

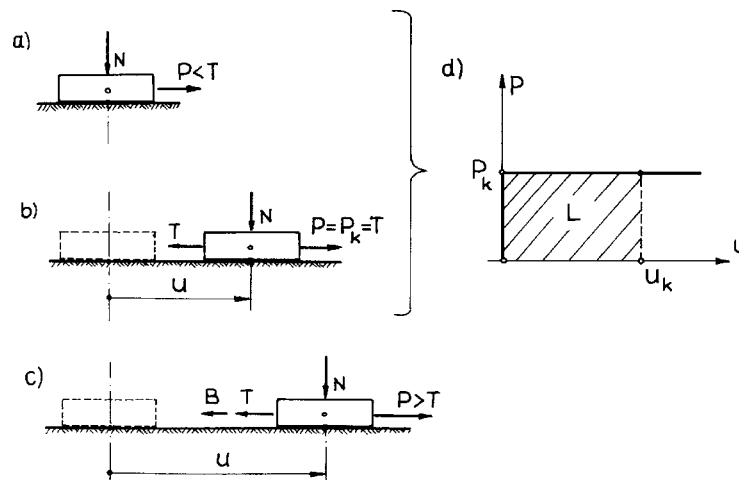
6.



PODSTAWY ENERGETYCZNE

6.1. PRACA SIŁ ZEWNĘTRZNYCH

Rozważmy ruch ciała po szorstkiej płaszczyźnie z uwzględnieniem siły tarcia. Ruch ten jest wywołany siłą P wzrastającą od zera do pewnej wartości. Siła tarcia $T = \mu N$, gdzie μ oznacza współczynnik tarcia, a N – siłę normalną do płaszczyzny tarcia. Jeśli $P < T$, ciało pozostaje w spoczynku. Gdy $P = P_k = T$, rozpoczyna się ruch jednostajny. Z kolei jeśli $P > T$, obserwujemy ruch przyspieszony, a siła P jest równoważona przez siłę tarcia T i siłę bezwładności $B = -m\ddot{u}$, gdzie m oznacza masę ciała, a \ddot{u} przyspieszenie. Omówione przypadki ilustruje rys. 6.1.



Rys. 6.1

Gdy w ruchu jednostajnym ($P = P_k = T$) droga przebyta przez ciało osiągnie wartość u_k , to pracę siły P_k wyraża wzór^{*)}:

$$L = P_{(k)} u_{(k)} . \quad (6.1)$$

Pracę L przedstawia zakreskowane pole na rys. 6.1d.

Obliczymy teraz pracę, jaką wykona siła P rozciągająca sprężynę (rys. 6.2a). Ponieważ w miarę wzrostu przemieszczenia u rośnie i siła P , więc aby obliczyć pracę, musimy znać zależność $P(u)$. Zależność tę przedstawia rys. 6.2b. Przyrost pracy dL przy wzroście przemieszczenia o bardzo małą wartość du jest następujący:

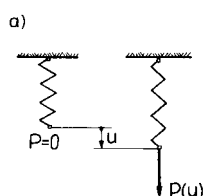
$$dL = P(u) du . \quad (6.2)$$

Gdy przemieszczenie sprężyny osiągnie wartość u_k , to całkowitą pracę siły P , stosownie do wzoru (6.2), wyraża zależność:

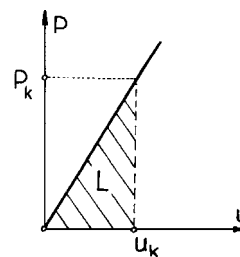
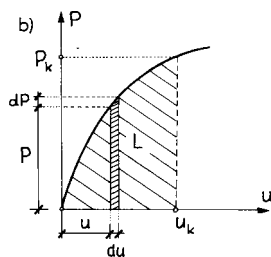
$$L = \int_0^{u_k} dL = \int_0^{u_k} P(u) du . \quad (6.3)$$

Praca ta jest równa zakreskowanemu polu z rys. 6.2b.

^{*)} Uwaga: jeżeli indeksy są umieszczone w nawiasach, to nie należy sumować.
 Andrzej Gawęcki - „Mechanika materiałów i konstrukcji prętowych” 2003r.



Rys. 6.2



Rys. 6.3

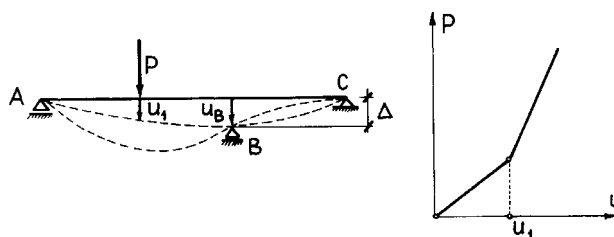
Jeśli **wykres $P(u)$ jest liniowy**, to całkowita praca siły P rosnącej od zera do wartości końcowej P odpowiada polu zakreskowanego trójkąta na rys. 6.3:

$$L = \int_0^{u_k} P(u) du = \frac{1}{2} P_k u_k. \quad (6.4)$$

Współczynnik $1/2$ występujący we wzorze (6.4) jest znamienno dla sprężyny o charakterystyce liniowej.

Dalej będziemy rozważać przede wszystkim tzw. **układy (ciała) Clapeyrona**, charakteryzujące się następującymi cechami:

- materiał jest liniowo-sprężysty i zależności $P(u)$ są liniowe,
- w trakcie odkształcenia nie występują nowe punkty podparcia,
- nie ma naprężeń i odkształceń wstępnych oraz zmian temperatury.



