem punktu 0 i ramienia siły Z_9 względem tego punktu:

$Z_9 = M_0(P)/r_0$. Punkt 0 jest punktem przecięcia osi pozostałych dwóch prętów przekroju $\beta - \beta$, tzn. prętów Z_2 i Z_6 . Podobnie obliczamy $Z_6 = M_1(P)/r_1$ oraz $Z_2 = M_5(P)/r_5$. Ogólnie można zapisać, że

$$Z_i = \frac{M_k(P)}{r_k(i)}. \quad (15.4)$$

Przedstawiony wyżej sposób wyznaczania sił w prętach kratownicy nosi nazwę metody *Rittera*, a punkt k nazywa się punktem *Rittera*.

Wszystkie siły w prętach kratownicy, łącznie z reakcjami, można również obliczyć z równań równowagi myślowo wyciętych węzłów kratownicy, czyli za pomocą tzw. metody równoważenia węzłów. Jest to najogólniejsza metoda analityczna rozwiązywania kratownic. W naszym zadaniu otrzymujemy (rys. 15.3c):

$$\begin{aligned}\text{Węzeł "0":} \quad \sum P_x &= H_0 + Z_7 + Z_1 \cdot \cos \alpha = 0 \\ \sum P_z &= -V_0 - Z_1 \cdot \sin \alpha = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Węzeł "1":} \quad & \sum P_x = -P - Z_1 + Z_1 \cdot \cos \alpha + Z_2 \cdot \cos \alpha + Z_9 \cdot \cos \alpha = 0 \\
& \sum P_z = Z_8 + Z_1 \cdot \sin \alpha - Z_2 \cdot \sin \alpha = 0, \\
\text{Węzeł "2":} \quad & \sum P_x = -Z_2 \cdot \cos \alpha + Z_3 + Z_{11} \cdot \cos 45^\circ = 0 \\
& \sum P_z = Z_{10} + Z_2 \cdot \sin \alpha + Z_{11} \cdot \cos 45^\circ = 0, \\
\text{Węzeł "3":} \quad & \sum P_x = -Z_3 = 0 \\
& \sum P_z = Z_4 = 0, \\
\text{Węzeł "4":} \quad & \sum P_x = -Z_5 - Z_5 - Z_{11} \cdot \cos 45^\circ = 0 \\
& \sum P_z = V_4 - Z_4 - Z_{11} \cdot \cos 45^\circ = 0, \\
\text{Węzeł "5":} \quad & \sum P_x = Z_5 - Z_6 - Z_9 \cdot \cos \alpha = 0 \\
& \sum P_z = 2,5P - Z_{10} - Z_9 \cdot \sin \alpha = 0, \\
\text{Węzeł "6":} \quad & \sum P_x = Z_6 - Z_7 = 0 \\
& \sum P_z = -Z_8 = 0.
\end{aligned}$$

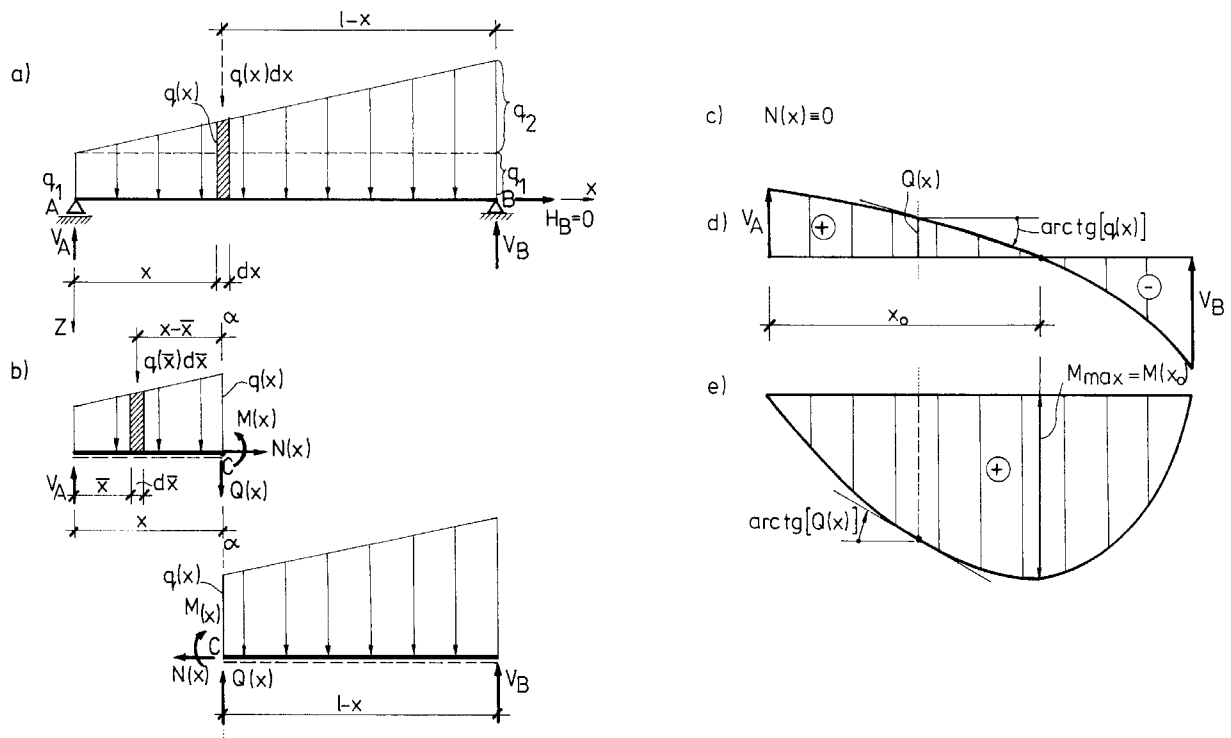
W powyższych równaniach występuje jedenaście niewiadomych sił w prętach Z_i ($i = 1, 2, \dots, 11$) oraz trzy reakcje podporowe H_0 , V_0 i V_0 . Łączna liczba równań odpowiada zatem liczbie niewiadomych. Rozwiązanie tego układu istnieje, jeżeli jego wyznacznik główny jest różny od zera. Zerowa wartość tego wyznacznika świadczy o tym, że układ jest geometrycznie zmienny. W rozważanym zadaniu otrzymujemy rozwiązanie jednoznaczne, a obliczane wartości sił w prętach kratownicy zamieszczono w tablicy I (kolumna 4).

Tablica I

Nr	l_i	A_i	Z_i	\bar{Z}_i	Δl_i^0	E_i	$\frac{Z_i \cdot l_i}{E_i \cdot A_i}$	$\frac{\bar{Z}_i \cdot Z_i \cdot l_i}{E_i \cdot A_i}$	$\bar{Z}_i \cdot \Delta l_i^0$
	[m]	[m ²]	[kN]	[-]	[m]	[kN/m ²]	[m]	[m]	[m]
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3,35	$2 \cdot 10^{-2}$	-44,70	0	0	$1 \cdot 10^7$	$-7,49 \cdot 10^{-4}$	0	0
2	3,35	$2 \cdot 10^{-2}$	33,50	0	-0,02	$1 \cdot 10^7$	$-5,61 \cdot 10^{-4}$	0	0
3	3,00	$2 \cdot 10^{-2}$	0	-0,707	0,03	$1 \cdot 10^7$	0	0	$-212 \cdot 10^{-4}$
4	3,00	$2 \cdot 10^{-2}$	0	-0,707	0	$1 \cdot 10^7$	0	0	0
5	3,00	$3 \cdot 10^{-4}$	30,00	-0,707	0	$2 \cdot 10^8$	$15,00 \cdot 10^{-4}$	$-10,60 \cdot 10^{-4}$	0
6	3,00	$3 \cdot 10^{-4}$	20,00	0	0	$2 \cdot 10^8$	$10,00 \cdot 10^{-4}$	0	0
7	3,00	$3 \cdot 10^{-4}$	20,00	0	0	$2 \cdot 10^8$	$10,00 \cdot 10^{-4}$	0	0
8	1,50	$2 \cdot 10^{-4}$	0	0	0	$2 \cdot 10^8$	0	0	0
9	3,35	$2 \cdot 10^{-4}$	11,20	0	0	$2 \cdot 10^8$	$9,38 \cdot 10^{-4}$	0	0
10	3,00	$3 \cdot 10^{-4}$	45,00	-0,707	-0,08	$2 \cdot 10^8$	$22,50 \cdot 10^{-4}$	$-15,90 \cdot 10^{-4}$	0
11	4,24	$2 \cdot 10^{-2}$	-42,40	1,000	0	$1 \cdot 10^7$	$9,05 \cdot 10^{-4}$	$9,05 \cdot 10^{-4}$	$565 \cdot 10^{-4}$
									$-17,45 \cdot 10^{-4}$
									$353 \cdot 10^{-4}$

Przykład 2

Wyznaczyć reakcje i siły wewnętrzne w belce przedstawionej na rys. 15.4a.



Rys. 15.4

Rozwiązanie

Obciążenie belki określa funkcja ciągła:

$$(a) \quad q_z(x) = q(x) = q_1 + q_2 \frac{x}{l}.$$

a. Obliczenie reakcji (rys. 15.4a)

$$\begin{aligned} \sum P_x &= H_B = 0, \\ \sum M_B &= V_A l - \int_0^l q(x)(l-x) dx = 0, \\ V_A &= \frac{1}{l} \int_0^l \left(q_1 + q_2 \frac{x}{l} \right) (l-x) dx = \frac{1}{2} q_1 l + \frac{1}{6} q_2 l, \\ \sum M_A &= V_B l - \int_0^l q(x)x dx = 0, \\ V_B &= \frac{1}{l} \left(\frac{1}{2} q_1 l^2 + \frac{1}{3} q_2 l^2 \right) = \frac{1}{2} q_1 l + \frac{1}{3} q_2 l. \end{aligned}$$

Sprawdzenie:

$$\sum P_z = V_A + V_B - \int_0^l q(x) dx = q_1 l + \frac{1}{2} q_2 l - \int_0^l \left(q_1 + q_2 \frac{x}{l} \right) dx = 0.$$

b. Obliczenie sił wewnętrznych (rys. 15.4b)

Dokonamy myślowego rozcięcia belki przekrojem $\alpha\text{--}\alpha$, usytuowanym w odległości x od lewej podpory. Na płaszczyznach przekroju występują siły wewnętrzne $N(x)$, $Q(x)$ i $M(x)$. W celu wyznaczenia tych sił zbadamy równowagę jednej z części belki. Przykładowo dla lewej części otrzymujemy równania:

$$\begin{aligned} \sum P_x &= N(x) = 0, \\ \sum P_z &= -V_A + \int_0^x q(\bar{x}) \cdot d\bar{x} + Q(x) = 0, \end{aligned}$$

skąd

$$(b) \quad Q(x) = V_A - \int_0^x \left(q_1 + q_2 \frac{\bar{x}}{l} \right) d\bar{x} = V_A - q_1 x - \frac{1}{2} q_2 \frac{x^2}{l},$$

$$\sum M_C = V_A \cdot x - \int_0^x q(\bar{x})(x - \bar{x}) d\bar{x} - M(x) = 0,$$

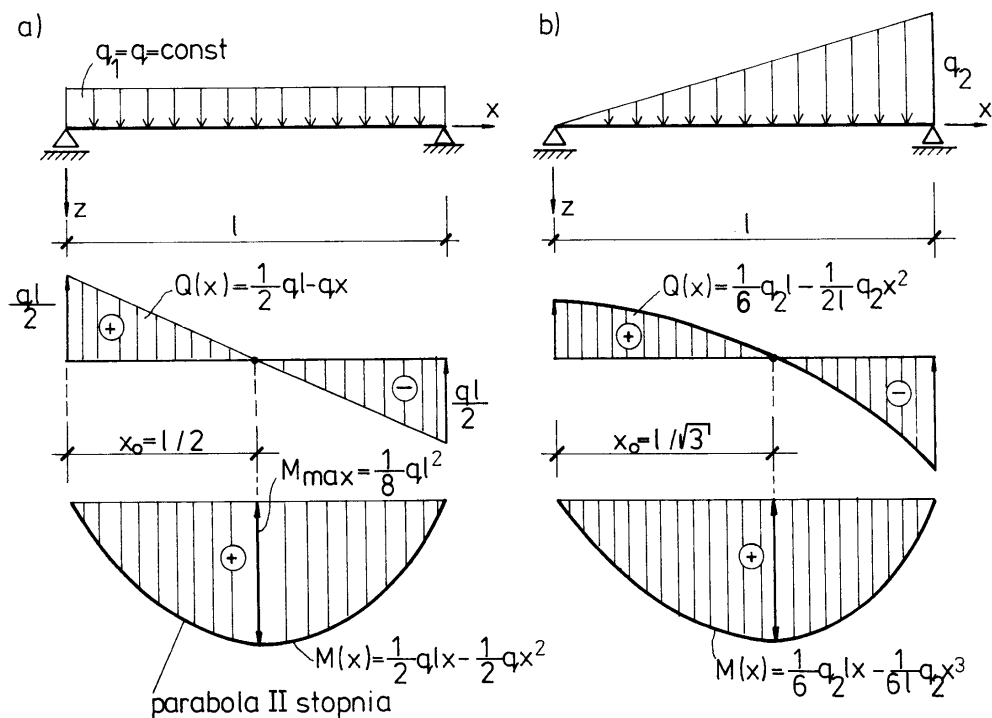
skąd

$$(c) \quad M(x) = V_A x - \frac{1}{2} q_1 x^2 - \frac{1}{6} q_2 \frac{x^3}{l}.$$

Wykresy funkcji $Q(x)$ i $M(x)$ przedstawiono na rys. 15.4c, d. Łatwo zauważyć, że stosownie do wzorów (14.26) wartość bezwzględna funkcji obciążenia $q(x)$ jest pochodną funkcji siły poprzecznej $Q(x)$, a siła poprzeczna $Q(x)$ jest z kolei pochodną funkcji momentu zginającego $M(x)$. Oznacza to, że wykres $q(x)$ jest wykresem tangensa kąta nachylenia stycznej do krzywej $Q(x)$, a wykres $Q(x)$ jest wykresem tangensa kąta nachylenia stycznej do krzywej $M(x)$. Zilustrowano to rysunkami 15.4c, d. Ekstremum funkcji $M(x)$ wypada dla przekroju $x = x_0$, w którym siła poprzeczna jest równa zeru: $Q(x_0) = 0$.

