

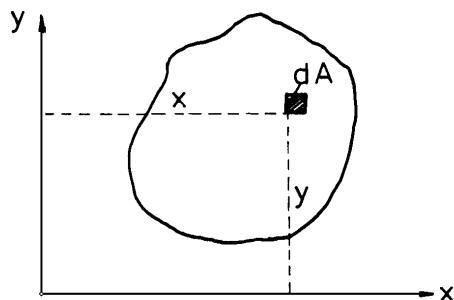
## 22. PARAMETRY GEOMETRYCZNE FIGUR PŁASKICH



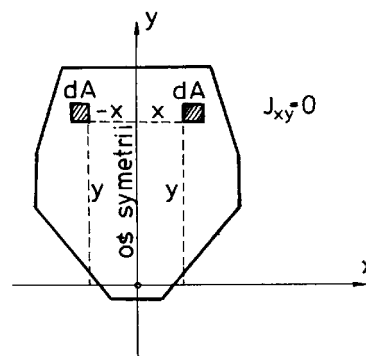
### 22.1. DEFINICJE

Rozdział 22. dotyczy figur płaskich o równomiernym rozkładzie masy ( $\rho = \text{const}$ ). Rozważane figury reprezentują zazwyczaj przekroje prętów. Dlatego zamiast określenia „figura płaska” stosuje się również określenie „przekrój”.

Definicje poszczególnych parametrów geometrycznych figur płaskich wymagają wprowadzenia prostokątnego układu osi współrzędnych  $x, y$  (rys. 22.1).



Rys. 22.1



Rys. 22.2

#### **Pole przekroju**

$$A = \int_A dA > 0 \quad [\text{m}^2]. \quad (22.1)$$

#### **Momenty statyczne przekroju:**

– względem osi  $x$

$$S_x = \int_A y dA \quad [\text{m}^3], \quad (22.2a)$$

– względem osi  $y$

$$S_y = \int_A x dA \quad [\text{m}^3]. \quad (22.2b)$$

#### **Momenty bezwładności:**

– względem osi  $x$

$$J_x = \int_A y^2 dA > 0 \quad [\text{m}^4], \quad (22.3a)$$

– względem osi  $y$

$$J_y = \int_A x^2 dA > 0 \quad [\text{m}^4], \quad (22.3b)$$

– odśrodkowy (dewiacyjny)

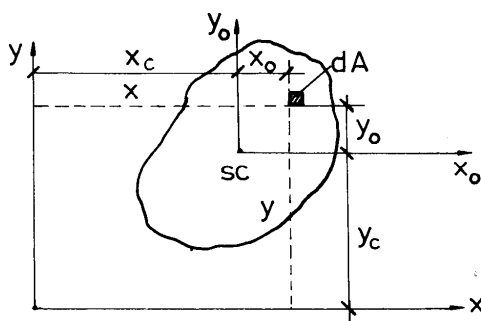
$$J_{xy} = \int_A x y dA \quad [\text{m}^4]. \quad (22.3c)$$

Z podanych wyżej wzorów definicyjnych wynika, że momenty statyczne mierzymy w jednostkach długości do potęgi trzeciej (np.  $[\text{m}^3]$ ,  $[\text{cm}^3]$ ). Mogą one przyjmować wartości dodatnie lub ujemne. Momenty bezwładności mierzymy w jednostkach długości do potęgi czwartej (np.  $[\text{m}^4]$ ,  $[\text{cm}^4]$ ). Osiowe momenty bezwładności przybierają zawsze wartości dodatnie i są pewną miarą rozproszenia pola figury względem danej osi. Im rozproszenie jest większe, tym osiowy moment bezwładności jest większy. Moment dewiacyjny może być zarówno dodatni, jak i ujemny, a jego wartość bezwzględna jest miarą asym-

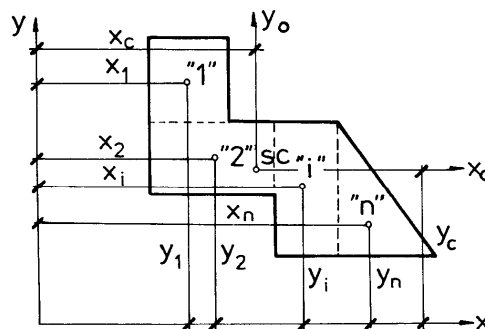
trii figury względem przyjętego układu współrzędnych. Łatwo zauważyć, że jeśli choć jedna z osi układu jest osią symetrii figury, to moment dewiacyjny względem tego układu jest równy zero (por. rys. 22.2). Wynika to stąd, że iloczyny  $xy dA$  w odpowiadających sobie punktach wzajemnie się znoszą.