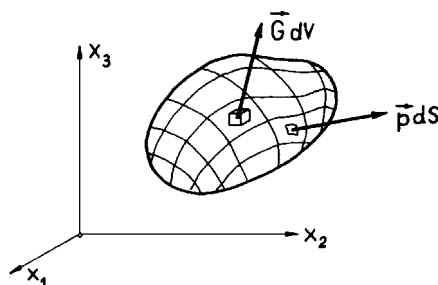
Rys. 6.4

Przykładem, który nie spełnia drugiego postulatu, jest belka przedstawiona na rys. 6.4. Podpora B przejmuje reakcję dopiero wtedy, gdy $u_B = \Delta$. Po dalszym wzroście siły P wykres $P(u)$ załamuje się i obserwujemy skokowy wzrost sztywności układu.

Z uwagi na nieliniową zależność $P(u)$ przypadek z rys. 6.2 również nie stanowi układu Clapeyrona.

6.2. TWIERDZENIE CLAPEYRONA

Rozważmy ciało *Clapeyrona* o objętości V , ograniczone powierzchnią S oraz obciążone siłami powierzchniowymi i masowymi. Siły te wzrastają od zera do swych końcowych wartości oznaczonych przez $\vec{p}dS$ i $\vec{G}dV$. Końcowy stan obciążeń wywołuje naprężenia σ_{ij} oraz przemieszczenia u_i i odkształcenia ε_{ij} .



Rys. 6.5

Stosownie do wzoru (6.4) pracę sił powierzchniowych i masowych na przemieszczeniach \mathbf{u} wyraża wzór:

$$L = \frac{1}{2} \int_S \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} dS + \frac{1}{2} \int_V \mathbf{G} \cdot \mathbf{u} dV. \quad (6.5)$$

Po rozpisaniu iloczynów skalarnych za pomocą współrzędnych i zastosowaniu konwencji sumacyjnej otrzymujemy:

$$L = \frac{1}{2} \int_S p_i u_i dS + \frac{1}{2} \int_V G_i u_i dV. \quad (6.6)$$

Przemieszczenia $u_i(x_1, x_2, x_3)$ i odkształcenia $\varepsilon_{ij}(x_1, x_2, x_3)$ są kinematycznie dopuszczalne, bo spełniają równania geometryczne. Z kolei obciążenia ciała $p_i(x_1, x_2, x_3)$ i $G_i(x_1, x_2, x_3)$ oraz rzeczywiste naprężenia $\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)$ tworzą układ statycznie dopuszczalny, ponieważ spełniają warunki na powierzchni (1.7b) i równania różniczkowe równowagi (1.9). Jeśli wykorzystamy twierdzenie *Greena-Ostogradskiego-Gaussa* i postąpimy tak, jak przy wyprowadzeniu równania pracy wirtualnej (3.1), to wyrażenie (6.6) przekształcimy do postaci:

$$\frac{1}{2} \int_S p_i u_i dS + \frac{1}{2} \int_V G_i u_i dV = \int_V \left(\frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \right) dV, \quad (6.7)$$

stanowiącej treść **twierdzenia Clapeyrona**. Lewa strona równania (6.7) przedstawia pracę obciążeń (tzw. sił zewnętrznych) L . Prawa strona oznacza pracę wykonaną przez naprężenia, czyli energię sprężystą U , zmagazynowaną wewnątrz ciała.

Twierdzenie *Clapeyrona* głosi, że praca obciążeń równa się energii sprężystej zmagazynowanej wewnątrz ciała:

$$L = U. \quad (6.7a)$$

Równanie (6.7) jest szczególnym przypadkiem zasady pracy wirtualnej, w którym zarówno pole wielkości statycznych, jak i pole kinematyczne, jako pola rzeczywiste, są polami dopuszczalnymi. Istotna różnica polega na tym, że równanie (6.7) odnosi się do ciał *Clapeyrona*, tzn. do ciał charakteryzujących się liniową sprężystością. Dlatego, stosownie do zależności (6.4), przy wszystkich członach tego równania pojawił się mnożnik $1/2$.

6.3. ENERGIA SPRĘŻYSTA WŁAŚCIWA

Zgodnie ze wzorem (6.7) całkowita wewnętrzna energia sprężysta U wynosi:

$$U = \int_V \left(\frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \right) dV. \quad (6.8)$$

Wyrażenie podcałkowe jest energią sprężystą przypadającą na jednostkę objętości. Energię tę nazywamy **energią sprężystą właściwą** lub **gęstością energii sprężystej** i oznaczmy symbolem W :

$$W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}. \quad (6.9)$$

Gęstość energii jest skalarem i jest oczywiście niezmiennikiem.

Tensory σ_{ij} i ε_{ij} występujące w definicji energii sprężystej wyrazimy jako sumę aksjatorów i dewiatorów:

$$W = \frac{1}{2} \left(\sigma_{ij}^{(o)} + \sigma_{ij}^{(d)} \right) \left(\varepsilon_{ij}^{(o)} + \varepsilon_{ij}^{(d)} \right) = \frac{1}{2} \left[\sigma_{ij}^{(o)} \cdot \varepsilon_{ij}^{(o)} + \sigma_{ij}^{(d)} \cdot \varepsilon_{ij}^{(d)} + \sigma_{ij}^{(o)} \cdot \varepsilon_{ij}^{(d)} + \sigma_{ij}^{(d)} \cdot \varepsilon_{ij}^{(o)} \right]$$

Wykażemy, że $\sigma_{ij}^{(d)} \cdot \varepsilon_{ij}^{(o)} = \sigma_{ij}^{(o)} \cdot \varepsilon_{ij}^{(d)} = 0$. Obliczymy na przykład $\sigma_{ij}^{(d)} \cdot \varepsilon_{ij}^{(o)}$:

$$\sigma_{ij}^{(d)} \cdot \varepsilon_{ij}^{(o)} = (\sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk} \cdot \delta_{ij}) \frac{1}{3}\varepsilon_{rr}\delta_{ij} = \frac{1}{3}\sigma_{ij}\varepsilon_{rr}\delta_{ij} - \frac{1}{9}\sigma_{kk} \cdot \varepsilon_{rr} \cdot \delta_{ij} \cdot \delta_{ij} = \frac{1}{3}\sigma_{ii}\varepsilon_{rr} - \frac{1}{9}\sigma_{kk}\varepsilon_{rr} \cdot 3 = 0.$$