Warto zwrócić uwagę, że jeżeli wykres $M(x)$ odłożymy po stronie włókien rozciąganych, to od lewej strony ku prawej wykres $M(x)$ opada, gdy $Q(x) > 0$, natomiast wznosi się, gdy $Q(x) < 0$. Jest to ogólna prawidłowość słuszna dla prętów zginanych poprzecznie.

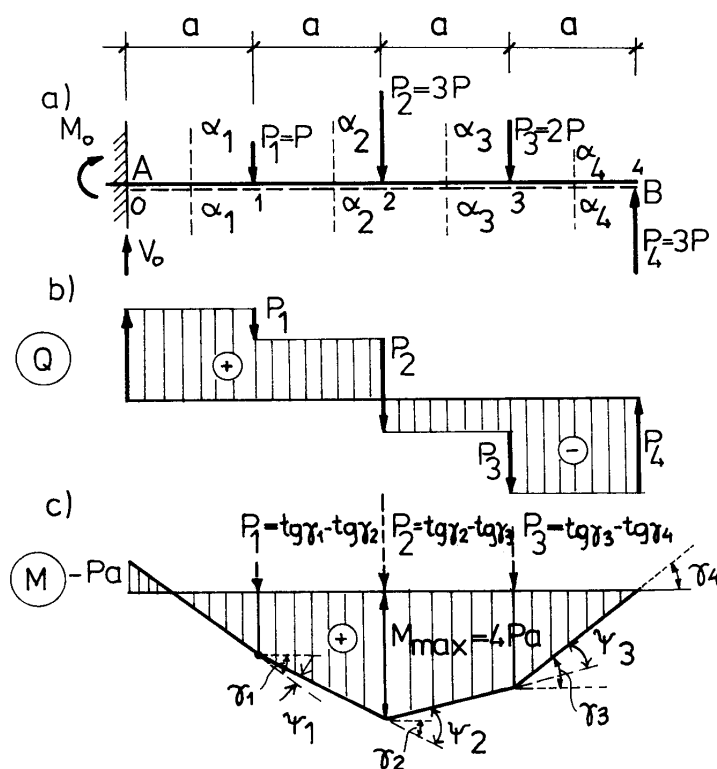
W przypadku szczególnym, gdy $q_2 = 0$ i $q_1 \neq 0$, otrzymujemy rozwiązanie dla belki równomiernie obciążonej ($q_1 = q = \text{const}$, por. rys. 15.5a). Dla $q_2 \neq 0$, $q_1 = 0$ (obciążenie trójkątne) wykresy sił wewnętrznych obrazuje rysunek 15.5b.



Rys. 15.5

Przykład 3

Obliczyć reakcje i siły wewnętrzne w belce wspornikowej, obciążonej siłami skupionymi (rys. 15.6a).



Rys. 15.6

Rozwiązanie*a. Obliczenie reakcji*

$$\begin{aligned}\sum P_x &= 0, \\ \sum P_z &= V_0 - P_1 - P_2 - P_3 + P_4 = 0; \quad V_0 = P + 3P + 2P - 3P = 3P, \\ \sum M_A &= M_0 + P_1 \cdot a + P_2 \cdot 2a + P_3 \cdot 3a - P_4 \cdot 4a = -Pa. \\ M_0 &= -Pa - 3P \cdot 2a - 2P \cdot 3a + 3P \cdot 4a = -Pa.\end{aligned}$$

b. Obliczenie sił wewnętrznych

Równania sił wewnętrznych zmieniają się w punktach przyłożenia sił skupionych. Równania te układamy, dokonując kolejno przekrojów $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ i α_4 , usytuowanych w poszczególnych przedziałach, w których obciążenie $q(x)$ jest funkcją ciągłą. W rozważanym zadaniu w każdym z tych przedziałów obciążenie to jest równe zero ($q(x) = 0$). Ostatecznie otrzymujemy:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < x < a: \\ Q(x) = V_0 = 3P = \text{const}, \quad M(x) = M_0 + V_0 \cdot x = P(-a + 3x); \\ a < x < 2a: \\ Q(x) = V_0 - P_1 = 2P = \text{const}, \quad M(x) = M_0 - P_0 + V_0 \cdot x - P_1(x - a) = 2Px; \\ 2a < x < 3a: \\ Q(x) = V_0 - P_1 - P_2 = -P = \text{const}, \\ M(x) = M_0 + V_1 \cdot x - P_1(x - a) - P_2 \cdot (x - 2a) = P(6a - x); \\ 3a < x < 4a: \\ Q(x) = V_0 - P_1 - P_2 - P_3 = -P_4 = -3P = \text{const}, \\ M(x) = M_0 + V_0 \cdot x - P_1(x - a) - P_2(x - 2a) - P_3(x - 3a) = 3P(4a - x). \end{array} \right.$$

Wykresy funkcji $Q(x)$ i $M(x)$ przedstawiają rys. 15.6b, c. Widzimy, że funkcja $Q(x)$ jest nieciągła, gdyż dla $x = ka$, ($k = 1, 2, 3, 4$) przyjmuje dwie wartości: lewostronną $Q^l(ka)$ i prawostronną $Q^p(ka)$. Różnica tych wartości $Q^l(ka) - Q^p(ka) = P_k$ i odpowiada sile skupionej przyłożonej w tym punkcie.

Moment zginający jako całka z funkcji sił poprzecznych $Q(x)$ jest ciągłą linią łamaną. W związku z tym ekstremalna wartość momentu wypada w tym przekroju, w którym siła poprzeczna zmienia znak, tzn. w punkcie 2:

$$M_{\max} = M(2a) = -Pa + 3P \cdot 2a - Pa = 4Pa.$$

Łatwo zauważyć, że różnica tangensów kątów załamania γ_{k-1} oraz γ_k wykresu momentu zginającego w punkcie $x = ka$ jest równa sile skupionej przyłożonej w tym punkcie (por. rys. 15.6c). Spostrzeżenie to ma duże znaczenie przy wyznaczaniu przemieszczeń belek sprężystych.

Przykład 4

Obliczyć belkę ciągłą przegubową przedstawioną na rys. 15.7a.

Rozwiązanie

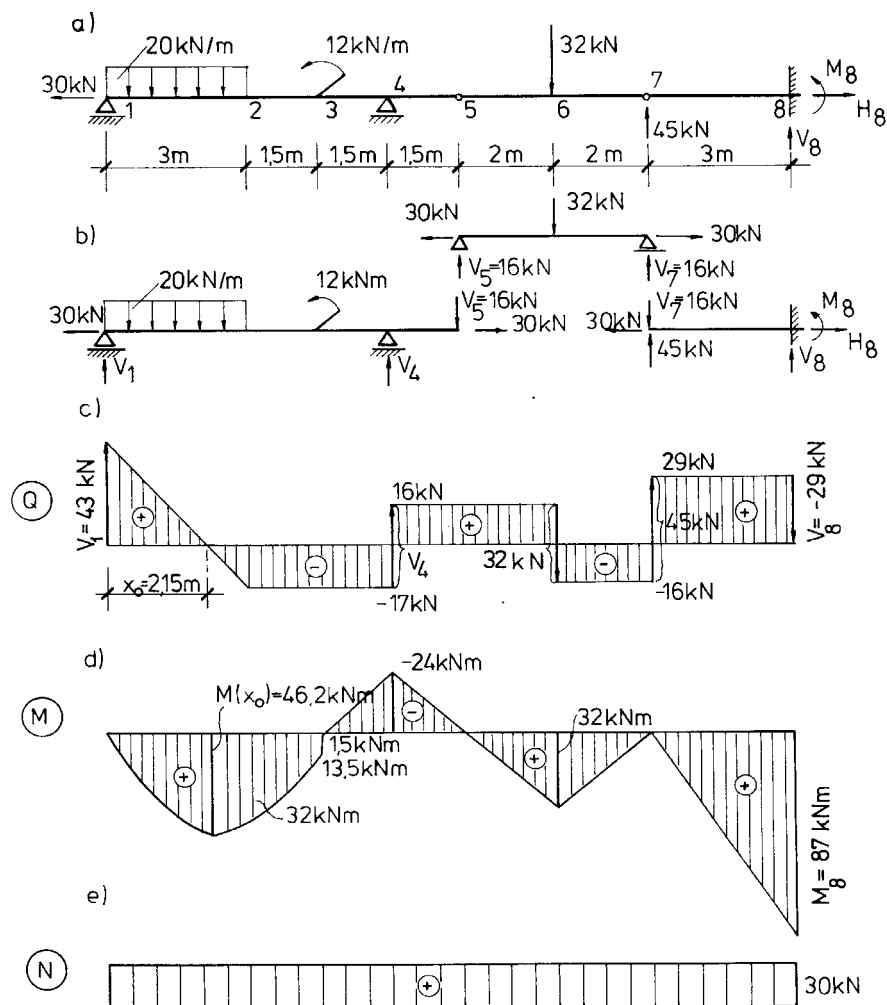
a. Wyznaczenie reakcji podporowych

Występuje pięć składowych reakcji podporowych: V_1 , V_4 , V_8 , H_8 i M_8 . Do dyspozycji mamy trzy równania równowagi dla całej belki oraz dwa warunki zerowania się momentów zginających w przegubach 5 i 7: ($M_5 = M_7 = 0$). Równania te wystarczają do wyznaczenia niewiadomych reakcji podporowych:

$$\begin{aligned}
 (e) \quad & \sum P_x = H_8 - 30 = 0, \\
 (f) \quad & M_5 = V_1 \cdot 7,5 - 20 \cdot 3 \cdot 6 - 12 + V_4 \cdot 1,5 = 0, \\
 (g) \quad & M_7 = V_1 \cdot 11,5 - 20 \cdot 3 \cdot 10 - 12 + V_4 \cdot 5,5 - 32 \cdot 2 = 0, \\
 (h) \quad & \sum M_5 = M_5 + 32 \cdot 2 - 45 \cdot 4 - V_8 \cdot 7 - M_8 = 0, \\
 (i) \quad & \sum M_7 = M_7 - V_8 \cdot 3 - M_8 = 0.
 \end{aligned}$$

Z równań (f) i (g) można wyznaczyć reakcje V_1 i V_4 , a z równań (h) oraz (i) reakcje V_8 i M_8 . Ostatecznie otrzymujemy:

$$V_1 = 43 \text{ kN}, \quad V_4 = 33 \text{ kN}, \quad V_8 = -29 \text{ kN}, \quad H_8 = 30 \text{ kN}, \quad M_8 = 87 \text{ kN}\cdot\text{m}.$$



Rys. 15.7

Te same wyniki uzyskamy, jeżeli belkę ciąglą podzielimy na trzy belki składowe. Belka 5–7 opiera się na belkach 1–5 i 7–8. Taka dekompozycja zadania bardzo ułatwia zarówno obliczenie reakcji podporowych, jak i sił wewnętrznych pod warunkiem przestrzegania odpowiedniej sekwencji obliczeń belek składowych: najpierw liczymy belkę 5–7 a następnie belki 1–5 i 7–8 obciążone reakcjami przegubów V_5 i V_7 (por. rys. 15.7b). Równowaga belki 5–7 wymaga, by $V_5 = V_7 = 16$ kN. Dzięki tej informacji wartości V_8 i M_8 można obliczyć „w głowie”: $V_8 = V_7 - 45 = -29$ kN, $M_8 = -(V_7 - 45) \cdot 3 = 87$ kN·m. Łatwo sprawdzić, że obliczenie reakcji V_1 i V_4 dla belki 1–5 prowadzi również do wartości wyznaczonych wcześniej.

b. Wyznaczenie sił wewnętrznych

Ograniczymy się tylko do obliczenia sił wewnętrznych w charakterystycznych punktach belki. Przebieg funkcji między tymi punktami określimy na podstawie zależności różniczkowych (14.25) i obliczeń pomocniczych.

Siły poprzeczne:

$$\begin{aligned} Q_1^l &= 0; & Q_1^p &= V_1 = 43 \text{ kN}, \\ Q_2 &= Q_3 = Q_4^l &= 43 - 20 \cdot 3 &= -17 \text{ kN}, \\ Q_4^p &= Q_5; & Q_6^l &= -17 + 33 = 16 \text{ kN}, \\ Q_6^p &= Q_7^l &= 16 - 32 &= -16 \text{ kN}, \\ Q_7^p &= Q_8^l &= -16 + 45 &= 29 \text{ kN} = -V_8, \\ Q_8^p &= 0. \end{aligned}$$

Momenty zginające:

$$\begin{aligned} M_1 &= 0, & M(x_0) &= 43 \cdot x_0 - 20 \cdot \frac{x_0^2}{2} = 43 \cdot 2,15 - 20 \cdot \frac{2,15^2}{2} = 46,2 \text{ kN} \cdot \text{m}, \\ M_2 &= 43 \cdot 3 - 20 \cdot 3^2 \cdot 0,5 = 39 \text{ kN} \cdot \text{m}, \\ M_3^l &= 43 \cdot 4,5 - 60 \cdot 3 = 13,5 \text{ kN} \cdot \text{m}, & M_3^p &= M_3^l - 12 = 1,5 \text{ kN} \cdot \text{m}, \\ M_4 &= -16 \cdot 1,5 = -24 \text{ kN} \cdot \text{m}, & M_5 &= 0, M_6 = 16 \cdot 2 = 32 \text{ kN} \cdot \text{m}, \\ M_7 &= 0, & M_8 &= 30 \text{ kN} \cdot \text{m}. \end{aligned}$$

Siły normalne:

$$N(x) = H_8 = 30 \text{ kN} = \text{const.}$$

Wykresy sił wewnętrznych podano na rys. 15.7c, d, e.

Przykład 5

Wyznaczyć siły wewnętrzne w układzie trójprzegubowym przedstawionym na rys. 15.8.