## 22.2. OSIE ŚRODKOWE, ŚRODEK CIĘŻKOŚCI

**Oś środkowa** to taka oś, względem której moment statyczny jest równy zero. **Środek ciężkości (SC)** to punkt przecięcia osi środkowych.



Rys. 22.3



Rys. 22.4

Jeśli osie  $x_0$  i  $y_0$  są osiami środkowymi, to

$$(a) \quad S_{x_0} = \int_A y_0 dA = \int_A (y - y_c) dA = 0,$$

$$(b) \quad S_{y_0} = \int_A x_0 dA = \int_A (x - x_c) dA = 0.$$

Po rozpisaniu zależności (a) i (b) otrzymujemy:

$$S_{x_0} = \int_A y dA - y_c \int_A dA = S_x - y_c \cdot A = 0,$$

$$S_{y_0} = \int_A x dA - x_c \int_A dA = S_y - x_c \cdot A = 0,$$

skąd wyznaczamy współrzędne środka ciężkości  $x_c$  i  $y_c$ :

$$x_c = \frac{S_y}{A}, \quad y_c = \frac{S_x}{A}. \quad (22.4)$$

Jeśli znamy położenie środka ciężkości i pole figury, to momenty statyczne tej figury względem osi  $x$ ,  $y$  leżących w odległościach  $x_c$  i  $y_c$  obliczamy wprost z równań (22.4):

$$S_x = A \cdot y_c, \quad S_y = A \cdot x_c.$$

Jeśli figura składa się z  $n$  części o znanych polach  $A_i$  oraz współrzędnych środków ciężkości  $x_i$  i  $y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), to (por. rys. 22.4):

$$S_x = \sum_{i=1}^n S_{x_i} = \sum_{i=1}^n A_i \cdot y_i; \quad S_y = \sum_{i=1}^n S_{y_i} = \sum_{i=1}^n A_i \cdot x_i. \quad (22.5)$$

$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i x_i}{\sum_{i=1}^n A_i}; \quad y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i y_i}{\sum_{i=1}^n A_i}. \quad (22.6)$$

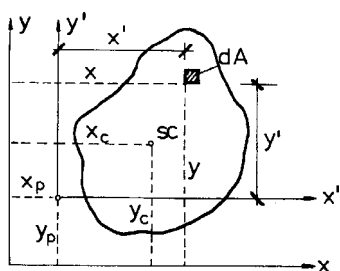
### 22.3. MOMENTY BEZWŁADNOŚCI PRZY PRZESUNIĘCIU I OBROcie UKŁADU OSI WSPÓŁRZĘDNYCH. KIERUNKI I WARTOŚCI GŁÓWNE

Założymy, że znamy wartości momentów bezwładności  $J_{x'}$ ,  $J_{y'}$ ,  $J_{x'y'}$  odniesione do układu osi  $x'$  i  $y'$ . Dokonajmy przesunięcia równoległego układu osi z położenia  $x'$ ,  $y'$  do nowego położenia  $x$ ,  $y$ . Pytamy teraz, jakie wartości przyjmą momenty bezwładności  $J_x$ ,  $J_y$ ,  $J_{xy}$  odniesione do układu osi  $x$ ,  $y$ , jeśli współrzędne przesunięcia względnego obu układów wynoszą  $x_p$  i  $y_p$  (rys. 22.5). Przesunięcie układów opisują równania:

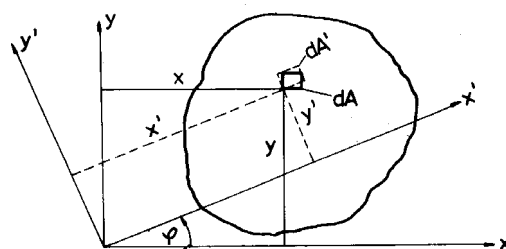
$$(a) \quad \begin{cases} x = x' + x_p, \\ y = y' + y_p. \end{cases}$$