Analogicznie wykazuje się, że $\sigma_{ij}^{(o)} \cdot \varepsilon_{ij}^{(d)} = 0$. Wobec powyższego możemy napisać:

$$W = \frac{1}{2}\sigma_{ij}^{(o)} \cdot \varepsilon_{ij}^{(o)} + \frac{1}{2}\sigma_{ij}^{(d)} \cdot \varepsilon_{ij}^{(d)} = W^{(o)} + W^{(d)}. \quad (6.10)$$

Wykazaliśmy zatem, że **energia W składa się z dwóch części: energii aksjatorów i energii dewiatorów**, a energie mieszane „aksjatorowo-dewiatorowe” są równe zeru. Energia sprężysta właściwa jest funkcją składowych tensora naprężenia σ_{ij} i tensora odkształcenia ε_{ij} . Korzystając ze związków fizycznych (5.12) i (5.13) można ją wyrazić albo tylko przez naprężenia (W_σ) albo tylko przez odkształcenia (W_ε).

Obliczmy teraz $W^{(o)}$ i $W^{(d)}$ jako funkcje składowych stanu naprężenia. Energia aksjatorów

$$\begin{aligned} W^{(o)} &= \frac{1}{2}\sigma_{ij}^{(o)} \cdot \varepsilon_{ij}^{(o)} = \frac{1}{2}\sigma_{ij}^{(o)} \cdot \frac{1-2\nu}{E} \cdot \sigma_{ij}^{(o)} = \\ &= \frac{1-2\nu}{2E} \cdot \frac{\sigma_{kk}}{3}\delta_{ij} \cdot \frac{\sigma_{rr}}{3}\delta_{ij} = \frac{1-2\nu}{18E}\sigma_{kk}\sigma_{rr}\delta_{ii} = \frac{1-2\nu}{18E}(\sigma_{kk})^2 \cdot 3 = \frac{1-2\nu}{6E}(\sigma_{kk})^2. \end{aligned}$$

Po rozwinięciu wyrażenia σ_{kk}

$$W_\sigma^{(o)} = \frac{1-2\nu}{6E}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})^2. \quad (6.11)$$

Ponieważ pierwszy niezmiennik tensora naprężenia $I_1 = \sigma_{rr} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$, wzór (6.11) można zapisać następująco:

$$W_\sigma^{(o)} = \frac{1-2\nu}{6E} \cdot I_{1\sigma}^2 = \frac{1}{18K} \cdot I_{1\sigma}^2. \quad (6.11a)$$

Gęstość energii dewiatorów wynosi:

$$(a) \quad W_\sigma^{(d)} = \frac{1}{2}\sigma_{ij}^{(d)} \cdot \varepsilon_{ij}^{(d)} = \frac{1}{2}\sigma_{ij}^{(d)} \cdot \frac{1}{2G}\sigma_{ij}^{(d)} = \frac{1}{4G}\sigma_{ij}^{(d)}\sigma_{ij}^{(d)}$$

Stosownie do równania (1.20)₂ drugi niezmiennik dewiatora naprężenia wyraża się następująco:

$$(b) \quad I_{2\sigma}^{(d)} = \frac{1}{2}(\sigma_{rr}^{(d)}\sigma_{pp}^{(d)} - \sigma_{ij}^{(d)}\sigma_{ij}^{(d)}) = -\frac{1}{2}\sigma_{ij}^{(d)}\sigma_{ij}^{(d)}, \text{ bo } \sigma_{rr}^{(d)} = 0.$$

Po porównaniu wzorów (a) i (b) gęstość energii dewiatorów można przedstawić jako funkcję drugiego niezmiennika dewiatora naprężenia:

$$W_\sigma^{(d)} = -\frac{1}{2G}I_{2\sigma}^{(d)}. \quad (6.12)$$

Doprowadzimy teraz wzór (6.12) do postaci bardziej przydatnej w obliczeniach.

$$\begin{aligned} -2I_{2\sigma}^{(d)} &= \sigma_{ij}^{(d)}\sigma_{ij}^{(d)} = (\sigma_{ij} - \sigma_0\delta_{ij})(\sigma_{ij} - \sigma_0\delta_{ij}) = \\ &= \sigma_{ij}\sigma_{ij} - \sigma_0(\sigma_{ij} + \sigma_{ji}) + \sigma_0^2\delta_{ii} = \sigma_{ij}\sigma_{ij} - 6\sigma_0^2 + 3\sigma_0^2 = \\ &= \sigma_{ij}\sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}^2 = \sigma_{1j}\sigma_{1j} + \sigma_{2j}\sigma_{2j} + \sigma_{3j}\sigma_{3j} - \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})^2 = \\ &= \sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 + \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2 + \sigma_{21}^2 + \sigma_{32}^2 + \sigma_{13}^2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3}(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 + 2\sigma_{11}\sigma_{22} + 2\sigma_{22}\sigma_{33} + 2\sigma_{33}\sigma_{11}) = \\
&= \frac{1}{3}[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 3 \cdot (\sigma_{12}^2 + \sigma_{21}^2 + \\
&+ \sigma_{23}^2 + \sigma_{32}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{31}^2)].
\end{aligned}$$

Wobec tego

$$W_{\sigma}^{(d)} = \frac{1}{12G} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 3 \cdot (\sigma_{12}^2 + \sigma_{21}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{32}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{31}^2)] \quad (6.12a)$$