Rozwiązanie

a. Obliczenie reakcji podporowych

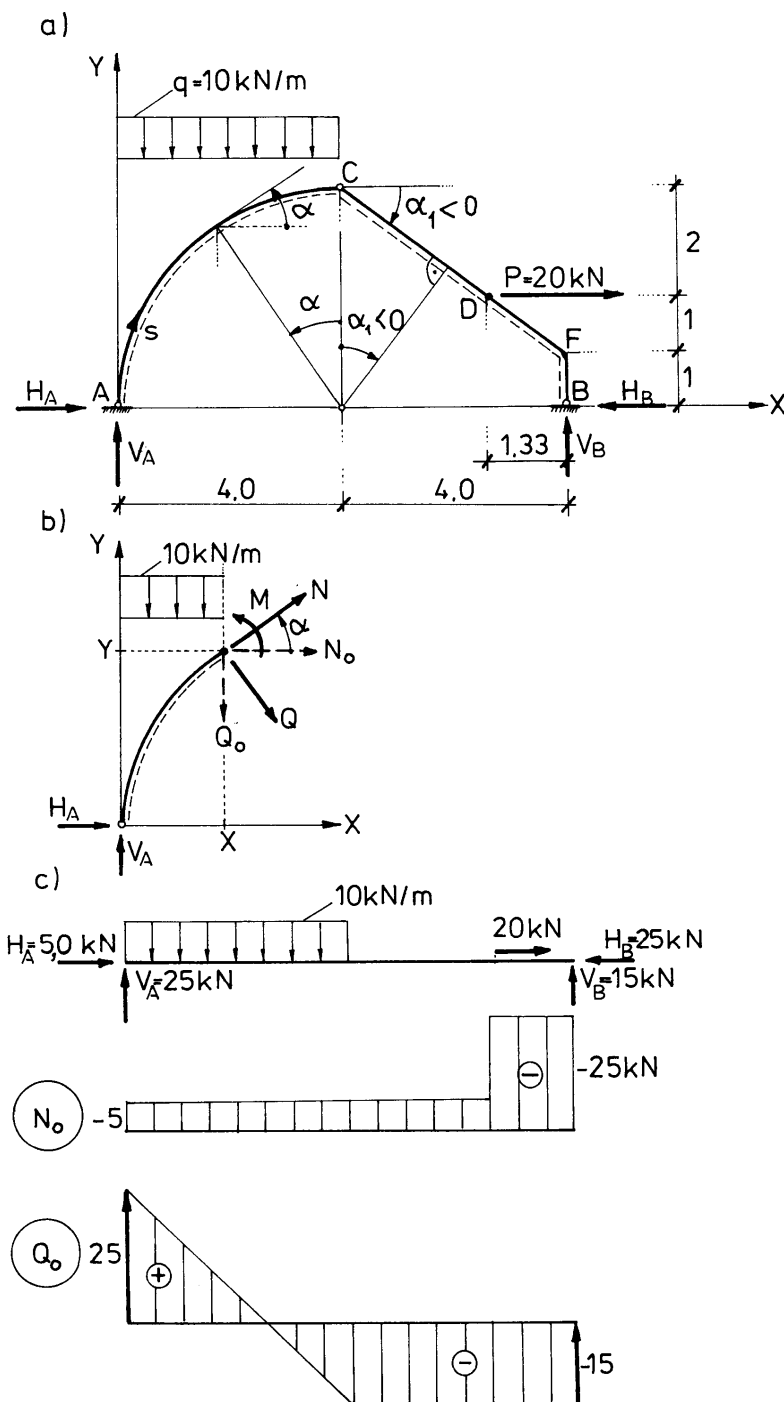
Cztery składowe reakcje V_A, H_A, V_B, H_B obliczamy z trzech równań równowagi dla całego układu oraz jednego równania wyrażającego zerową wartość momentu zginającego w przegubie C ($M_C = 0$).

$$\sum M_B = V_A \cdot 8 - 10 \cdot 4 \cdot 6 + 20 \cdot 2 = 0, \quad V_A = \frac{200}{8} = 25 \text{ kN},$$

$$\sum M_A = -V_B \cdot 8 + 20 \cdot 2 + 10 \cdot 4 \cdot 2 = 0, \quad V_B = \frac{120}{8} = 15 \text{ kN},$$

$$M_C = V_A \cdot 4 - 10 \cdot 4 \cdot 2 - H_A \cdot 4 = 0, \quad H_A = \frac{1}{2} \cdot (15 \cdot 4 - 80) = 5 \text{ kN},$$

$$\sum P_x = H_A - H_B + 20 = 0, \quad H_B = 5 + 20 = 25 \text{ kN}.$$



Rys. 15.8

b. Obliczenie sił wewnętrznych

W obliczeniach elementów łukowych i prętów o osi załamanej bardzo użyteczne są wzory wynikające z rys. 15.8b:

$$\left. \begin{aligned} N &= N_0 \cos \alpha - Q_0 \sin \alpha, \\ Q &= N_0 \sin \alpha + Q_0 \cos \alpha, \end{aligned} \right\} \quad (15.5)$$

gdzie N_0 i Q_0 oznaczają siły normalną i poprzeczną, obliczone jak dla belki poziomej. Dla łuku kołowego AC mamy:

$$\begin{aligned} X &= R(1 - \sin a), & Y &= R \cos a, \\ N_0 &= -5 \text{ kN}, & Q_0 &= V_C = V_A - qX = 25 - 40(1 - \sin a) = -15 + 40 \sin a, \end{aligned}$$

skąd

$$(j) \quad \begin{cases} N(\alpha) = -5 \cdot \cos \alpha - (-15 + 40 \cdot \sin \alpha) \sin \alpha, \\ Q(\alpha) = -5 \cdot \sin \alpha + (-15 + 40 \cdot \sin \alpha) \cos \alpha, \\ M(\alpha) = V_A \cdot X - q \frac{X^2}{2} - H_A \cdot Y = R(1 - \sin \alpha) \left[V_A - \frac{1}{2} q R (1 - \sin \alpha) \right] - H_A R \cos \alpha = \\ \quad = 20 \cdot [(1 - \sin \alpha)(1 + 4 \sin \alpha) - \cos \alpha]. \end{cases}$$

Potwierdzeniem poprawności uzyskanego wyniku jest to, że jest spełniona zależność (14.28)₃:

$$\frac{dM}{ds} = -\frac{1}{R} \cdot \frac{dM}{d\alpha} = -5(\sin \alpha + 3 \cdot \cos \alpha - 8 \cdot \sin \alpha \cos \alpha) = Q(\alpha).$$

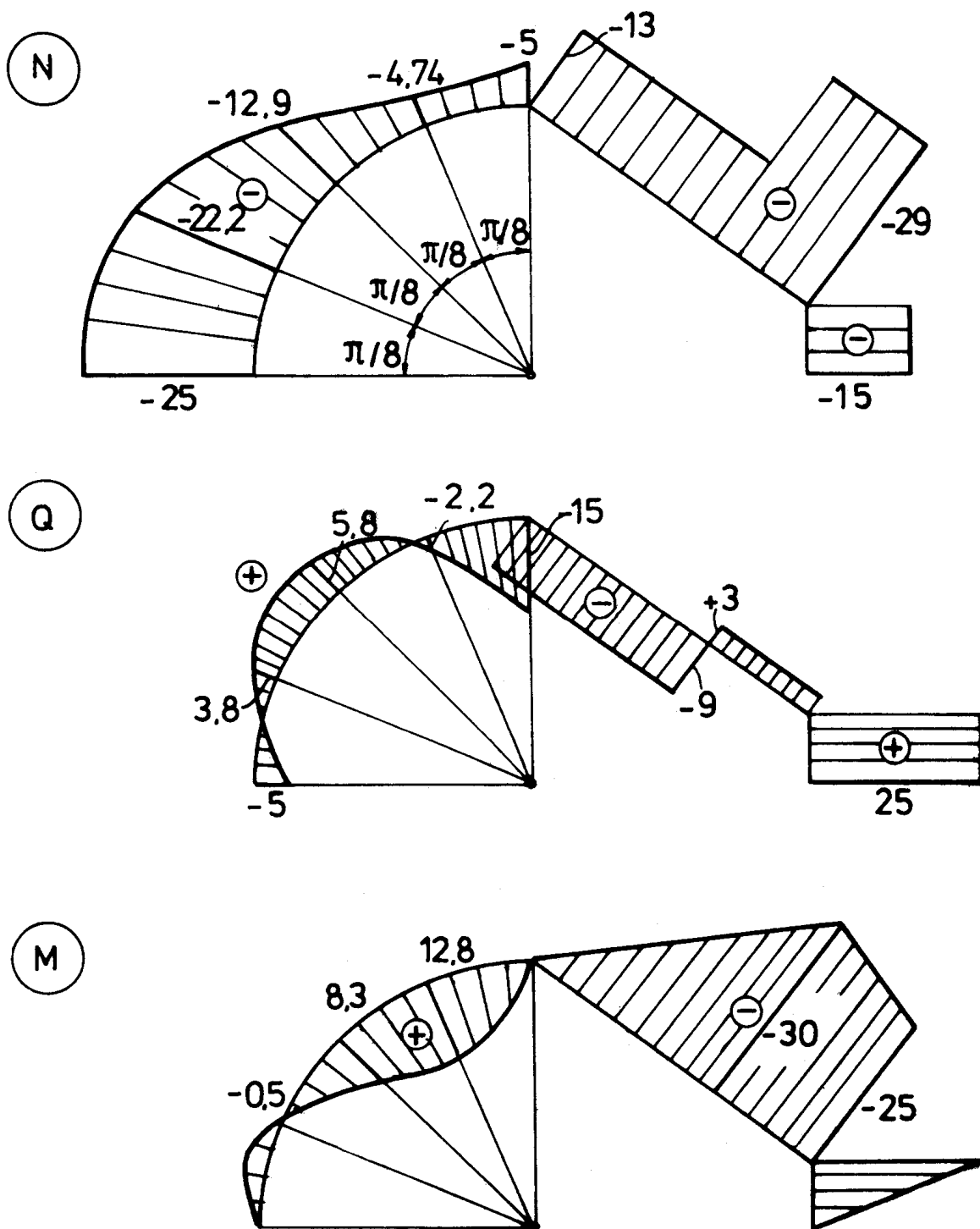
Na odcinku pochyłym CE kąt $\alpha = \alpha_1$ i jest ujemny: $\cos \alpha_1 = 0,80$; $\sin \alpha_1 = -0,60$. Wobec tego:

$$\begin{aligned} N_C^p &= N_D^l = -5 \cdot 0,8 - (-15) \cdot (-0,6) = -13 \text{ kN}, \\ Q_C^p &= Q_D^l = -5 \cdot (-0,6) + (-15) \cdot (0,8) = -9 \text{ kN}, \\ M_C &= 0, \\ N_D^p &= N_E^l = -25 \cdot 0,8 - (-15) \cdot (-0,6) = -29 \text{ kN}, \\ Q_D^p &= Q_E^l = -25 \cdot (-0,6) + (-15) \cdot (0,8) = 3 \text{ kN}, \\ M_D &= V_B \cdot 1,3 - H_B \cdot 2 = 15 \cdot 1,33 - 25 \cdot 2 = -30 \text{ kN} \cdot \text{m}. \end{aligned}$$

Na odcinku EB mamy:

$$\begin{aligned} Q_{EB} &= H_B = 25 \text{ kN} = \text{const}, \\ N_{EB} &= V_B = -15 \text{ kN} = \text{const}, \\ M_E &= -H_B \cdot 1 = -25 \text{ kN} \cdot \text{m}. \end{aligned}$$

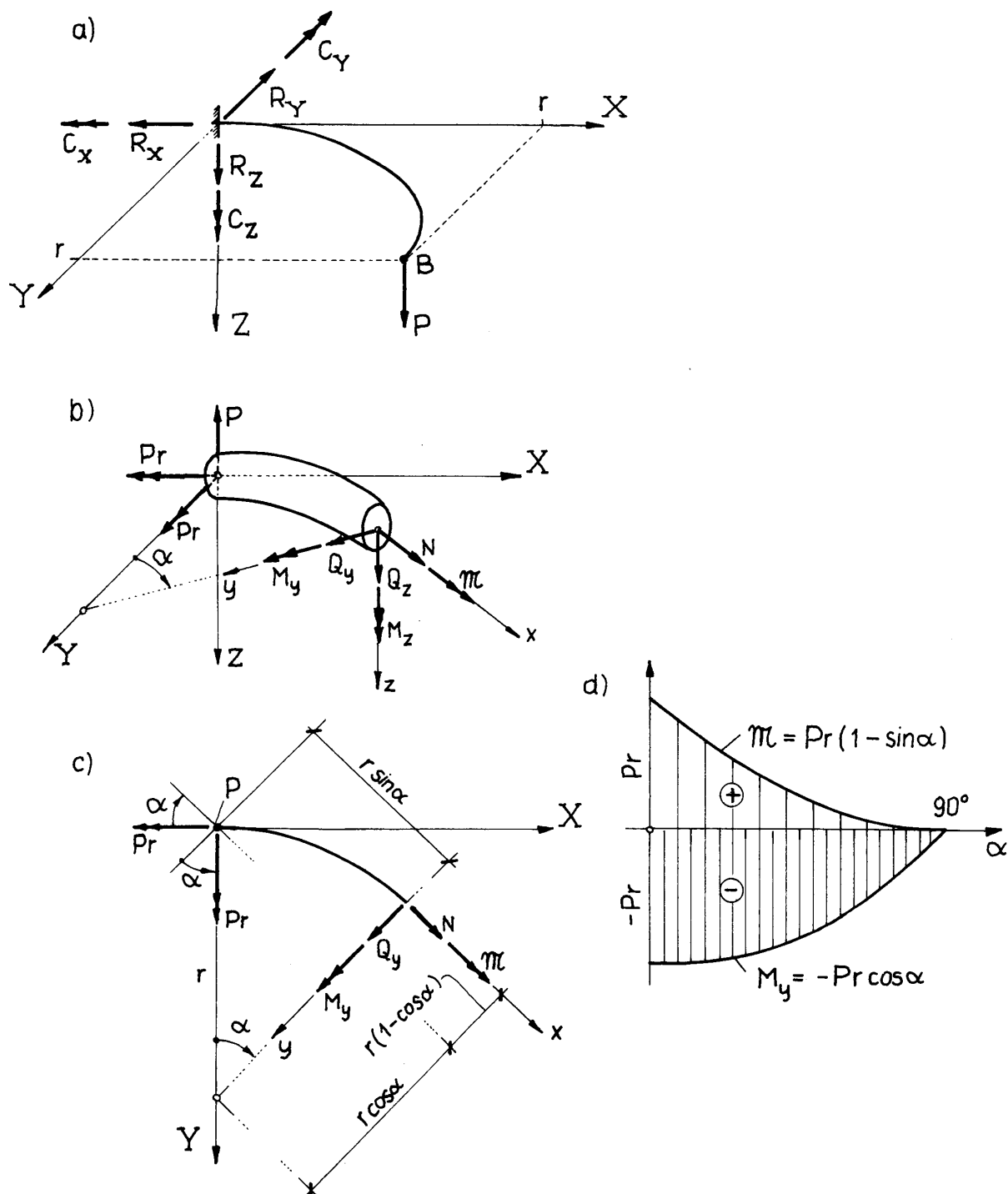
Wykresy sił wewnętrznych przedstawia rys. 15.9.