Po podstawieniu tych zależności do wzorów definicyjnych (22.3) otrzymujemy:

$$(b) \quad \begin{cases} J_x = \int_A y^2 dA = \int_A (y' + y_p)^2 dA = \int_A y'^2 dA + 2y_p \int_A y' dA + y_p^2 \int_A dA, \\ J_y = \int_A x^2 dA = \int_A (x' + x_p)^2 dA = \int_A x'^2 dA + 2x_p \int_A x' dA + x_p^2 \int_A dA, \\ J_{xy} = \int_A xy dA = \int_A (x' + x_p)(y' + y_p) dA = \int_A x'y' dA + x_p \int_A y' dA + y_p \int_A x' dA + x_p y_p \int_A dA. \end{cases}$$



Rys. 22.5



Rys. 22.6

Prawe strony równań (b) można przedstawić za pomocą parametrów geometrycznych figury związanych z układem  $x'$ ,  $y'$  wykorzystując wzory (22.1), (22.2) i (22.3):

$$(c) \quad \begin{cases} J_x = J_{x'} + 2y_p \cdot S_{x'} + y_p^2 \cdot A, \\ J_y = J_{y'} + 2x_p \cdot S_{y'} + x_p^2 \cdot A, \\ J_{xy} = J_{x'y'} + x_p S_{x'} + y_p S_{y'} + x_p \cdot y_p \cdot A. \end{cases}$$

Jeśli układ osi  $x', y'$  jest układem osi środkowych ( $x' = x_0$ ,  $y' = y_0$ ,  $x_p = x_c$ ,  $y_p = y_c$ ), to wzory (c) znacznie się uproszczą. Dla osi środkowych momenty statyczne  $S_{x'} = S_{x_0} = 0$  i  $S_{y'} = S_{y_0} = 0$ , a równania (c) przyjmą postać:

$$\left. \begin{aligned} J_x &= J_{x0} + y_c^2 A, \\ J_y &= J_{y0} + x_c^2 A, \\ J_{xy} &= J_{x0y0} + x_c y_c A. \end{aligned} \right\} \quad (22.7)$$

Są to tzw. **wzory Steinera**, bardzo użyteczne w obliczeniach.

Rozważymy teraz, jak zmieniają się momenty bezwładności przy **obrocie układu** osi współrzędnych. Przyjmijmy, że znane są wartości  $J_x, J_y, J_{xy}$  w układzie osi  $x, y$ . Poszukujemy  $J_{x'}, J_{y'}$ , i  $J_{x'y'}$  w układzie osi  $x', y'$  obróconym o kąt  $\varphi$  względem układu  $x, y$  (rys. 22.6). Współrzędne punktów obu układów są powiązane wzorami transformacyjnymi:

$$(d) \quad \begin{cases} x' = x \cos \varphi + y \sin \varphi, \\ y' = -x \sin \varphi + y \cos \varphi. \end{cases}$$

W celu wyprowadzenia poszukiwanych zależności skorzystamy ze wzoru na zamianę zmiennych w całce podwójnej:

$$(e) \quad \int_A f(x', y') dA' = \int_A f[x'(x, y), y'(x, y)] J \cdot dA,$$

gdzie jacobian

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} \\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix} = 1.$$

Po podstawieniu wzorów transformacyjnych (d) do wzorów definicyjnych otrzymujemy:

$$(f) \quad \left\{ \begin{aligned} J_{x'} &= \int_{A'} y'^2 dA' = \int_A (-x \sin \varphi + y \cos \varphi)^2 dA = \\ &= \sin^2 \varphi \int_A x^2 dA - 2 \sin \varphi \cos \varphi \int_A xy dA + \cos^2 \varphi \int_A y^2 dA, \\ J_{y'} &= \int_{A'} x'^2 dA' = \int_A (x \cos \varphi + y \sin \varphi)^2 dA = \\ &= \cos^2 \varphi \int_A x^2 dA + 2 \sin \varphi \cos \varphi \int_A xy dA + \sin^2 \varphi \int_A y^2 dA, \\ J_{x'y'} &= \int_{A'} x' y' dA' = \int_A (x \cos \varphi + y \sin \varphi)(-x \sin \varphi + y \cos \varphi) dA = \\ &= -\sin \varphi \cos \varphi \int_A x^2 dA + \sin \varphi \cos \varphi \int_A y^2 dA + (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \int_A xy dA. \end{aligned} \right.$$