Wzór (6.12a) można uprościć uwzględniając, że $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$:

$$W_{\sigma}^{(d)} = \frac{1}{12G} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)] \quad (6.12b)$$

Analogiczne wzory można zapisać dla gęstości energii wyrażającej się wyłącznie przez odkształcenia. Podamy dla przykładu wzór na sumaryczną energię sprężystą właściwą składającą się z energii aksjatorów i dewiatorów:

$$W_{\varepsilon} = G \left[\frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})^2 + \varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2 + (\varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2 + \varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{32}^2 + \varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{21}^2) \right].$$

Najistotniejszą cechą gęstości energii jest to, że przybiera ona zawsze wartości **dodatnie** (nieujemne). Wynika to z postaci równań (6.11) i (6.12a), w których energia W jest **kwadratową jednorodną funkcją składowych stanu naprężenia**. Dalsza bardzo ważna własność gęstości energii polega na tym, że jest ona **potencjałem** dla odkształceń lub naprężeń. Oznacza to, że

$$\frac{\partial W_{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} = \varepsilon_{ij} \quad (6.13)$$

lub

$$\frac{\partial W_{\varepsilon}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij}. \quad (6.14)$$

Sprawdzimy przykładowo zależności (6.13) dla współrzędnych ε_{22} i ε_{13} :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W_{\sigma}}{\partial \sigma_{22}} &= \frac{\partial (W_{\sigma}^{(o)} + W_{\sigma}^{(d)})}{\partial \sigma_{22}} = \\
&= 2 \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) + \frac{1}{12G} [2(\sigma_{22} - \sigma_{33}) - 2(\sigma_{11} - \sigma_{22})] = \\
&= \frac{1}{3E} [(1-2\nu)(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) + (1+\nu)(2\sigma_{22} - \sigma_{11} - \sigma_{33})] = \\
&= \frac{\sigma_{22}}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{33}) = \varepsilon_{22}.
\end{aligned}$$

Do obliczenia pochodnej względem σ_{13} trzeba użyć wzoru na $W_{\sigma}^{(d)}$ w postaci (6.12)", która jeszcze nie uwzględnia symetrii tensora naprężenia:

$$\frac{\partial W_{\sigma}}{\partial \sigma_{13}} = \frac{\partial W_{\sigma}^{(d)}}{\partial \sigma_{13}} = \frac{1}{12G} \cdot 3 \cdot 2\sigma_{13} = \frac{\sigma_{13}}{2G} = \varepsilon_{13}.$$

Dodatnie wartości gęstości energii i własności potencjału obowiązują również w ciałach anizotropowych.

Warto tutaj wspomnieć, że wzory (6.11) i (6.12a), wyrażające gęstość energii sprężystej przez naprężenia, są słuszne tylko dla ciał izotropowych. W odniesieniu do ciał anizotropowych nie da się zapisać osobno związków fizycznych dla aksjatorów, analogicznych do równań (5.12) i (5.13), gdyż w ogólnym przypadku anizotropii wszechstronne równomierne ściskanie powoduje oprócz zmian objętościowych również zmiany postaciowe, natomiast czyste ścinanie powoduje także zmiany objętości.

6.4. ZASADA WZAJEMNOŚCI DLA CIAŁ LINIOWO-SPRĘŻYSTYCH

Rozważmy pręt liniowo-sprężysty rozciągany siłą P_1 (rys. 6.6a). Pod wpływem tej siły pręt ulega wydłużeniu δ_1 . Ponieważ siła P_1 rośnie od zera do swej wartości końcowej, więc praca wykonana przez tę siłę

$$(a) \quad L_{11} = \frac{1}{2} P_1 \delta_1.$$

Przyłożmy teraz jeszcze dodatkowo siłę P_2 (siła P_1 działa nadal). Wówczas praca siły P_2

$$(b) \quad L_{22} = \frac{1}{2} P_2 \delta_2.$$

a praca siły P_1 na przemieszczeniu δ_2 wywołanym przez siłę P_2

$$(c) \quad L_{12} = P_1 \delta_2.$$

Nie ma tu mnożnika 1/2, bo siła P_1 działa cały czas w swej końcowej wartości. Sumaryczna praca sił P_1 i P_2 (rys. 6.6b):

$$(d) \quad L = L_{11} + L_{22} + L_{12}.$$

Przyjmujemy teraz, że najpierw działa siła P_2 , a potem siła P_1 . Odpowiednie prace tych sił są następujące (por. rys. 6.6c):

$$(e) \quad L_{22} = \frac{1}{2} P_2 \delta_2, \quad L_{11} = \frac{1}{2} P_1 \delta_1, \quad L_{21} = P_2 \delta_1,$$

a praca sumaryczna

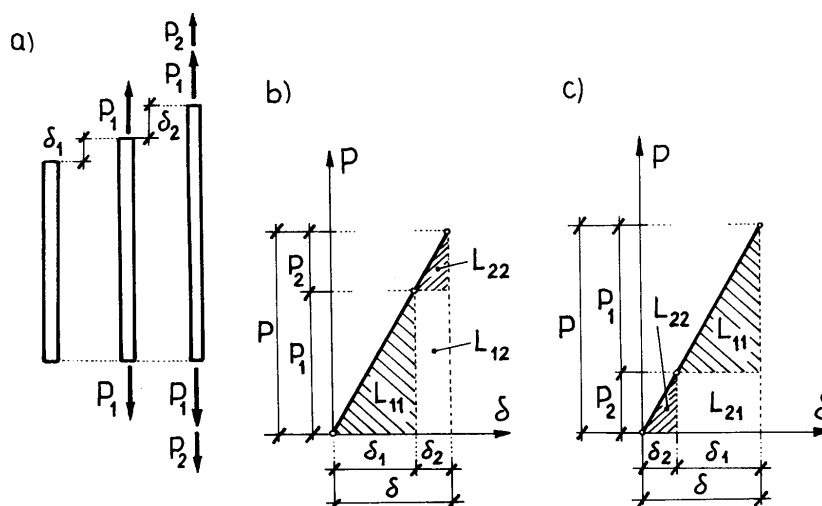
$$(f) \quad L = L_{22} + L_{11} + L_{21}.$$