Rys. 15.9

Przykład 6

Wyznaczyć reakcje podporowe i siły wewnętrzne w płaskim łuku kołowym utwierdzonym całkowicie w punkcie A i obciążonym w punkcie B siłą P , prostopadłą do płaszczyzny łuku. Temat zadania objaśnia rys. 15.10a.



Rys. 15.10

Rozwiązanie*a. Obliczenie reakcji*

Poszukujemy składowych reakcji w przekroju utwierdzonym. Są to trzy siły R_X , R_Y i R_Z oraz trzy momenty C_X , C_Y i C_Z , odniesione do globalnego układu osi X , Y , Z . Wykorzystujemy sześć równań równowagi (por. p. 14.1):

$$\begin{aligned}\sum P_X &= -R_X = 0, & \sum P_Y &= -R_Y = 0, & \sum P_Z &= -R_Z + P = 0, \\ \sum M_{Xi} &= -C_X + P \cdot r = 0, \\ \sum M_{Yi} &= C_Y - P \cdot r = 0, \\ \sum M_{Zi} &= -C_Z = 0,\end{aligned}$$

skąd

$$R_X = R_Y = 0, \quad C_Z = 0 \quad \text{oraz} \quad R_Z = P, \quad C_X = P \cdot r, \quad C_Y = -P \cdot r.$$

Siły te zaznaczono na rys. 15.10b z uwzględnieniem aktualnych zwrotów.

b. Siły wewnętrzne

Siły wewnętrzne wyznaczmy z równań równowagi wyciętej części pręta (rys.15.10b). Dodatkowo zwroty tych sił pokrywają się ze zwrotami osi lokalnego układu współrzędnych x , y , z , względem którego układamy równania równowagi:

$$\begin{aligned}\sum P_x &= N = 0, & \sum P_y &= Q_y = 0, & \sum P_z &= Q_z - P = 0, \\ \sum M_{xi} &= \mathcal{M} - P \cdot r(1 - \cos \alpha) - P \cdot r \sin \alpha = 0, \\ \sum M_{yi} &= M_y - P \cdot r \sin \alpha + P \cdot r \sin \alpha + P \cdot r \cos \alpha = 0, \\ \sum M_{zi} &= M_z = 0.\end{aligned}$$

Na podstawie powyższego dostajemy:

$$(k) \quad \begin{cases} Q_z = P, \\ M_y = -P r \cdot \cos \alpha, \\ \mathcal{M} = P r(1 - \sin \alpha). \end{cases}$$

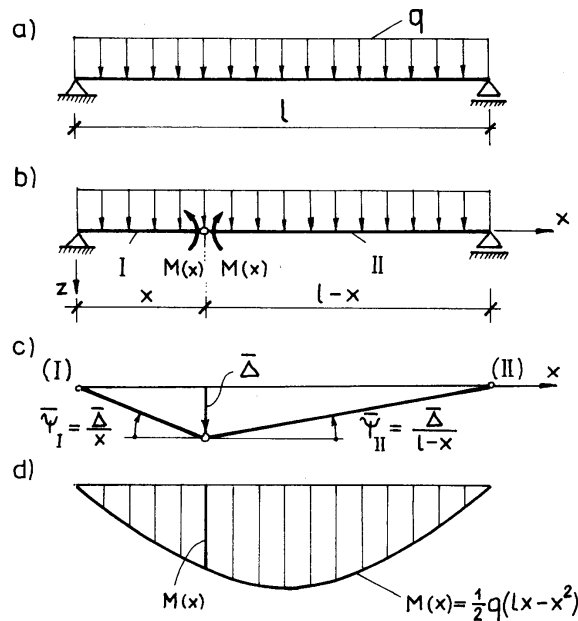
Pozostałe siły wewnętrzne są równe zero. Wykresy funkcji $M_y(\alpha)$ i $\mathcal{M}(\alpha)$ przedstawia rys. 15.10d.

15.2.2. Przykłady zastosowania metody kinematycznej. Linie wpływu wielkości statycznych

Metoda kinematyczna opiera się na wykorzystaniu zależności (14.8a), przedstawiającej równanie pracy wirtualnej dla układu ciał idealnie sztywnych:

$$\int_s \left(\sum F_i \cdot \bar{d}_i \right) ds = 0.$$

Równanie to mówi, że praca obciążeń rzeczywistych na wirtualnych przemieszczeniach układu jest równa zero. Nieodkształcalność elementów tego układu wynika z przyjęcia zasady zeszywnienia.



Rys. 15.11

Dla ilustracji podejścia kinematycznego rozważmy belkę swobodnie podpartą z rys. 15.11, poddaną obciążeniu $q(x) = q = \text{const}$ (por. również rys. 15.5a). W przekroju usytuowanym w odległości x od lewej podpory usuniemy więz uniemożliwiający obrót przekroju i jednocześnie jako obciążenie zewnętrzne wprowadzimy reakcję tego więzu, czyli moment zginający $M(x)$. Dzięki temu belka staje się układem dwóch tarcz sztywnych o jednym stopniu swobody, poddanym działaniu obciążenia q i dwóch momentów skupionych $M(x)$ (por. rys. 15.11b). Dopuszczalną kinematykę wirtualną tego układu określa jednoznacznie bardzo małe przemieszczenie $\bar{\Delta}$ (rys. 15.11c). Pracę obciążeń zewnętrznych na wirtualnych przemieszczeniach można zapisać jako iloczyn momentów tych obciążeń względnych biegunów obrotu obu tarcz i odpowiednich kątów obrotu. Stosownie do równania (14.8a) mamy:

$$(I) \quad q \cdot x \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot \bar{\psi}_I + q(l-x) \cdot \frac{1}{2} \cdot (l-x) \cdot \bar{\psi}_{II} - M(x) \cdot \bar{\psi}_I - M(x) \cdot \bar{\psi}_{II} = 0.$$

Ponieważ przemieszczenie $\bar{\Delta}$ jest bardzo małe, $\bar{\psi}_I = \bar{\Delta}/x$ oraz $\bar{\psi}_{II} = \bar{\Delta}/(l-x)$. Wobec tego równanie (I) można zapisać w postaci:

$$q \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot \frac{\bar{\Delta}}{x} + q \frac{1}{2} \cdot (l-x)^2 \cdot \frac{\bar{\Delta}}{(l-x)} - M(x) \cdot \frac{\bar{\Delta}}{x} - M(x) \cdot \frac{\bar{\Delta}}{(l-x)} = 0,$$

skąd po podzieleniu przez $\bar{\Delta}$ oraz po prostych przekształceniach otrzymujemy wzór na moment zginający:

$$M(x) = \frac{1}{2} q x(l-x) = \frac{1}{2} q lx - \frac{1}{2} q x^2,$$

który pokrywa się z równaniem (c) z przykładu 2 dla $q_2 = 0$.

Zwróćmy uwagę na interesujące własności metody kinematycznej:

- ◊ w celu obliczenia wybranej wielkości statycznej (siły wewnętrznej lub oddziaływania podpory) należy usunąć ten więz, którego reakcją jest poszukiwana wielkość statyczna;
- ◊ uzyskany w ten sposób układ o jednym stopniu swobody ma kinematykę niezależną od obciążenia;
- ◊ do wyznaczenia wybranej siły wewnętrznej nie trzeba obliczać reakcji podpór lub innych sił wewnętrznych; otrzymujemy zawsze jedno równanie jednej niewiadomej.

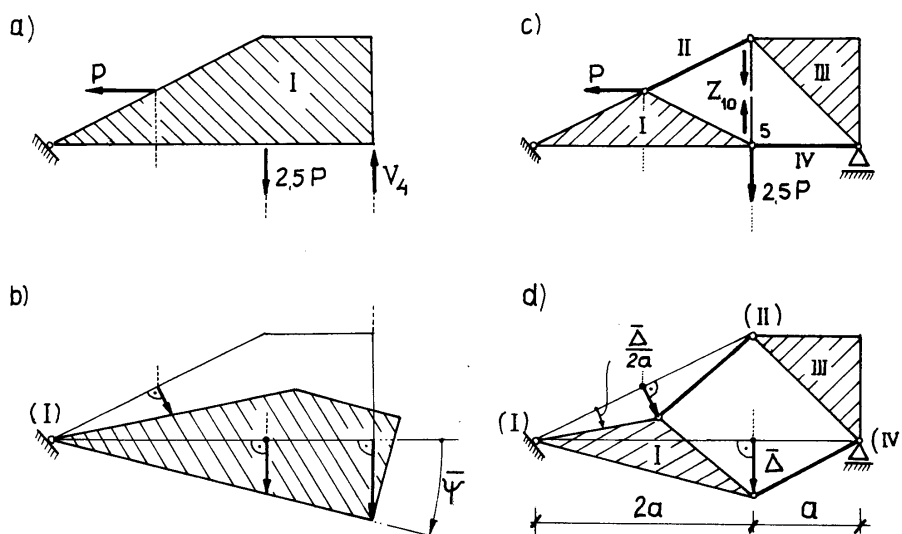
Z powyższego wynika, że równanie (14.8a) stanowi po prostu pewną kombinację liniową równań równowagi. Opisane własności metody kinematycznej wykorzystuje się również w układach statycznie niewyznaczalnych.

W dalszym ciągu zastosujemy metodę kinematyczną do wyznaczenia wybranych reakcji podporowych i sił wewnętrznych w przykładach rozwiązanych już w p. 15.2.1, gdzie stosowano metodę statyczną.

Obliczymy reakcję podporową V_4 w kratownicy z przykładu 1. W tym celu trzeba usunąć pionowy pręt podporowy i przyłożyć reakcję tego więzu, czyli siłę V_4 . Otrzymujemy jedną tarczę sztywną o jednym stopniu swobody, określonym przez bardzo mały kąt $\bar{\psi}$ (rys. 15.12a, b). Równanie (14.8a) przyjmuje postać:

$$-P \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot \bar{\psi} + 2,5 \cdot P \cdot 2a \cdot \bar{\psi} - V_4 \cdot 3a \cdot \bar{\psi} = 0,$$

skąd $V_4 = 1,5 P$. Łatwo zauważyć, że równanie pracy wirtualnej w tym przypadku odpowiada sumie momentów sił względem punktu 0.



Rys. 15.12

W celu obliczenia siły Z_{10} trzeba usunąć pręt 2–5. Otrzymujemy w ten sposób układ czterech tarcz sztywnych o jednym stopniu swobody (rys. 15.12c). Określenie kinematyki tego układu wymaga nieco więcej uwagi. Okazuje się, że tarcza III pozostaje nieruchoma, a kinematykę określa przemieszczenie $\bar{\Delta}$ punktu 5 (rys. 15.12d). Zależność (14.8a) prowadzi do równania:

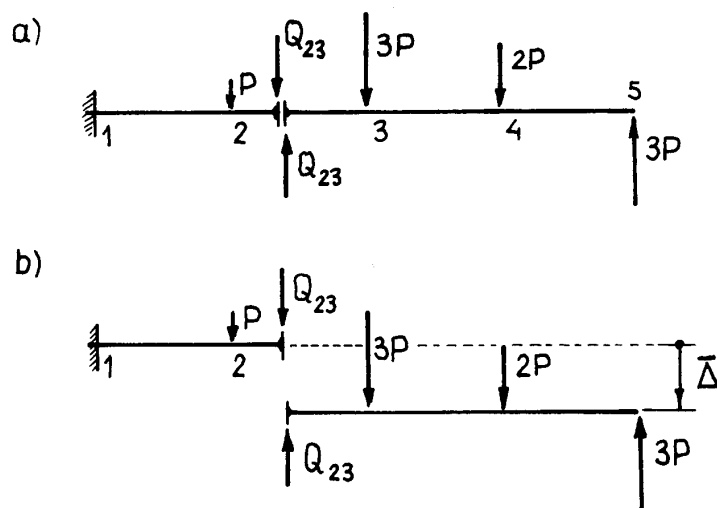
$$-P \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{\bar{\Delta}}{2a} + 2,5 \cdot P \cdot \bar{\Delta} - Z_{10} \cdot \bar{\Delta} = 0,$$

skąd

$$Z_{10} = 2,25 P = 2,25 \cdot 20 = 45 \text{ kN}.$$

Wyznamy obecnie siłę poprzeczną w przedziale 2–3 dla belki wspornikowej z przykładu 3. Należy umożliwić tylko pionowe przemieszczenia względne obu części belki w tym przedziale. Odpowiada to wprowadzeniu podpory „ślizgowej” (rys. 15.13a). Kinematykę wirtualną tego układu ilustruje rys. 15.13b. Na podstawie równania (14.8a) możemy napisać:

$$-Q_{23} \cdot \bar{\Delta} + 3 P \cdot \bar{\Delta} + 2 P \cdot \bar{\Delta} - 3 P \cdot \bar{\Delta} = 0, \quad \text{skąd} \quad Q_{23} = 2 P.$$