Prawe strony równań (f) można wyrazić za pomocą momentów bezwładności związanych z układem osi  $x, y$ . Wygodnie też będzie wprowadzić funkcję trygonometryczną kąta  $2\varphi$ :

$$\sin^2 \varphi = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi); \quad \cos^2 \varphi = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi); \quad 2 \sin \varphi \cos \varphi = \sin 2\varphi.$$

Ostatecznie poszukiwane wzory transformacyjne dla momentów bezwładności przy obrocie układu przyjmują postać:

$$\left. \begin{aligned} J_{x'} &= \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2} \cdot \cos 2\varphi - J_{xy} \sin 2\varphi, \\ J_{y'} &= \frac{J_x + J_y}{2} - \frac{J_x - J_y}{2} \cdot \cos 2\varphi + J_{xy} \sin 2\varphi, \\ J_{x'y'} &= \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\varphi + J_{xy} \cos 2\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (22.8)$$

Rzut oka na wzory (22.8) pozwala stwierdzić, że po obrocie układu suma osiowych momentów bezwładności nie ulega zmianie. Suma ta określa tzw. **biegunowy moment bezwładności**  $J_b$ . Moment ten jest więc niezmiennikiem:

$$J_b = \int_A (x^2 + y^2) dA = J_x + J_y = J_{x'} + J_{y'} = \text{const.} \quad (22.9)$$

Szczegółowa analiza wzoru (22.8) prowadzi do wniosku, że niezmiennikiem jest również wyrażenie:

$$I_3 = J_x J_y - J_{xy}^2 = J_{x'} J_{y'} - J_{x'y'}^2 = \text{const.} \quad (22.10)$$

W punkcie 22.1 zwróciliśmy uwagę na to, że jeśli jedna z osi układu jest osią symetrii figury, to moment dewiacyjny w tym układzie jest równy zeru. Powstaje pytanie, czy dla dowolnego niesymetrycznego przekroju jest również taki układ osi, w którym znika moment dewiacyjny. Wymaganie, by  $J_{x'y'} = 0$ , stosownie do wzoru (22.8)<sub>3</sub>, nakłada na kąt  $\varphi = \varphi_0$  warunek:

$$(g) \quad \frac{J_x - J_y}{2} \cdot \sin 2\varphi_0 + J_{xy} \cos 2\varphi_0 = 0,$$

skąd

$$\text{tg} 2\varphi_0 = - \frac{2J_{xy}}{J_x - J_y}. \quad (22.11)$$

Zwróćmy uwagę, że do identycznego warunku z warunkiem (g) dochodzimy, poszukując ekstremalnych wartości osiowych momentów bezwładności jako funkcji kąta  $\varphi$ :

$$\frac{dJ_{y'}}{d\varphi} = - \frac{dJ_{x'}}{d\varphi} = 2 \cdot \frac{J_x - J_y}{2} \cdot \sin 2\varphi + 2 \cdot J_{xy} \cos 2\varphi = 0.$$

Z powyższych rozważań wnioskujemy, że jest pewien wyróżniony układ osi współrzędnych, określony kątem  $\varphi_0$ , dla którego osiowe momenty bezwładności osiągają wartości ekstremalne, a moment dewiacyjny znika. Taki układ osi nazywamy układem **głównych osi bezwładności** (I, II), a momenty osiowe w tym układzie – **głównymi momentami bezwładności**. Wartości głównych momentów bezwładności obliczamy po wstawieniu kąta  $\varphi_0$  z równania (22.11) do równań (22.8)<sub>1</sub> i (22.8)<sub>2</sub>:

$$\left. \begin{aligned} J_{\max} = J_I &= \frac{J_x + J_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2}, \\ J_{\min} = J_{II} &= \frac{J_x + J_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2}. \end{aligned} \right\} \dots \quad (22.12)$$

Położenie osi I związanej z momentem  $J_I$  określa się następująco:

- jeśli  $J_x > J_y$ , to  $\varphi_0$  jest kątem pomiędzy osią  $x$  a osią I,
- jeśli  $J_x < J_y$ , to  $\varphi_0$  jest kątem pomiędzy osią  $y$  a osią I.

Najczęściej obliczenia wykonujemy w układzie osi środkowych  $x_0, y_0$ . Wówczas osie I i II nazywamy głównymi środkowymi osiami bezwładności, a momenty  $J_I$  i  $J_{II}$  – głównymi środkowymi momentami bezwładności.