Jest oczywiste, że prace (d) i (f) są równe. Stąd

$$L_{12} = L_{21}. \quad (6.15)$$

W rozważanym zadaniu

$$(g) \quad P_1 \delta_2 - P_2 \delta_1.$$



Rys. 6.6

Wzór (6.15) w teorii układów *Clapeyrona* ma bardzo duże znaczenie i wyraża treść **twierdzenia Bettiego** czyli **twierdzenia o wzajemności**:

Praca pierwszego układu sił na przemieszczeniach wywołanych przez drugi układ sił L_{12} jest równa pracy drugiego układu sił na przemieszczeniach wywołanych pierwszym układem sił L_{21} .

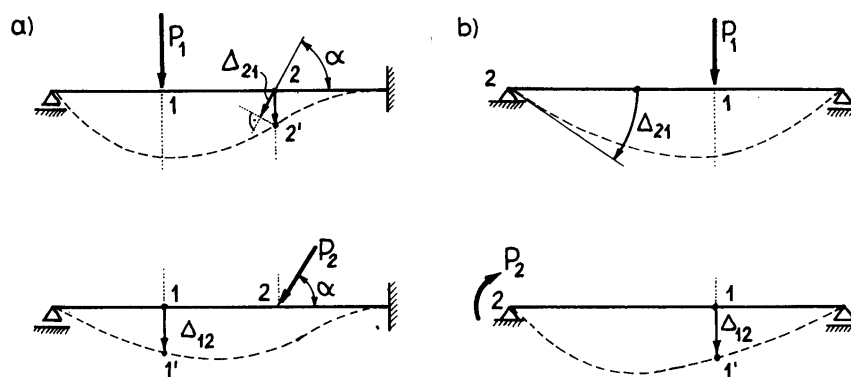
Twierdzenie to wykazaliśmy na bardzo prostym przykładzie, w którym każdy z układów reprezentował tylko jedną siłę skupioną, a punkt przyłożenia tych sił był ten sam. Analogiczne rozumowanie można przeprowadzić dla dwóch dowolnych układów sił powierzchniowych i masowych. Jeśli p'_i , G'_i oznaczają I układ sił wywołujący przemieszczenia u'_i , natomiast p''_i , G''_i oznaczają II układ sił wywołujący przemieszczenia u''_i , to wzór (g) przyjmuje postać:

$$\int_S p'_i u''_i dS + \int_V G'_i u''_i dV = \int_S p''_i u'_i dS + \int_V G''_i u'_i dV. \quad (6.16)$$

Zastosujemy zasadę wzajemności do belek, przedstawionych na rysunku 6.7. Siły P_1 i P_2 mają charakter bądź sił, bądź momentów skupionych. Ponieważ oba układy są dowolne, więc i punkty przyłożenia sił P_1 i P_2 są różne. W obu przypadkach belek, zgodnie z twierdzeniem *Bettiego*, zachodzi zależność:

$$(h) \quad P_1 \Delta_{12} = P_2 \Delta_{21},$$

gdzie Δ_{ik} ($i, k = 1, 2$) oznacza przemieszczenie punktu i w kierunku działania siły P_1 wywołane przez siłę P_k , działającą w punkcie k .



Rys. 6.7

Gdy siły P_1 i P_2 są równe jedności, to na podstawie (h) otrzymujemy:

lub ogólnie:

$$\begin{aligned}\Delta_{12} &= \Delta_{21} & (P_1 = P_2 = 1) \\ \Delta_{ik} &= \Delta_{ki}, & (P_i = P_k = 1).\end{aligned}\quad (6.17)$$

Równanie (6.17) przedstawia treść **twierdzenia Maxwella**. Na pierwszy rzut oka wydaje się, że zależność (6.17) zawiera błąd, ponieważ z przypadku *b*) na rys. 6.7 wynika, że kąt obrotu jest równy ugięciu i występuje niezgodność wymiarów. Należy jednak pamiętać, że siła P_1 i moment P_2 są bezwymiarowe. Wówczas Δ_{12} (tzn. ugięcie punktu 1 wywołane przez moment $P_2 = 1$) ma wymiar $[m/(kN \cdot m)] = [1/kN]$, a Δ_{21} (kąt obrotu punktu 2 wywołany przez siłę $P_1 = 1$) ma również wymiar $[1/kN]$. Widzimy więc, że niezgodność wymiarów Δ_{12} i Δ_{21} jest pozorna, a wzór (6.17) jest poprawny.

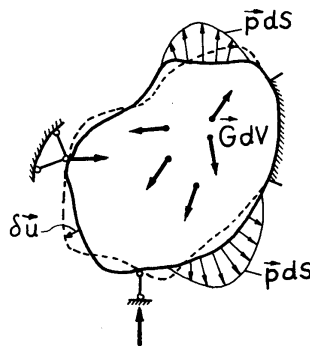
Twierdzenie *Maxwella*, będące szczególnym przypadkiem twierdzenia *Betti*ego, ma bardzo duże zastosowanie zarówno w obliczeniach jak i badaniach doświadczalnych konstrukcji sprężystych.