Rys. 15.13

Korzyści metody kinematycznej najlepiej widać na przykładzie belki ciągłej (przykład 4). Na rysunkach 15.14b–h przedstawiono kinematyki wirtualne do wyznaczenia wielkości V_4, V_8, M_8, Q_3, Q_4 oraz N_{45} . Nowym elementem jest podpora teleskopowa, którą wprowadzamy w celu wyznaczenia siły normalnej. Z rysunku 15.14 wynika równanie pracy wirtualnej:

$$30 \cdot \bar{\Delta} = N_{45} \cdot \bar{\Delta} = 0,$$

skąd

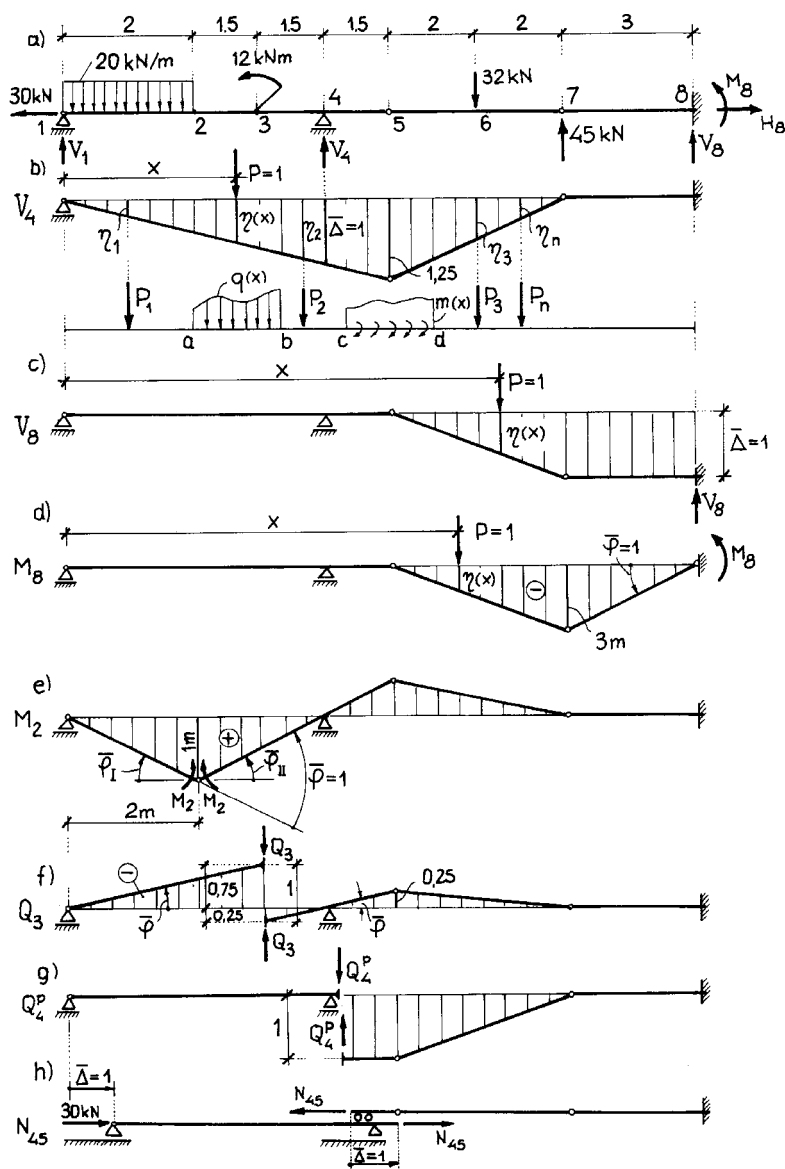
$$N_{45} = 30 \text{ kN}.$$

Omówimy obecnie wykorzystanie faktu, że kinematyki wirtualne obowiązują dla dowolnego obciążenia konstrukcji. Jeżeli przemieszczenia wirtualne przyjmujemy w ten sposób, że mnożnik poszukiwanej wielkości statycznej jest równy jedności, to rzędne przemieszczeń wirtualnych $\eta(x)$ odpowiadają tzw. **linii wpływu** tej **wielkości statycznej**. Linie wpływu są więc odpowiednio przeskalowaną kinematyką wirtualną służącą do wyznaczenia poszukiwanej wielkości statycznej. Dla układów statycznie wyznaczalnych są to zawsze funkcje odcinkowo-liniowe. Linie wpływu zależą tylko od wymiarów geometrycznych i warunków brzegowych. Sens linii wpływu objaśnimy na przykładzie reakcji V_4 . Stosownie do podanych uwag rzędne linii wpływu reakcji V_4 są równe pionowym przemieszczeniom wirtualnym przy założeniu, że $\bar{\Delta} = \bar{1}$ (rys. 15.4b). Otrzymane w ten sposób wartości funkcji $\eta(x)$ interpretujemy jako wartości reakcji V_4 wywołane przez pionową siłę $P = 1$, usytuowaną w odległości x od początku układu współrzędnych. Jeśli działa większa liczba sił skupionych P_i , momentów skupionych M_i oraz obciążeń ciągłych $q(x)$ i $m(x)$ rozłożonych odpowiednio w przedziałach (a, b) i (c, d) , to wartość siły V_4 wynosi:

$$V_4 = \sum_i P_i \cdot \eta_i + \sum_j M_j \cdot \frac{d\eta_j}{dx_j} + \int_a^b q(x) \cdot \eta(x) ds + \int_c^d m(x) \cdot \frac{d\eta}{dx} dx,$$

gdzie

- η_j - oznaczają rzędne wypadające w punktach przyłożenia sił skupionych P_j ,
- $d\eta_j/dx_j$ - wartości tangensa kąta nachylenia stycznej do linii $\eta(x)$ w punktach przyłożenia momentów skupionych M_j .



Rys. 15.14

Przytoczymy sposoby przeskalowania niektórych dalszych wykresów. Na rysunku 15.14d mnożnikiem momentu zginającego M_8 w równaniu pracy wirtualnej jest kąt $\bar{\varphi} = 1$. Z proporcji geometrycznej wynika zatem, że rzędna linii wpływu w przegubie 7 wynosi $\eta_7 = -3$ m. W przypadku momentu M_2 wymagamy, by suma kątów $\bar{\varphi}_I$ i $\bar{\varphi}_{II}$ była równa jedności ($\bar{\varphi}_I + \bar{\varphi}_{II} = 1$). Suma ta jest bowiem mnożnikiem momentu M_2 w równaniu pracy wirtualnej. Mamy więc:

$$\frac{\bar{\Delta}}{3} + \frac{\bar{\Delta}}{3} = 1, \quad \text{skąd} \quad \bar{\Delta} = \eta_2 = 1,5 \text{ m.}$$

Dla siły poprzecznej trzeba tak dobrać Q_3 i kąt $\bar{\varphi}$, by wzajemne przemieszczenie pionowe obu części belki w punkcie 3 było równe 1, czyli

$$\bar{\varphi} \cdot 4,5 + \bar{\varphi} \cdot 1,5 = 1, \quad \text{skąd} \quad \bar{\varphi} = \frac{1}{6} \text{ m}^{-1}.$$

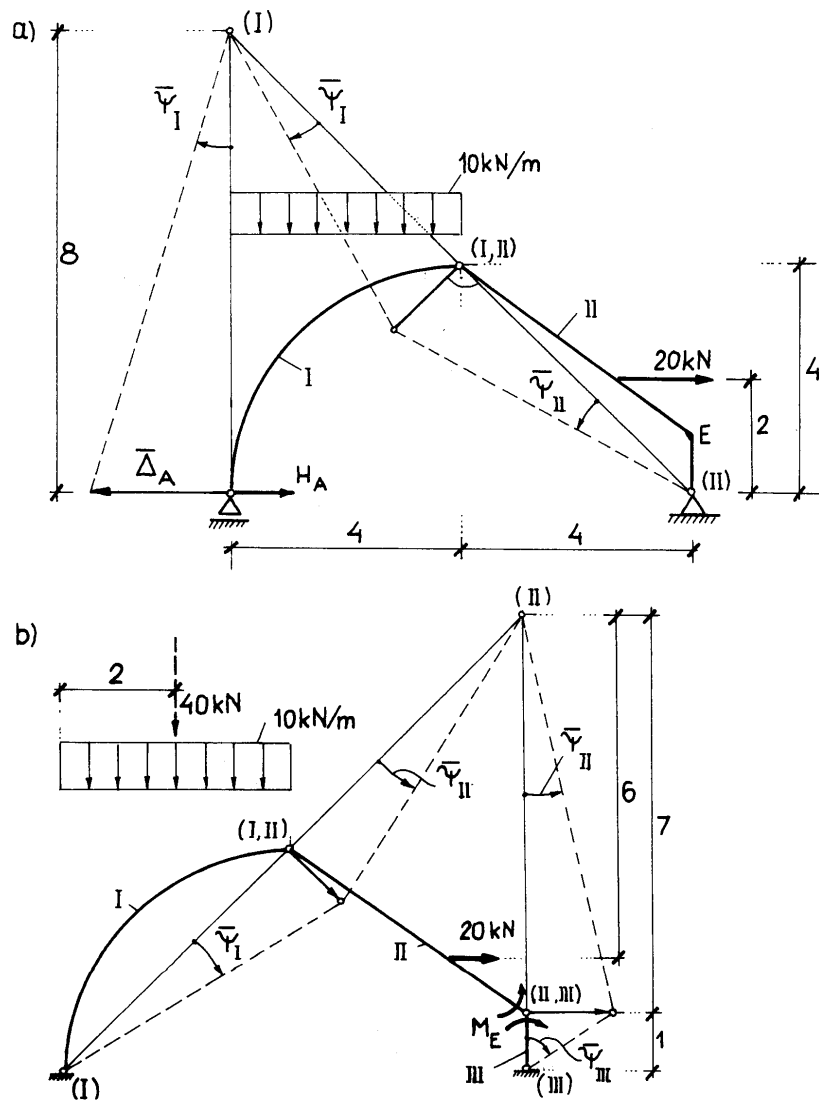
Wobec tego rzędne z lewej i prawej strony punktu 3 wynoszą (rys. 15.14f):

$$\eta_3^l = -\frac{1}{6} \cdot 4,5 = -0,75, \quad \eta_3^p = \frac{1}{6} \cdot 1,5 = 0,25.$$

Znaki rzędnych wynikają z umowy znaku siły poprzecznej i definicji rzędnej linii wpływu. Obliczmy teraz wartość Q_3 na podstawie linii wpływu z rys. 15.14f:

$$Q_3 = -\int_0^3 20 \cdot \frac{0,75}{4,5} \cdot x \, dx = -\frac{1}{6} \cdot (-12) + 32 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot 0,25\right) = -17 \text{ kN}.$$

Warto dodać, że linie wpływu najczęściej wyznacza się jednak metodą statyczną. Dotyczy to przede wszystkim łuków i ram, ponieważ badanie kinematyki wirtualnej układu jest nieco bardziej złożone. Statyczna metoda wyznaczania linii wpływu jest dokładnie omówiona w każdym podręczniku mechaniki budowli.



Rys. 15.15

Na zakończenie obliczymy jeszcze reakcję poziomą H_A i moment zginający M_E w konstrukcji trój-przegubowej rozważanej w przykładzie 5. Odpowiednie kinematyki obrazuje rys. 15.15a, b. Dla porządku umówimy się, że dodatnie kąty $\bar{\psi}$ i dodatnie momenty zginające mają zwroty zgodne z ruchem wskazówek zegara. Z rysunku 15.15a wynika, że $\bar{\psi}_I = -\bar{\psi}_{II} = \bar{\psi}$. Wobec tego równanie (14.8a) przyjmuje postać:

$$(-H_A \cdot 8) \cdot \bar{\psi}_I + (10 \cdot 4 \cdot 2) \cdot \bar{\psi}_{II} = 0,$$

skąd

$$H_A = \frac{80 - 40}{8} = 5 \text{ kN}.$$

Przy wyznaczaniu momentu M_E zależności między kątami obrotu poszczególnych tarcz sztywnych są następujące:

$$\bar{\psi}_I = -\bar{\psi}_{II} = \bar{\psi}, \quad -7 \cdot \bar{\psi}_{II} = 1 \cdot \bar{\psi}_{III}, \quad \bar{\psi}_{III} = 7\bar{\psi}.$$

Równanie (14.8a) przyjmuje postać:

$$10 \cdot 4 \cdot 2 \bar{\psi}_I + (-20 \cdot 6) \cdot \bar{\psi}_{II} - M_E \cdot \bar{\psi}_{II} + M_E \cdot \bar{\psi}_{II} + M_E \cdot \bar{\psi}_{III} = 0.$$

Po uwzględnieniu zależności między kątami otrzymujemy:

$$80 \cdot \bar{\psi} + 120 \cdot \bar{\psi} + M_E \cdot (\bar{\psi} + 7\bar{\psi}) = 0, \text{ skąd } M_E = \frac{80 + 120}{8} = 25 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

Widać, że wyznaczone wartości H_A i M_E pokrywają się z rezultatami przykładu 5.

15.3. OBLICZANIE PRZEMIESZCZEŃ KONSTRUKCJI LINIOWO-SPRĘŻYSTYCH

15.3.1. Wiadomości ogólne

Dysponujemy wieloma metodami wyznaczania przemieszczeń uogólnionych w konstrukcjach linio-wo-sprężystych. Są to metody:

- całkowania równania różniczkowego linii ugięcia,
- obciążenia krzywiznami (metoda *Mohra*)

oraz metody energetyczne wykorzystujące:

- twierdzenie *Clapeyrona*,
- twierdzenie o minimum energii dopełniającej (twierdzenie *Castigliano* (14.20)),
- równania pracy wirtualnej przy wirtualnym stanie sił (14.6).

Pierwsze dwie metody zilustrowano w rozdziale 9. Tutaj omówimy przede wszystkim zastosowanie równania pracy wirtualnej (14.6), gdyż obowiązuje ono dla największej klasy zadań. Dodamy tu, że twierdzenie *Castigliano* obejmuje w zasadzie tylko wpływy mechaniczne i prowadzi w końcu do takich samych zależności jak równanie (14.6), natomiast twierdzenie *Clapeyrona* jest ograniczone do bardzo rzadko występujących przypadków szczególnych.