Uważny czytelnik stwierdzi uderzającą analogię między wzorami (22.8)–(22.11) a zależnościami występującymi w analizie płaskiego stanu naprężenia (p. 1.8). Jeśli we wzorach (22.8) przyjmiemy, że:

$$J_x = \sigma_x, \quad J_y = \sigma_y, \quad J_{xy} = \tau_{xy}, \quad J_{x'} = \sigma_{x'}, \quad J_{y'} = \sigma_{y'}, \quad J_{x'y'} = \tau_{x'y'},$$

to otrzymamy zależności identyczne z wzorami transformacyjnymi (1.33) dla płaskiego stanu naprężenia. Analogia ta wynika stąd, że momenty bezwładności tworzą płaski tensor drugiego rzędu. Wyjaśnienie tensorowego charakteru momentów bezwładności zamieszczono w p. 22.4.

Wobec powyższego koło *Mohra*, omówione szczegółowo w rozdziale 1. (p. 1.8), jest również ilustracją graficzną wzorów transformacyjnych (22.8). Dla jasności trzeba też dodać, że konstrukcję koła wykonuje się, przyjmując że  $J_{yx} = -J_{xy}$ ! Ciekawostką jest, że *Mohr* w 1887 roku obmyślił konstrukcję koła właśnie dla momentów bezwładności.

## 22.4. PARAMETRY GEOMETRYCZNE PRZEKROJU JAKO WIELKOŚCI TENSOROWE

Momenty statyczne nazywają się często momentami pierwszego rzędu (stopnia), a momenty bezwładności – momentami rzędu drugiego (stopnia). Określenia te wynikają z potęg, w których występują współrzędne  $x, y$  we wzorach (22.2) i (22.3). Pole przekroju można by nazwać momentem rzędu zero. Nadmieniamy o tym nieprzypadkowo, gdyż pole przekroju, momenty statyczne i momenty bezwładności mają własności tensorów odpowiednio rzędu zerowego, pierwszego i drugiego. Pole przekroju jest skalarem, momenty statyczne  $S_x$  i  $S_y$  są współrzędnymi wektora, a momenty bezwładności  $J_x, J_y, J_{xy}$  – współrzędnymi tensora dwuwymiarowego.

Dla potwierdzenia powyższych uwag wyprowadzimy prawa transformacji momentów statycznych i momentów bezwładności dla obrotu układu współrzędnych. Przyjmiemy najpierw następujące oznaczenia:

$$(a) \quad \begin{cases} x_1 = x, & x_2 = y; & x_{1'} = x', & x_{2'} = y'; \\ M_1 = S_y, & M_2 = S_x; & B_{11} = J_y, & B_{22} = J_x, & B_{12} = B_{21} = J_{xy} \end{cases}$$

Wówczas wzory definicyjne (22.2) i (22.3) można zapisać następująco:

$$(b) \quad M_\alpha = \int_A x_\alpha dA,$$

$$(c) \quad B_{\alpha\beta} = \int_A x_\alpha x_\beta dA, \quad (\alpha, \beta = 1, 2),$$

a wzory transformacyjne współrzędnych punktów w konwencji sumacyjnej określają znane zależności (por. rozdz. 1.):

$$(d) \quad x_{\gamma'} = x_\alpha \cdot a_{\alpha\gamma'}$$

lub

$$(e) \quad x_{\delta'} = x_\beta \cdot a_{\beta\delta'} \quad (\alpha, \beta = 1, 2; \gamma', \delta' = 1', 2').$$

W układzie osi obróconych, stosownie do definicji (b) i (c) oraz wzorów (d) i (e), możemy napisać:

$$\begin{aligned} M_{\gamma'} &= \int_{A'} x_{\gamma'} dA' = \int_A x_\alpha \cdot a_{\alpha\gamma'} dA = a_{\alpha\gamma'} \int_A x_\alpha dA, \\ B_{\gamma'\delta'} &= \int_{A'} x_{\gamma'} \cdot x_{\delta'} dA' = \int_A x_\alpha a_{\alpha\gamma'} \cdot x_\beta a_{\beta\delta'} dA = a_{\alpha\gamma'} a_{\beta\delta'} \int_A x_\alpha \cdot x_\beta dA, \end{aligned}$$

skąd

$$(f) \quad \begin{cases} M_{\gamma'} = M_\alpha \cdot a_{\alpha\gamma'}, \\ B_{\gamma'\delta'} = B_{\alpha\beta} \cdot a_{\alpha\gamma'} \cdot a_{\beta\delta'}. \end{cases}$$