6.5. TWIERDZENIA ENERGETYCZNE DLA CIAŁ SPRĘŻYSTYCH

6.5.1. Zasada minimum energii potencjalnej

Rozważmy ciało sprężyste będące w stanie równowagi statycznej pod działaniem sił masowych i powierzchniowych. Na skutek działania tych sił w ciele pojawiły się przemieszczenia u_i odkształcenia ε_{ij} oraz stowarzyszone z nimi naprężenia σ_{ij} . Powierzchnię ograniczającą ciało S można podzielić na dwie części S_p i S_u . Na powierzchni S_p są dane siły powierzchniowe $p_i dS$, a na powierzchni S_u są dane przemieszczenia u_i , przy czym $S = S_p + S_u$. Przyjmijmy, że przemieszczenia u_i doznają przyrostów (wariacji) δu_i , spełniających warunki ciągłości oraz kinematyczne warunki brzegowe (por. rys. 6.8). Zatem δu_i jest zawsze równe zeru na powierzchni S_u , lecz jest dowolne na powierzchni S_p . Wariacje δu_i – jak widać – spełniają wymagania stawiane przemieszczeniom wirtualnym. Obliczmy pracę sił powierzchniowych i masowych na wariacjach przemieszczeń:

$$(a) \quad \delta L = \int_S p_i \delta u_i dS + \int_V G_i \delta u_i dV.$$



Rys. 6.8

Po zastosowaniu dobrze znanych przekształceń zależność (a) można wyrazić przez pracę naprężeń na wariacjach odkształceń: $\delta \varepsilon_{ij} = (\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}) / 2$. Otrzymujemy więc równanie:

$$(b) \quad \int_{S_p} p_i \delta u_i dS + \int_V G_i \delta u_i dV = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV.$$

Po lewej stronie występuje tylko praca sił $p_i dS$ na powierzchni S_p , gdyż na powierzchni S_u wariacja $\delta u_i = 0$. Jeżeli istnieje taka funkcja energii odkształcenia:

$W = W_\varepsilon = W(\varepsilon_{kl})$, że:

$$\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij}, \quad (6.18)$$

to prawą stronę równania (b) można zapisać następująco:

$$(c) \quad \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \int_V \frac{\partial W_\varepsilon}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta \varepsilon_{ij} dV = \delta \int_V W_\varepsilon dV.$$

Symbol δ oznacza wariację względem składowych pola odkształcenia. Po wykorzystaniu związków geometrycznych funkcję W można wyrazić przez przemieszczenia. Wówczas

$$(d) \quad \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \delta \int_V W_u dV,$$

gdzie $W_u = W[\varepsilon_{ij}(u_k)]$, a symbol δ dotyczy składowych pola przemieszczenia.

Lewą stronę równania (b) można również przedstawić w postaci wariacji względem pola przemieszczeń u_i , jeżeli siły powierzchniowe i objętościowe są **zachowawcze** (konserwatywne), czyli wtedy, gdy praca tych sił zależy tylko od konfiguracji pierwotnej i konfiguracji aktualnej (po odkształceniu), a nie zależy od drogi, na której nastąpiło przejście z jednej konfiguracji do drugiej. Oznacza to, że

$$p_i = -\frac{\partial q}{\partial u_i}, \quad G_i = -\frac{\partial Q}{\partial u_i}, \quad (6.19)$$

przy czym funkcje $q(u_1, u_2, u_3)$ i $Q(u_1, u_2, u_3)$ są, odpowiednio, potencjałami sił powierzchniowych i objętościowych. Wówczas

$$(e) \quad \int_{S_p} p_i \delta u_i dS_p + \int_V G_i \delta u_i dV = -\delta \left[\int_{S_p} q dS_p + \int_V Q dV \right].$$

Po wprowadzeniu zależności (d) i (e) do równania (b) otrzymujemy warunek:

$$\delta \left[\int_{S_p} q dS_p + \int_V (W_u + Q) dV \right] = 0$$

lub

$$\delta \Pi(u_i) = 0, \quad (6.20)$$

gdzie

$$\Pi = \Pi(u_i) = \int_{S_p} q dS_p + \int_V (W_u + Q) dV. \quad (6.21)$$

Funkcjonał $\Pi(u_i)$ nazywa się **energiją potencjalną układu**.

Najczęściej spotyka się pewien szczególny przypadek obciążeń konserwatywnych, w którym obciążenia p_i oraz G_i w ogóle nie zależą od deformacji ciała. Wówczas siły powierzchniowe i masowe nie podlegają wariacji i słuszne są zależności:

$$(f) \quad p_i \delta u_i = \delta(p_i u_i), \quad G_i \delta u_i = \delta(G_i u_i).$$

Wobec powyższego znak wariacji można wyłączyć przed całki występujące po lewej stronie równania (b), czyli

$$(g) \quad \int_{S_p} p_i \delta u_i dS_p + \int_V G_i \delta u_i dV = \delta \left[\int_{S_p} p_i u_i dS_p + \int_V G_i u_i dV \right].$$

Po wykorzystaniu tej zależności, wzór na energię potencjalną układu w przypadku, gdy wielkości p_i oraz G_i nie zależą od przemieszczeń, przybiera postać:

$$\Pi(\epsilon) = \int_V W_\epsilon dV - \int_{S_p} p_i u_i dS_p - \int_V G_i u_i dV. \quad (6.22)$$

Energia potencjalna jest liczbą, której wartość zależy od przyjętego pola przemieszczeń $u_i(x_1, x_2, x_3)$. Z warunku (6.22) wynika, że w **stanie równowagi energia potencjalna osiąga ekstremum**.