Równanie (14.6) ma postać:

$$\int_s (\bar{q}_x u + \bar{q}_y v + \bar{q}_w + \bar{m}_x \psi + \bar{m}_y \varphi_y + \bar{m}_z \varphi_z) ds = \int_s (\bar{N} \cdot \lambda + \bar{Q}_y \beta_y + \bar{Q}_z \beta_z + \bar{\mathcal{M}} \theta + \bar{M}_y k_y + \bar{M}_z k_z) ds,$$

przy czym w układach liniowo-sprężystych rzeczywiste odkształcenia uogólnione opisują wzory:

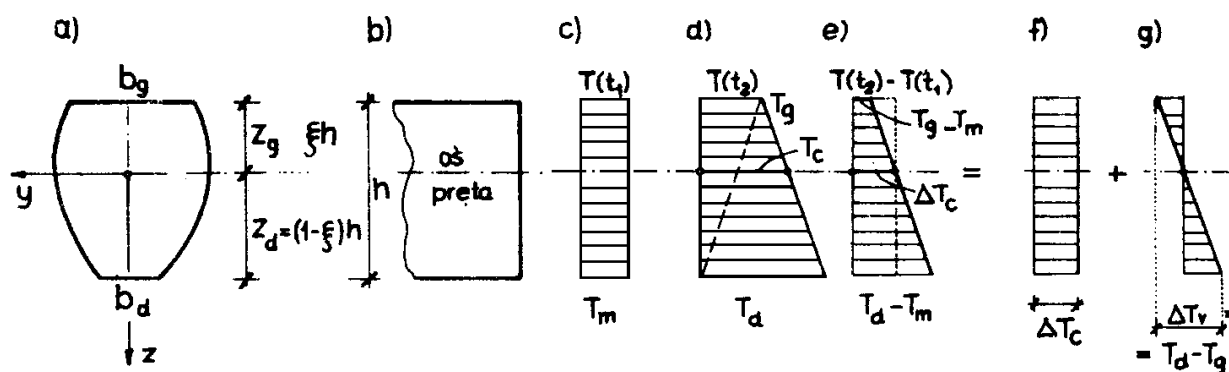
$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{N}{EA} + \lambda^0, & \beta_y &= \frac{Q_y}{(GA/k_y)} + \beta_y^0, & \beta_z &= \frac{Q_z}{(GA/k_z)} + \beta_z^0, \\ \theta &= \frac{\mathcal{M}}{GJ_s} + \theta^0, & k_y &= \frac{M_y}{EJ_y} + k_y^0, & k_z &= \frac{M_z}{EJ_z} + k_z^0 \end{aligned} \right\} \quad (15.6)$$

lub krócej

$$e_i = \frac{Y_i}{D_i} + e_i^0, \quad i = 1, 2, \dots, 6, \quad (15.6a)$$

gdzie

Y_i oraz D_i - oznaczają siły wewnętrzne oraz odpowiednie sztywności przekroju.



Rys. 15.16

Komentarza wymagają dodatkowe człony oznaczone indeksem 0. Człony te wyrażają odkształcenia uogólnione wywołane przez czynniki niemechaniczne (temperaturę, skurcz) lub wstępne deformacje technologiczne (błędami wykonania). Uwzględnienie tych ostatnich służy do wyznaczenia przemieszczeń realnej konstrukcji względem projektowanej (idealnej) konfiguracji osi prętów przy założeniu idealnego wykonania konstrukcji.

Omówimy przykładowo wpływ temperatury. Przyjmijmy, że temperatura wszystkich włókien w chwili t_1 podczas montażu danego pręta $T(t_1) = T_m$ (por. rys. 15.16c). Przypuśćmy, że po pewnym czasie, w chwili $t_2 > t_1$, nastąpiła stabilizacja rozkładu temperatur. Temperatura górnych skrajnych włókien na całej szerokości przekroju b_g jest stała i wynosi $T_g(t_2, z_g)$. Podobnie temperatura dolnych skrajnych włókien wynosi $T_d(t_2, z_d)$. Rozkład temperatur na wysokości przekroju jest na ogół nieznany. Dlatego zazwyczaj zakłada się, że rozkład ten jest liniowy i nie zależy od współrzędnej y (rys. 15.16d). Liniowy rozkład temperatur spełnia tożsamościowo równanie przewodnictwa cieplnego dla procesu ustalonego w czasie. Przyrost temperatury $\Delta T(z) = T(t_2, z) - T(t_1)$ na wysokości przekroju (rys. 15.16e) można rozłożyć na równomierne ogrzanie całego przekroju o wartości T_c (rys. 15.16f) oraz liniowe nierównomierne ogrzanie, określone różnicą temperatur w dolnych i górnych skrajnych włóknach ΔT_v (rys. 15.16g).

Mamy więc:

$$\Delta T(z) = \Delta T_c + \Delta T_v \cdot \frac{z}{h}, \quad (15.7)$$

gdzie

$$\left. \begin{aligned} T_c &= T_d \cdot \zeta + T_g \cdot (1 - \zeta) - T_m, \\ T_v &= T_d - T_g, \end{aligned} \right\} \quad (15.8)$$

przy czym h jest wysokością przekroju, a $\zeta = z_g / h$ i określa położenie środka ciężkości przekroju.

W materiale izotropowym zmiana temperatury nie wywołuje zmiany kątów odkształcenia postaciowego, lecz jedynie zmianę objętości. Mamy więc:

$$(a) \quad \varepsilon_x^0 = \varepsilon_z^0 = \alpha_T \cdot \Delta T_c + \alpha_{T_v} \cdot \frac{z}{h},$$

$$(b) \quad \gamma_{xz}^0 = 0,$$

gdzie

α_T - oznacza współczynnik rozszerzalności liniowej.

Wpływ odkształceń w kierunku prostopadłym do osi pręta ε_z^0 jest nieznaczny i nie bierze się go pod uwagę. Natomiast z budowy wzorów (a) i (b) wnioskujemy, że:

$$\varepsilon_x^0 = \lambda_x^0 + \kappa_y^0 \cdot z, \quad \gamma_{xz}^0 = \beta_z^0 = 0, \quad (15.9)$$

gdzie

λ_x^0 i κ_y^0 - są opisane wzorami:

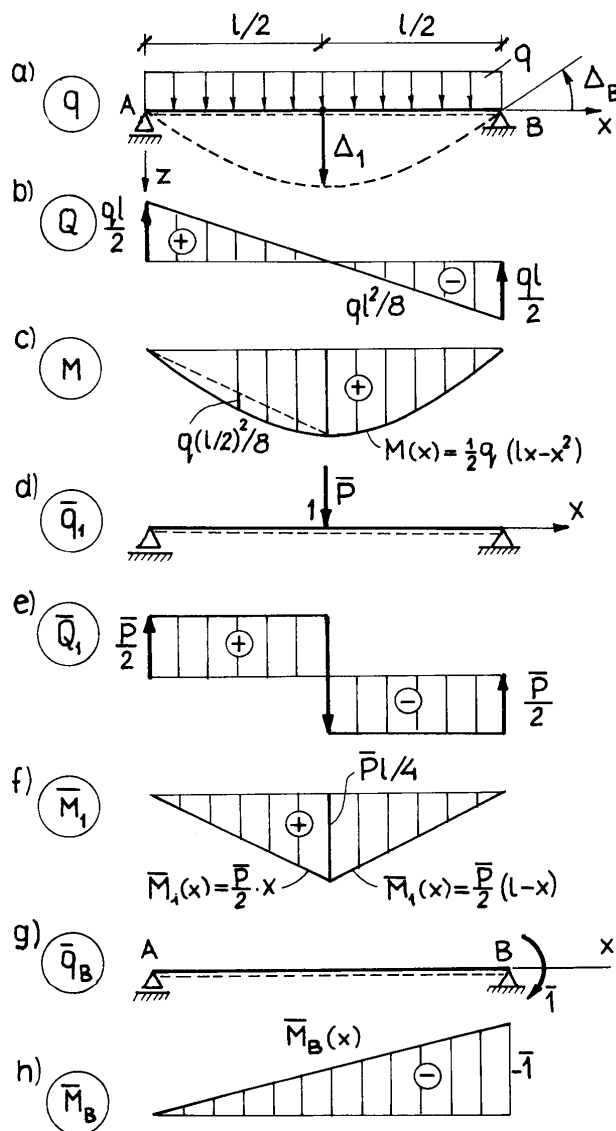
$$\left. \begin{aligned} \lambda_x^0 &= \alpha_T \cdot \Delta T_c, \\ \kappa_y^0 &= \alpha_T \cdot \Delta T_v \cdot \frac{1}{h}. \end{aligned} \right\} \quad (15.10)$$

Stosując wzory (15.9) i (15.10), trzeba pamiętać o założeniach upraszczających, które przyjęto przy określeniu pola temperatury. Przy dowolnym rozkładzie temperatur na wysokości przekroju pręta stosowanie klasycznej teorii prętów jest już nieuzasadnione.

15.3.2. Przykłady zastosowania równania pracy wirtualnej do wyznaczania przemieszczeń

Do ilustracji obliczania przemieszczeń konstrukcji wykorzystamy przykłady 1–6, zamieszczone w p. 15.2.1.

Rozważymy na wstępie belkę swobodnie podpartą z przykładu 2, poddaną działaniu obciążenia równomiernego (por. rys. 15.5a i 15.17a, b, c). Przyjmijmy, że belka ma przekrój stały ($A = \text{const}$, $J = \text{const}$) oraz jest jednorodna ($E = \text{const}$, $G = \text{const}$). Wyznamy przemieszczenie pionowe Δ_1 punktu 1, leżącego w połowie rozpiętości.



Rys. 15.17

Lewa strona równania (14.6) wyraża pracę wirtualnych sił zewnętrznych na przemieszczeniach rzeczywistych. Ponieważ poszukujemy przemieszczenia rzeczywistego Δ_1 , trzeba przyjąć takie obciążenie wirtualne, które wykonuje pracę tylko na tym przemieszczeniu. Będzie to siła pionowa \bar{P} zaczepiona w punkcie 1 (rys. 15.17d). Po prawej stronie równania występują rzeczywiste odkształcenia uogólnione, wyrażone wzorami (15.6), oraz wirtualne siły wewnętrzne, będące w równowadze z obciążeniem \bar{P} . W układach statycznie wyznaczalnych istnieje tylko jedno statycznie dopuszczalne pole wirtualnych sił wewnętrznych. Są to siła poprzeczna $\bar{Q}(x)$ i moment zginający $\bar{M}(x)$, wywołane przez działanie obciążenia \bar{P} na rozpatrywaną belkę statycznie wyznaczalną. Wykresy $\bar{Q}(x)$ i $\bar{M}(x)$ podano na rys. 15.17e,f. Równanie (14.6) przyjmuje postać:

$$(c) \quad \bar{P} \cdot \Delta_1 = \int_0^l \left[\bar{Q} \cdot \left(\frac{Q}{GA} \cdot k + \beta^0 \right) + \bar{M} \cdot \left(\frac{M}{EJ} + k^0 \right) \right] dx.$$

Ponieważ na belkę działa tylko obciążenie rzeczywiste q , więc czynniki β^0 i k^0 są równe zero. Po uwzględnieniu antysymetrii wykresów $\bar{Q}(x)$ i $Q(x)$, symetrii wykresów $\bar{M}(x)$ i $M(x)$ oraz faktu, że $GA = \text{const}$ i $EJ = \text{const}$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 \bar{P} \cdot \Delta_1 &= 2 \left[\frac{k}{GA} \int_0^{l/2} Q(x) \cdot Q(x) \cdot dx + \frac{1}{EJ} \int_0^{l/2} M(x) \cdot M(x) \cdot dx \right] = \\
 (d) \quad & 2 \cdot \frac{k}{GA} \int_0^{l/2} \frac{1}{2} P \cdot \left(\frac{1}{2} ql - qx \right) \cdot dx + \frac{2}{EJ} \cdot \int_0^{l/2} \frac{1}{2} Px \cdot \left(\frac{1}{2} qlx - \frac{1}{2} qx^2 \right) \cdot dx.
 \end{aligned}$$

Z budowy wzoru (d) wynika, że obie strony tego równania można podzielić przez \bar{P} . Po podzieleniu otrzymujemy:

$$(e) \quad \bar{1} \cdot \Delta_1 = \frac{2k}{GA} \int_0^{l/2} \frac{\bar{1}}{2} \cdot \left(\frac{ql}{2} - qx \right) dx + \frac{2}{EJ} \int_0^{l/2} x \cdot \frac{1}{2} \left(qlx - \frac{1}{2} qx^2 \right) dx.$$

W zależności (e) celowo pozostawiono nadkreślenia, by zaznaczyć wielkości wirtualne. Widzimy zatem, że dla wygody obliczeń warto przyjąć, iż siła wirtualna $\bar{P} = \bar{1}$. Ten chwyt rachunkowy można stosować w każdym przypadku, gdyż zależności między obciążeniem wirtualnym a wirtualnymi siłami wewnętrznymi są zawsze liniowe, co wynika z liniowości równań równowagi. Po wykonaniu całkowania równania (e) otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 \bar{1} \cdot \Delta_1 &= \frac{2k}{GA} \cdot \frac{\bar{1}}{2} \left[\frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2} \right]_0^{l/2} + \frac{2}{EJ} \cdot \frac{\bar{1}}{2} \left[\frac{qlx^2}{2} - \frac{qx^3}{6} \right]_0^{l/2} = \\
 &= \frac{kql^2}{8GA} + \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ} = \Delta_1(Q) + \Delta_1(M).
 \end{aligned}$$

Ten sam wynik otrzymujemy, stosując całkowanie sposobem *Wiereszczagina* (por. dodatek):

$$\bar{1} \cdot \Delta_1 = \frac{2k}{GA} \cdot \left(\frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) + \frac{2}{EJ} \left[\frac{ql^2}{8} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{4} + \frac{q}{8} \cdot \left(\frac{l}{2} \right)^2 \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{8} \right].$$

Pierwszy składnik wzoru na Δ_1 określa wpływ odkształceń postaciowych (sił poprzecznych) $\Delta_1(Q)$, a drugi – wpływ zginania (momentów zginających) $\Delta_1(M)$. Określimy udział obu składników w wartości ugięcia Δ_1 :

$$\Delta_1 = \frac{5}{384} \cdot \frac{ql^4}{EJ} \cdot \left(1 + \frac{48EJ}{5GA l^2} \right) = \Delta_1(M) \cdot \left[1 + (1 + \nu) \cdot \frac{96k}{5} \cdot \left(\frac{i}{l} \right)^2 \right],$$

przy czym ν oznacza współczynnik *Poissona*, a i – promień bezwładności.