Wzory (f) definiują transformację wektora i tensora przy obrocie układu współrzędnych w przestrzeni dwuwymiarowej, co wykazuje, że rzeczywiście momenty statyczne są współrzędnymi wektora, a momenty bezwładności – współrzędnymi tensora. Podobnie jest i w przestrzeni trójwymiarowej, gdzie momenty bezwładności tworzą dziewięć współrzędnych tensora symetrycznego, zdefiniowanych następująco (Karaśkiewicz [24]):

$$(g) \quad B_{ij} = B_{ji} = \left[ \int_V x_k x_k \cdot dV \right] \cdot \delta_{ij} - \int_V x_i x_j \cdot dV; \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Tensor bezwładności figury płaskiej jest reprezentowany przez macierz:

$$(h) \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_y & J_{xy} \\ J_{yx} & J_x \end{bmatrix}.$$

Z postaci tej wnioskujemy, że niezmienniki tensora bezwładności są opisane wzorami (por. również wzory (22.9) i (22.10)):

$$(i) \quad I_1 = I_2 = J_b = J_x + J_y = J_{x'} + J_{y'} = J_I + J_{II} = \text{const} > 0,$$

$$(j) \quad I_3 = \begin{vmatrix} J_y & J_{xy} \\ J_{yx} & J_x \end{vmatrix} = J_y \cdot J_x - J_{xy}^2 = J_{y'} J_{x'} - J_{x'y'}^2 = J_I \cdot J_{II} = \text{const} > 0.$$

## 22.5. WSKAZÓWKI PRAKTYCZNE

Analogia między momentami bezwładności a płaskim stanem naprężenia nie jest jednak pełna. Istotna różnica polega na tym, że **osiowe momenty bezwładności są zawsze dodatnie**, podczas gdy naprężenia normalne mogą być również ujemne. Okoliczność ta nakłada pewne warunki na wartość momentów bezwładności. Ponieważ  $I_3 = J_I \cdot J_{II} > 0$ , więc zgodnie ze wzorem (j) w p. 22.4 musi zachodzić nierówność:

$$J_x \cdot J_y - J_{xy}^2 > 0,$$

skąd

$$(a) \quad |J_{xy}| < \sqrt{J_x \cdot J_y}.$$

Z nierówności  $(x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy > 0$  wynika dalej, że

$$J_x + J_y - 2J_{xy} > 0,$$

skąd

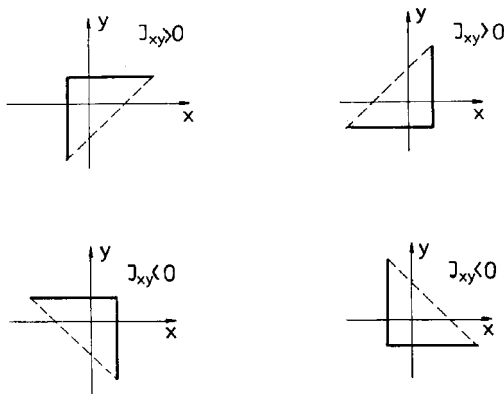
$$(b) \quad J_{xy} < \frac{J_x + J_y}{2}.$$

Ze wzoru (a) wynika, że wartość bezwzględna momentu dewiacyjnego musi być mniejsza od średniej geometrycznej osiowych momentów bezwładności. Ze wzoru (b) wynika natomiast, że moment dewiacyjny musi być mniejszy od średniej arytmetycznej osiowych momentów bezwładności. Ponieważ średnia geometryczna nigdy nie jest większa od średniej arytmetycznej, zatem miarodajna jest nierówność (a), którą można zapisać następująco:

$$-\sqrt{J_x \cdot J_y} < J_{xy} < \sqrt{J_x \cdot J_y}. \quad (22.13)$$

Nierówność (22.13) dowodzi, że dowolna trójka liczb nie tworzy tensora bezwładności. Nierówność ta – słuszna również dla dowolnego, nieśrodkowego układu współrzędnych – jest właściwie jedynym sposobem kontroli ilościowej obliczonych wartości  $J_x, J_y, J_{xy}$ .