Pozostaje rozstrzygnąć, czy jest to maksimum czy minimum. W tym celu porównamy energię potencjalną Π dla rzeczywistych wartości przemieszczeń u_i z energią Π' dla innego układu przemieszczeń, $u_i + \delta u_i$, spełniającego warunek: $\delta u_i = 0$ na S_u

$$(h) \quad \delta^2 \Pi = \Pi' - \Pi = \int_V [W(\epsilon_{ij} + \delta \epsilon_{ij}) - W(\epsilon_{ij})] dV - \int_{S_p} p_i \delta u_i dS_p - \int_V G_i \delta u_i dV.$$

Rozwinięcie $W(\epsilon_{ij} + \delta \epsilon_{ij})$ w szereg *Taylora* prowadzi do wyniku:

$$W(\epsilon_{ij} + \delta \epsilon_{ij}) = W(\epsilon_{ij}) + \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} \delta \epsilon_{ij} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{kl}} \delta \epsilon_{ij} \delta \epsilon_{kl} + \dots$$

Poprzestając tylko na trzech wyrazach tego szeregu oraz wykorzystując zależność (c) otrzymujemy:

$$W(\epsilon_{ij} + \delta \epsilon_{ij}) - W(\epsilon_{ij}) = \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{kl}} \delta \epsilon_{ij} \delta \epsilon_{kl}.$$

Po podstawieniu powyższego do równania (h) oraz uwzględnieniu równania (b) uzyskujemy następujące wyrażenie na drugą wariację energii potencjalnej:

$$(i) \quad \delta^2 \Pi = \int_V \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{kl}} \delta \epsilon_{ij} \delta \epsilon_{kl} dV = \int_V \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \epsilon_{kl}} \delta \epsilon_{ij} \delta \epsilon_{kl} dV.$$

Zwróćmy uwagę na fakt, że wielkość $(\partial \sigma_{ij} / \partial \epsilon_{kl}) \delta \epsilon_{kl}$ jest równa **liczbowo** przyrostowi naprężeń wywołanemu przez zmianę odkształceń o $\delta \epsilon_{kl}$. Dla podkreślenia, że składowe σ_{ij} nie podlegają wariacji, przyrost ten oznaczamy symbolem $\delta \sigma_{ij}^*$. Wobec tego

$$(j) \quad \delta^2 \Pi = \int_V \frac{1}{2} \delta \sigma_{ij}^* \delta \epsilon_{ij} dV,$$

gdzie

$$\delta \sigma_{ij}^* = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \epsilon_{kl}} \delta \epsilon_{kl}.$$

Dla izotropowego ciała liniowo-sprężystego wyrażenie podcałkowe jest energią sprężystą właściwą W po zmianie odkształceń i naprężeń o wartości $\delta \epsilon_{ij}$ oraz $\delta \sigma_{ij}^*$:

$$\delta^2 \Pi = \int_V W(\delta \sigma_{ij}^* \delta \epsilon_{ij}) dV > 0.$$

Energia ta – niezależnie od poziomu rzeczywistych odkształceń i naprężeń – jest zawsze dodatnia. Wobec tego funkcjonal w stanie równowagi osiąga absolutne minimum. Wynika stąd **zasada minimum energii potencjalnej**:

Spośród wszystkich pól przemieszczeń spełniających warunki brzegowe na powierzchni S_u równowadze odpowiada to pole, które energii potencjalnej nadaje wartość minimalną.

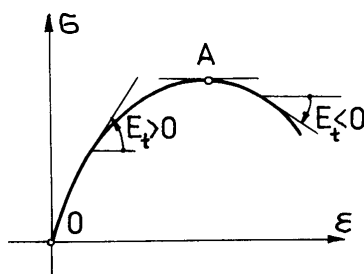
Zasada minimum energii potencjalnej obowiązuje również dla materiałów nieliniowo-sprężystych^{*)}, jeżeli tylko całka występująca w równaniu (i) jest większa od zera.

Należy zwrócić uwagę, że istnieją okoliczności, w których druga wariacja energii potencjalnej nie jest większa od zera. Występują tu dwie możliwości:

- gdy iloczyn $\delta\sigma_{ij}^*\delta\varepsilon_{ij}$ nie jest dodatnio określony,
- gdy zachodzą zasadnicze zmiany w równaniach równowagi.

Pierwsza możliwość występuje, gdy materiał staje się niestateczny, czyli gdy dodatniemu przyrostowi odkształcenia towarzyszy ujemny przyrost naprężenia. Rozważymy dla przykładu czyste rozciąganie pręta o charakterystyce $\sigma(\varepsilon)$ przedstawione na rys. 6.9. Zauważmy, że znak iloczynu $\delta\sigma^*\delta\varepsilon$ odpowiada znakowi modułu stycznego $E_t = d\sigma/d\varepsilon$. Na krzywej OA moduł styczny $E_t > 0$, czyli $\delta^2\Pi > 0$ i obowiązuje zasada minimum energii potencjalnej. W opadającej części wykresu $\sigma(\varepsilon)$, moduł

$E_t < 0$ i energia potencjalna w stanie równowagi (niestatecznej) osiąga maksimum, bo $\delta^2\Pi < 0$. Punkt A **jest punktem granicznym**, w którym materiał traci stateczność ($\delta^2\Pi = 0$), a funkcja $\Pi(\varepsilon)$ ma punkt przebiegienia.



Rys. 6.9

Druga możliwość może zachodzić w różnych okolicznościach. Najczęściej pojawiają się one wskutek występowania skończonych deformacji. Równanie równowagi lub naprężeniowe warunki brzegowe zależą wówczas od przemieszczeń ciała, gdyż zawierają one oprócz wielkości statycznych również wielkości kinematyczne. Równowaga układu odpowiada warunkowi $\delta\Pi = 0$, ale wartość drugiej wariacji $\delta^2\Pi$ nie zawsze musi być dodatnia.

Ogólnie biorąc, energia potencjalna przyjmuje wartość **minimalną** wtedy, gdy równowaga układu jest **stateczna**. Zasygnalizowane tutaj problemy omówimy bliżej w rozdziale 19., poświęconym stateczności konstrukcji.

6.5.2. Zasada minimum energii dopełniającej

Rozważmy ciało sprężyste będące w stanie równowagi pod działaniem sił masowych i powierzchniowych. Na skutek tych sił w ciele pojawiły się naprężenia σ_{ij} , przemieszczenia u_i oraz stowarzyszone z nimi odkształcenia ε_{ij} .