Jeżeli smukłość pręta s , określona stosunkiem l/i , jest duża, to drugi składnik nawiasu kwadratowego w stosunku do jedności jest mały. Dlatego dla prętów cienkich (smukłych) wpływ odkształceń postaciowych pomijamy. Przy dominującym wpływie momentów zginających przemieszczenia można obliczać z zależności przybliżonej:

$$\bar{1} \cdot \Delta \approx \int_s \bar{M} \cdot k \, ds. \quad (15.11)$$

Na rysunku 15.17g przedstawiono obciążenie wirtualne, które stosuje się przy obliczaniu kąta obrotu przekroju w punkcie B . Obciążenie to jest momentem skupionym, wykonującym pracę na poszukiwanym kącie obrotu Δ_B . Wykres momentów wirtualnych $\bar{M}(x)$ podano na rys. 15.17g. Dla belki z rys. 15.17a według zależności przybliżonej (15.11) otrzymujemy:

$$\bar{1} \cdot \Delta_B = \int_0^l \bar{M}(x) \cdot \frac{M(x)}{EJ} dx = -\frac{ql^3}{24EJ}.$$

Kąt Δ_B jest ujemny, co oznacza, że ma zwrot niezgodny ze zwrotem wirtualnego momentu skupionego działającego na podporze B (por. rys. 15.17a, g).

W nawiązaniu do przykładu 6 wyznaczmy kąt skręcania przekroju usytuowanego w punkcie B (por. rys. 15.10). Należy zatem w tym punkcie przyłożyć wirtualny moment skręcający $\bar{\mathcal{M}}_B = \bar{1}$ (rys. 15.18a) i wyznaczyć wewnętrzne siły wirtualne. Łatwo stwierdzić, że tylko moment zginający $\bar{M}_y(\alpha)$ i moment skręcający $\bar{\mathcal{M}}(\alpha)$ są różne od zera. Z sumy rzutów momentów na lokalne osie x i y otrzymujemy (rys. 15.18b):

$$\bar{M}_y(\alpha) = \bar{1} \cdot \cos \alpha, \quad \bar{\mathcal{M}}(\alpha) = \bar{1} \cdot \sin \alpha.$$

Wobec powyższego, stosownie do równania (14.6), można napisać:

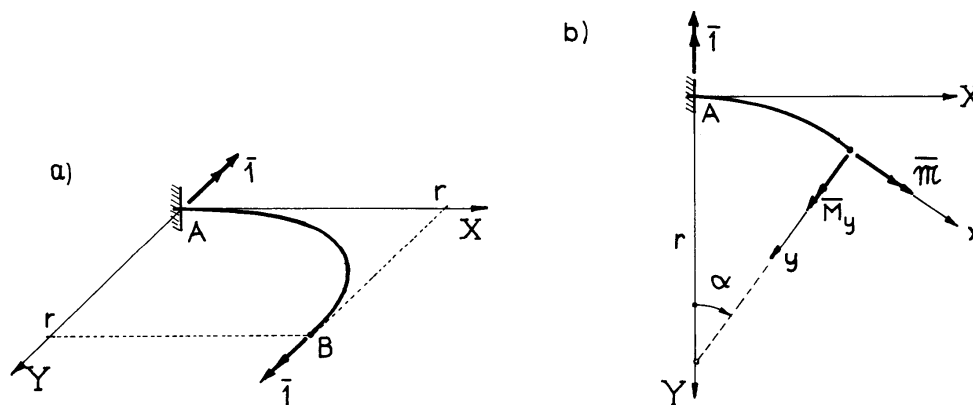
$$\begin{aligned} \bar{1} \cdot \Delta_B &= \int_s (\bar{M}_y k_y + \bar{\mathcal{M}} \theta) ds = \int_0^{\pi/2} \left[\bar{M}_y(\alpha) \frac{M_y(\alpha)}{EJ_y} + \bar{\mathcal{M}}(\alpha) \frac{\mathcal{M}(\alpha)}{GJ_s} \right] r d\alpha = \\ &= r \int_0^{\pi/2} \left[\frac{\cos \alpha (-Pr \cos \alpha)}{EJ_y} + \frac{\sin \alpha \cdot Pr(1 - \sin \alpha)}{GJ_s} \right] d\alpha. \end{aligned}$$

Jeżeli pręt jest jednorodny i pryzmatyczny, to $EJ_y = \text{const}$ i $GJ_s = \text{const}$. Wówczas

$$\Delta_B = Pr^2 \left[-\frac{1}{EJ_y} \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^2 \alpha d\alpha + \frac{1}{GJ_s} \cdot \int_0^{\pi/2} (\sin \alpha - \sin^2 \alpha) d\alpha \right] = Pr^2 \left[-\frac{\pi}{4EJ_y} + \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{1}{GJ_s} \right].$$

Obliczona wartość kąta skręcania jest ścisła tylko w tych przypadkach, gdy deformacja następuje bez deplanacji przekroju (skręcanie swobodne). Ma to miejsce wówczas, gdy przekrój pręta jest kołowy lub cylindryczny (rurowy). Jeżeli dla przykładu pręt ma przekrój cienkościenny otwarty, to trzeba najpierw określić moment odpowiadający skręcaniu swobodnemu $\mathcal{M}_t(\alpha)$, a prawą stronę równania (14.6) zapisać w postaci (14.9).

Wpływ czynników niemechanicznych zilustrujemy na przykładzie konstrukcji trójprzegubowej w przykładzie 5 (rys. 15.8a).



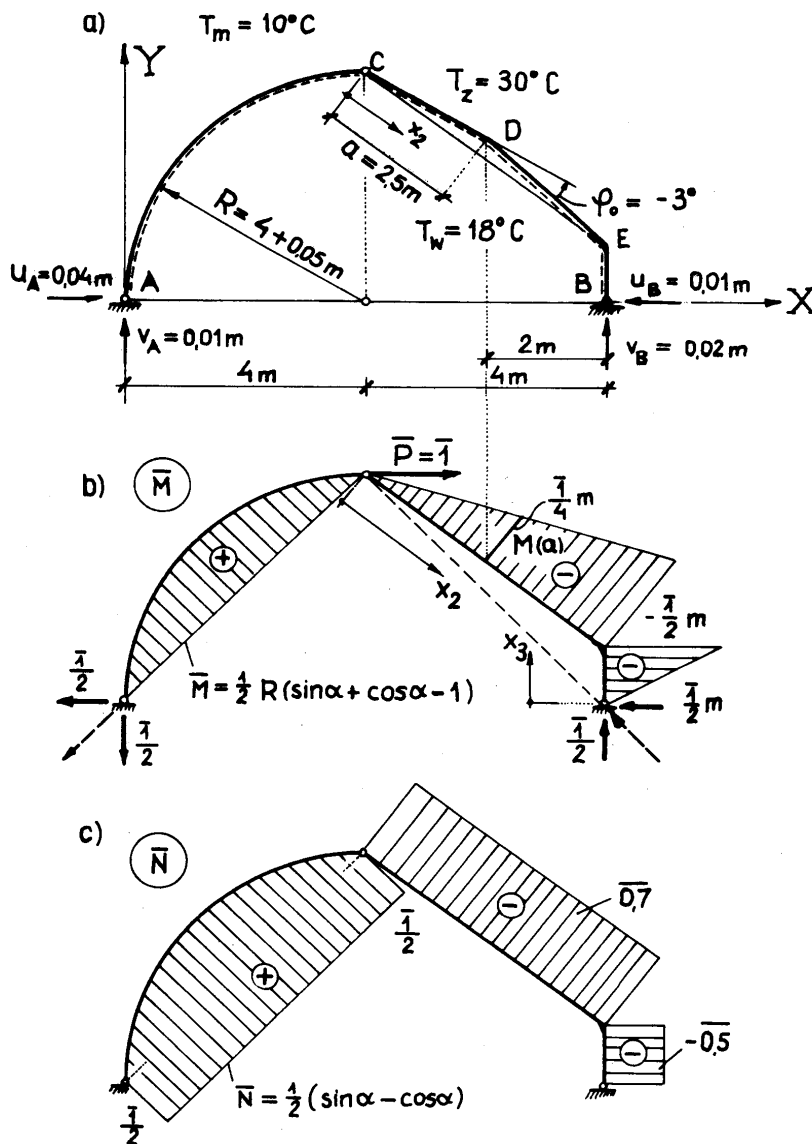
Rys. 15.18

Wyznamy poziome przemieszczenie punktu C wywołane kolejno przez:

- 1) osiadanie podpór,
- 2) zmianę temperatury,
- 3) błędy wykonania.

Wszystkie te czynniki uwzględniono na rys. 15.19a.

W celu wyznaczenia poszukiwanego przemieszczenia obciążamy konstrukcję jednostkową poziomą siłą wirtualną zaczepioną w punkcie C . Obciążenie to łącznie z łatwymi do wyznaczenia reakcjami podpór i wykresami momentów zginających przedstawiono na rys. 15.19b. Wykres sił normalnych \bar{N} podano na rys. 15.19c. Jak się okaże, wirtualne siły poprzeczne \bar{Q} nie będą występowały w dalszych obliczeniach.



Rys. 15.19

1. Osiadanie podpór

W układach statycznie wyznaczalnych osiadanie podpór nie wywołuje deformacji poszczególnych prętów konstrukcji, czyli wszystkie uogólnione odkształcenia rzeczywiste e_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) są równe zero. Zatem prawa strona wzoru (14.6) znika, a po lewej pozostają składniki prac zewnętrznych sił wirtualnych na rzeczywistych przemieszczeniach Δ_C, u_A, v_A, u_B i v_B :

$$\bar{P} \cdot \Delta_C + \bar{H}_A \cdot u_A + \bar{V}_A \cdot v_A + \bar{H}_B \cdot u_B + \bar{V}_B \cdot v_B = 0.$$

Uwzględniając wartości sił wirtualnych i znanych osiadań podpór otrzymujemy:

$$\bar{1} \cdot \Delta_C + \left(-\frac{\bar{1}}{2}\right) \cdot (0,04) + \left(-\frac{\bar{1}}{2}\right) \cdot (0,01) + \frac{\bar{1}}{2} \cdot 0,01 + \frac{\bar{1}}{2} \cdot 0,02 = 0, \quad \text{skąd } \Delta_C = 0,01 \text{ m.}$$

2. Zmiana temperatury

Przyjmijmy, że środek ciężkości wszystkich prętów wypada w połowie wysokości, czyli $\xi = 0,5$.

Wysokości prętów są następujące: $h_{AC} = 0,3 \text{ m}$; $h_{CE} = 0,25 \text{ m}$;

$h_{BE} = 0,20 \text{ m}$. Współczynnik rozszerzalności termicznej $\alpha_T = 1,2 \cdot 10^{-5} [^{\circ}\text{C}^{-1}]$. Stosownie do umowy znaku krzywizn otrzymujemy ($T_d = T_w = 18^{\circ}\text{C}$, $T_g = T_z = 30^{\circ}\text{C}$, $T_m = 10^{\circ}\text{C}$):

$$T_c = T_d \cdot \xi + T_g(1 - \xi) - T_m = 18 \cdot 0,5 + 30 \cdot 0,5 - 10 = 14^{\circ}\text{C},$$

$$T_v = T_d - T_g = 18 - 30 = -12^{\circ}\text{C},$$

$$\lambda^0 = \alpha_T \cdot T_c = 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 14 = 1,68 \cdot 10^{-4},$$

$$k_{AC}^0 = \alpha_T \cdot T_v / h_{AC} = 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{(-12)}{0,3} = -4,8 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-1},$$

$$k_{CE}^0 = 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{(-12)}{0,25} = -5,76 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-1},$$

$$k_{BE}^0 = 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{(-12)}{0,20} = -7,2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-1}.$$

Równanie (14.6) przyjmuje postać (por. rys. 15.19):

$$\begin{aligned} \bar{1} \cdot \Delta_C &= \int_s (\bar{N}\lambda + \bar{M}k) ds = \int_0^{\pi/2} [\bar{N}(\alpha) \cdot \lambda^0 + \bar{M}(\alpha) \cdot k_{AC}^0] Ed\alpha + \\ &+ \bar{N}_{CE} \cdot l_{CE} \cdot \lambda^0 + k_{CE}^0 \int_0^5 \bar{M}(x_2) dx_2 + \bar{N}_{BE} \cdot l_{BE} \cdot \lambda^0 + k_{BE}^0 \int_0^1 \bar{M}(x_3) dx_3 = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\pi/2} [(\sin \alpha + \cos \alpha) \cdot 1,68 \cdot 10^{-4} + 4(\sin \alpha + \cos \alpha - 1) \cdot (-4,8 \cdot 10^{-4})] 4d\alpha + \\ &+ (-0,7 \cdot 5) \cdot (1,68 \cdot 10^{-4}) + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-5,76 \cdot 10^{-4}) + (-0,5 \cdot 1) \cdot (1,68 \cdot 10^{-4}) + \\ &+ \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-7,2 \cdot 10^{-4}) = -8,66 \cdot 10^{-4} + 1,23 \cdot 10^{-4} - 2,64 \cdot 10^{-4} = 9,98 \cdot 10^{-4} \text{ m.} \end{aligned}$$

3. Błędy wykonania

Promień łuku AC jest większy od wartości nominalnej $R = 4 \text{ m}$ o $\Delta R = 0,10 \text{ m}$. W związku z tym zmiana krzywizny wynosi

$$k_{AC}^0 = \frac{1}{R + \Delta R} - \frac{1}{R} = \frac{1}{4,10} - \frac{1}{4} = 6,09 \cdot 10^{-3} \text{ m}^{-1}.$$

Ponieważ kąt rozwarcia łuku nadal wynosi $\pi/2$, to względna zmiana długości:

$$\lambda_{AC}^0 = \frac{(R + \Delta R - R)}{R} = \frac{\Delta R}{R} = \frac{0,10}{4} = 0,025.$$

Normalnie prosta oś pręta CE jest załamana w połowie długości (punkt D). Kąt załamania $\varphi_0 = -3^\circ = -0,052 \text{ rad}$. Krzywiznę tego pręta wyraża funkcja:

$$k_{CE}^0 = \varphi_0 \cdot \delta(x_2 - a) = -0,052 \cdot \delta(x_2 - 2,5),$$

gdzie $\delta(x_2 - a)$ oznacza funkcję *Diraca*^{*}, a znak minus wynika z umowy znaku krzywizny (rozciągane są górne włókna). Równanie (14.6) przybiera postać:

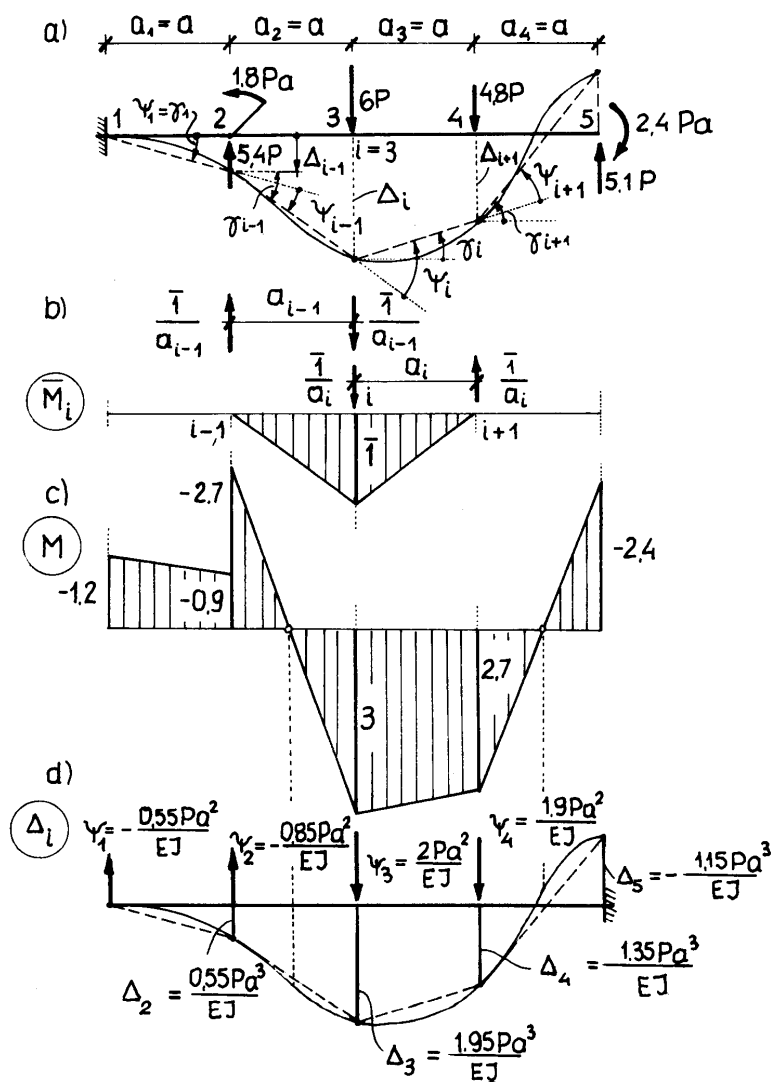
$$\begin{aligned} \bar{I} \cdot \Delta_c &= \int_0^{\pi/2} \left[\bar{N}(\alpha) \cdot \lambda_{AC}^0 + \bar{M}(\alpha) \cdot k_{AC}^0 \right] R d\alpha + \int_0^5 \bar{M}(x_2) \cdot \varphi_0 \cdot \delta(x_2 - a) dx_2 = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\pi/2} \left[(\sin \alpha + \cos \alpha) \cdot 0,025 + 4(\sin \alpha + \cos \alpha - 1) \cdot 6,09 \cdot 10^{-3} \right] 4 d\alpha + \bar{M}(a) \cdot \varphi_0. \end{aligned}$$

Wartość drugiego składnika stojącego poza całką wynika z własności filtracji funkcji δ . Po wykonaniu całkowania otrzymujemy:

$$\Delta_c = \frac{1}{2} \cdot \left[2 \cdot 0,025 + 4 \left(2 - \frac{\pi}{2} \right) \cdot 6,09 \cdot 10^{-3} \right] \cdot 4 + \left(-\frac{1}{4} \right) \cdot (-0,052) = 0,1209 + 0,013 = 0,1339 \text{ m}.$$

Rozważmy teraz belkę wspornikową z rys. 15.20a. Mamy obliczyć ugięcia pionowe punktów 2, 3, 4 i 5. W tym celu należałoby ustawić kolejno w tych punktach siły wirtualne $\bar{P} = \bar{I}$ i na podstawie równania (14.6) obliczać wartości $\Delta_2 - \Delta_5$. Istnieje wszelako inna, na ogół mniej pracochłonna możliwość – można obliczyć kąty obrotu cięciw linii ugięcia (rys. 15.20a). Znajomość tych kątów pozwala w sposób czysto geometryczny wyznaczyć linię łamaną odpowiadającą położeniu cięciw po odkształceniu. Uzyskujemy w ten sposób przybliżoną linię ugięcia, przy czym w punktach załamania wartości ugięć są ściśle. Wyznaczanie kształtu łamanej linii ugięcia można bardzo usprawnić, jeżeli przypomnimy sobie, że różnica tangensów kątów załamania wykresu momentów zginających jest równa sile skupionej działającej na belkę w tym punkcie (por. przykład 3). Dla małych kątów można przyjąć, że $\text{tg} \gamma_{i-1} - \text{tg} \gamma_i = \gamma_{i-1} - \gamma_i = \psi_i$. Przybliżony kształt linii ugięcia odpowiada zatem kształtowi wykresu momentów zginających w belce obciążonej „siłami” skupionymi (tzw. ciężarkami sprężystymi) równymi kątowi ψ_i , które można traktować jako skoncentrowane krzywizny.

^{*}) Informacje o funkcji „delta” zawarto w p.21.3



Rys. 15.20

Okazuje się zatem, że doszliśmy do pewnej odmiany metody obciążenia krzywiznami (metoda *Mohra*). W celu spełnienia warunków brzegowych trzeba przyjąć odpowiedni zastępczy schemat statyczny belki, zgodnie z zasadami podanymi w rozdziale 10. Omówiony sposób obliczania ugięć nosi nazwę **metody ciężarów sprężystych**. Ciężarki sprężyste to różnice kątów obrotu cięciw ψ_i . Pozostaje jeszcze wyznaczenie wartości ciężarów. Wykorzystuje się tu równanie pracy wirtualnej (14.6). W celu obliczenia kąta obrotu cięciwy $i, i-1$ należy obliczyć ugięcia Δ_i oraz Δ_{i-1} , a następnie różnicę $\Delta_i - \Delta_{i-1}$ podzielić przez odległość sąsiednich punktów a_{i-1} :

$$\gamma_{i-1} = \frac{\Delta_i - \Delta_{i-1}}{a_{i-1}}.$$

Operacje dzielenia przez a_{i-1} oraz odejmowania można przeprowadzić wcześniej przez wprowadzenie pary sił wirtualnych o wartościach $\bar{1}/a_{i-1}$. Podobnie obliczamy kąt obrotu sąsiedniej cięciwy:

$$\gamma_i = \frac{\Delta_{i+1} - \Delta_i}{a_i},$$

co odpowiada przyłożeniu pary sił wirtualnych o wartościach $\bar{1}/a_i$. Kąt ψ_i , odpowiadający dodatniej krzywiznie (wydłużenie dolnych włókien), wynosi $\gamma_{i-1} - \gamma_i$. Aby wyznaczyć ten kąt, trzeba przyłożyć

dwie przeciwnie skierowane pary sił o wartościach $\bar{1}/a_{i-1}$ oraz $\bar{1}/a_i$. W rezultacie otrzymujemy trzy siły wirtualne:

$$-\frac{\bar{1}}{a_{i-1}}, \quad \frac{\bar{1}}{a_{i-1}} + \frac{\bar{1}}{a_i}, \quad -\frac{\bar{1}}{a_i}.$$

Działają one odpowiednio w punktach $i-1$, i , $i+1$. Obciążenie to wraz z wykresem momentu wirtualnego \bar{M}_i ilustruje rysunek 15.20b.

Przy obliczaniu ciężarów uwzględnimy tylko wpływ momentów zginających pochodzących od obciążenia rzeczywistego (rys. 15.20c):

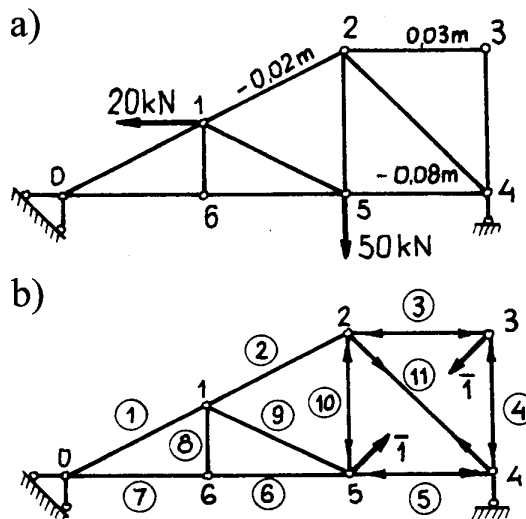
$$EJ \psi_1 = \int \bar{M}_1 \cdot M \cdot dx = \frac{\bar{1}}{a} \cdot a \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3} \cdot 1,2 - \frac{1}{3} \cdot 0,9 \right) Pa^2 = -0,55 Pa^2,$$

$$EJ \psi_2 = \int \bar{M}_2 \cdot M \cdot dx = \frac{\bar{1}}{a} \cdot a \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{3} \cdot 1,2 - \frac{2}{3} \cdot 0,9 - \frac{2}{3} \cdot 2,7 + \frac{1}{3} \cdot 3,3 \right) \cdot Pa^2 = -0,85 Pa^2,$$

$$EJ \psi_3 = \int \bar{M}_3 \cdot M \cdot dx = \frac{\bar{1}}{a} \cdot a \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{3} \cdot 2,7 - \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 2,7 \right) Pa^2 = 2 Pa^2,$$

$$EJ \psi_4 = \int \bar{M}_4 \cdot M \cdot dx = \frac{\bar{1}}{a} \cdot a \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{3} \cdot 3 + \frac{2}{3} \cdot 2,7 \cdot 2 - \frac{1}{3} \cdot 2,4 \right) Pa^2 = 1,9 Pa^2.$$

Ugięcia punktów 2, 3, 4 i 5 w belce zastępczej obliczone jako momenty zginające spowodowane ciężarami sprężystymi, ilustruje rys. 15.20d.



Rys. 15.21.

Na zakończenie obliczymy zbliżenie węzłów 3 i 5 w kratownicy z przykładu 1. Zmiany długości przęseł wynikają z działania obciążeń zewnętrznych przyłożonych w węzłach 1 i 5 oraz błędów wykonania: przęt 2 jest o 2 cm za krótki, przęt 3 o 3 cm za długi, a przęt 10 o 8 cm za krótki (por. rys. 15.21a). Ponieważ interesuje nas zbliżenie węzłów 3 i 5, przyjmujemy dwie jednostkowe siły wirtualne zaczepione w tych

węzłach. Linie działania tych sił pokrywają się z linią 3–5, a ich zwroty są przeciwne (rys. 15.21b). Jednoczesne działanie tak obranych sił wirtualnych pozwala na bezpośrednie wyznaczenie poszukiwanego przemieszczenia z równania pracy wirtualnej (14.6). Siły wewnętrzne \bar{Z}_i pochodzące od obciążenia wirtualnego zestawiono w tablicy I (kolumna 5). Równanie (14.6) przyjmuje postać:

$$\bar{I} \cdot \Delta = \sum_i \int_0^{l_i} \bar{N}_i \cdot \lambda_i \cdot dx = \sum_i \bar{Z}_i \int_0^{l_i} \lambda_i \cdot dx = \sum_{i=0}^{12} \bar{Z}_i \cdot \Delta l_i, \quad (15.12)$$

przy czym Δl_i oznacza wydłużenie pręta i :

$$\Delta l_i = \Delta l_i^0 + \frac{Z_i l_i}{E_i A_i}, \quad (15.13)$$

gdzie Δl_i^0 jest tutaj wydłużeniem wynikającym z czynników niemechanicznych (np. błędy wykonania, wpływ temperatury), A_i jest przekrojem pręta i , a E_i – modułem sprężystości tego pręta. Po podstawieniu zależności (15.13) do wzoru (15.12) otrzymujemy:

$$\bar{I} \cdot \Delta = \sum_i \bar{Z}_i \Delta l_i^0 + \sum_i \bar{Z}_i \cdot \frac{Z_i l_i}{E_i A_i} = \Delta^0 + \Delta^P, \quad (15.14)$$

gdzie

Δ^0 - oznacza przemieszczenie od wpływów niemechanicznych,
 Δ^P - przemieszczenie wywołane przez obciążenia zewnętrzne.

Wzór (15.14) jest charakterystyczną postacią wzoru (14.6), przystosowaną do obliczania przemieszczeń układów kratowych.

Sumowanie według wzoru (15.14) zawiera tablica I. Wzajemne zbliżenie węzłów 3 i 5 :

$$\Delta^0 = 0,0353 \text{ m}; \quad \Delta^P = -0,001745 \text{ m}.$$

Zatem

$$\Delta = 0,035300 - 0,001745 = 0,033555 \text{ m} \approx 0,0336 \text{ m}.$$