Naprężenia σ_{ij} spełniają równania równowagi wewnętrznej w każdym punkcie objętości ciała σ_{ij} :

$$(a) \quad \sigma_{ji,j} + G_i = 0, \quad x_k \in V,$$

oraz warunki brzegowe na powierzchni S_p :

$$(b) \quad \sigma_{ji}n_j = p_i^{(n)}, \quad x_k \in S_p,$$

^{*)} Postać związków fizycznych określona jest zależnością (6.18) i wynika z postaci funkcji energii W .

przy czym $k = 1, 2, 3$. Przyjmiemy teraz, że rzeczywiste naprężenia σ_{ij} doznają przyrostów (wariacji) $\delta\sigma_{ij}$. Ponadto żądamy, aby funkcje $\sigma_{ij} + \delta\sigma_{ij}$ spełniały równania równowagi i warunki na powierzchni ciała:

$$(c) \quad \sigma_{ji,j} + \delta\sigma_{ji,j} + G_i = 0, \quad x_k \in V,$$

$$(d) \quad (\sigma_{ji} + \delta\sigma_{ji})n_j = p_i^{(n)}, \quad x_k \in S_p.$$

Po odjęciu równania (a) od równania (c) oraz równania (b) od równania (d) otrzymujemy:

$$(e) \quad \delta\sigma_{ji,j} = 0, \quad x_k \in V,$$

$$(f) \quad \delta\sigma_{ji}n_j = 0, \quad x_k \in S_p.$$

Przyrosty wektora gęstości sił powierzchniowych $\delta p_i^{(n)}$ na powierzchni S_u są dowolne i wynoszą:

$$(g) \quad \delta p_i^{(n)} = \delta\sigma_{ji}n_j, \quad x_k \in S_u.$$

Pomnóżmy równanie (e) przez u_i i scałkujmy po objętości ciała V :

$$(h) \quad \int_V \delta\sigma_{ji,j} u_i dV = 0.$$

Jeżeli wykorzystamy wzór na pochodną iloczynu, własność symetrii tensora σ_{ij} oraz równania geometryczne, to możemy napisać:

$$\delta\sigma_{ji,j} u_i = (\delta\sigma_{ji} u_i)_{,j} - \delta\sigma_{ji} u_{i,j} = (\delta\sigma_{ji} u_i)_{,j} - \delta\sigma_{ji} \varepsilon_{ji}.$$

Otrzymujemy stąd równanie:

$$(i) \quad \int_V (\delta\sigma_{ji} u_i)_{,j} dV - \int_V \delta\sigma_{ji} \cdot \varepsilon_{ji} dV = 0.$$

Pierwszą z powyższych całek za pomocą wzoru *Greena-Ostrogradskiego-Gaussa* można zapisać następująco:

$$\int_V (\delta\sigma_{ji} u_i)_{,j} dV = \int_{S_u} (\delta\sigma_{ji} u_i) n_j dS_u.$$

Ponieważ stosownie do wzorów (f) i (g):

$$\delta\sigma_{ji} n_j = \begin{cases} \delta p_i & \text{na } S_u, \\ 0 & \text{na } S_p, \end{cases}$$

więc

$$(j) \quad \int_V (\delta\sigma_{ji} u_i)_{,j} dV = \int_{S_u} \delta p_i u_i dS_u.$$

Po podstawieniu zależności (j) do równania (i) otrzymujemy:

$$(k) \quad \int_{S_u} \delta p_i u_i dS_u - \int_V \delta\sigma_{ji} \cdot \varepsilon_{ij} dV = 0.$$

Jeżeli istnieje funkcja $W = W(\sigma_{ij}) = W_\sigma$ taka, że:

$$\frac{\partial W_\sigma}{\partial \sigma_{ij}} = \varepsilon_{ij}, \quad (6.23)$$

to

$$(l) \quad \int_V \delta\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \int_V \frac{\partial W_\sigma}{\partial \sigma_{ij}} \delta\sigma_{ij} dV = \delta \int_V W_\sigma dV.$$

Równanie (k) możemy zatem zapisać w postaci warunku:

$$\delta \left[\int_V W_{\sigma} dV - \int_{S_u} p_i u_i dS_u \right] = 0$$

lub

$$\delta \Pi^*(\sigma_{ij}) = 0, \quad (6.24)$$

gdzie symbol δ oznacza wariację względem pola naprężeń, a

$$\Pi^*(\sigma) = \int_V W_{\sigma} dV - \int_{S_u} p_i u_i dS_u. \quad (6.25)$$

Funkcjonał $\Pi^*(\sigma_{ij})$ nazywa się **energiją dopełniającą** (komplementarną) **układu**. Energia dopełniająca Π^* jest liczbą, której wartość zależy od przyjętego pola naprężeń $\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)$. Z warunku (6.24) wynika, że **prawdziwe jest to pole naprężeń**, które nadaje energii dopełniającej $\Pi^*(\sigma_{ij})$ **wartość ekstremalną**.

Podobnie jak dla energii potencjalnej wykazuje się, że wartość ta jest **minimalna**. Wynika stąd **zasada minimum energii dopełniającej**:

Spośród wszystkich pól naprężeń, spełniających równania różniczkowe równowagi wewnętrznej i warunki brzegowe na powierzchni S_p kinematycznej zgodności odpowiada to pole, które energii dopełniającej nadaje wartość minimalną.

Zasada minimum energii dopełniającej obowiązuje również dla ciał sprężystych o nieliniowej zależności między naprężeniami i odkształceniami. Musi jednak istnieć dodatnio określona funkcja W_{σ} , będąca potencjałem dla odkształceń. Konkretna postać fizyczna, określona zależnością (6.23), zależy od postaci energii W_{σ} .