Gdy korzysta się z gotowych wzorów lub tablic należy ustalić właściwy znak momentu dewiacyjnego. Najczęściej zdarza się to w przekrojach trójkątnych lub kątownikach. O znaku  $J_{xy}$  decyduje położenie ramion kątownika (lub trójkąta). Rozróżniamy tu 4 przypadki przedstawione na rys. 22.7.



Rys. 22.7

W tablicy IV podano parametry geometryczne najczęściej spotykanych figur płaskich.

Tablica IV

A	$bh$	$\frac{1}{2}bh$	$\pi r^2$	$\frac{1}{4}\pi r^2$
$J_{x_0}$	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{\pi r^4}{4}$	$(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi})r^4$
$J_{y_0}$	$\frac{b^3h}{12}$	$\frac{b^3h}{36}$	—, —	—, —
$J_{x_0y_0}$	0	$\frac{b^2h^2}{72}$	0	$(\frac{4}{9\pi} - \frac{1}{8})r^4$

## 22.6. PRZYKŁAD LICZBOWY

Dany jest przekrój złożony, przedstawiony na rys. 22.8.

Obliczyć:

- położenie środka ciężkości,
- momenty bezwładności względem osi środkowych  $x_0, y_0$ ,
- kierunki środkowych osi głównych,
- główne środkowe momenty bezwładności,
- momenty bezwładności względem osi środkowych  $x_0, y_0$ , obróconych względem osi  $x_0, y_0$  o kąt  $\varphi = -40^\circ$ .

Obliczenia zilustrować kołem *Mohra*.



Element 1

$$\sin \varphi = \sin(-53,13^\circ) = -0,80; \quad \cos \varphi = \cos(-53,13^\circ) = 0,60,$$

$$x'_1 = 8 - 1,96 = 6,04 \text{ cm}, \quad y'_1 = 3,93 + 1,0 = 4,93 \text{ cm},$$

$$x_1 = 6,04 \cdot 0,60 + 4,93 \cdot (-0,80) = -0,32 \text{ cm},$$

$$y_1 = -6,04 \cdot (-0,80) + 4,93 \cdot 0,60 = 7,70 \text{ cm}.$$

Element 2

$$x_2 = 7,50 \text{ cm},$$

$$y_2 = 10,00 \text{ cm}.$$

Element 3

$$x_3 = 15,00 + 2,00 + 10,00 - 2,74 = 24,26 \text{ cm},$$

$$y_3 = 20,00 - 2,74 = 17,26 \text{ cm}.$$

Element 3

$$x_4 = 15,00 + 2,00 + 10,00 + 2,01 = 29,01 \text{ cm},$$

$$y_4 = 10,00 \text{ cm}.$$

Tablica V

Nr	$A_i$ [cm <sup>2</sup> ]	$x_i$ [cm]	$y_i$ [cm]	$A_i x_i$ [cm <sup>3</sup> ]	$A_i y_i$ [cm <sup>3</sup> ]	$J_{x_{o_i}}$ [cm <sup>4</sup> ]	$J_{y_{o_i}}$ [cm <sup>4</sup> ]	$J_{x_{o_i} y_{o_i}}$ [cm <sup>4</sup> ]	$x_c = x_i - x_c$ [cm]	$y_c = y_i - y_c$ [cm]	$A_i x_{ci}^2$ [cm <sup>4</sup> ]	$A_i y_{ci}^2$ [cm <sup>4</sup> ]	$A_i x_{ci} y_{ci}$ [cm <sup>4</sup> ]
1	19,2	-0,32	7,79	-6,1	149,6	256,8	121,8	-113,1	-14,68	-2,81	4137,6	151,6	792,0
2	50,0	7,5	10,0	375,0	500,0	1672,7	948,2	1242,0	-6,86	-0,60	2353,0	18,0	205,8
3	15,5	24,26	17,26	376,0	267,5	145,0	145,0	-85,0	9,90	6,66	1519,2	687,5	1022,0
4	32,2	29,01	10,0	934,1	322,0	1910,0	148,0	0	14,65	-0,60	6910,8	11,6	-283,0
	116,9			1679,0	1239,1	3984,5	1363,0	1043,9			14920,6	868,7	1736,8

Sumowania występujące we wzorach (a) wykonano w tablicy V. Współrzędne środka ciężkości całej figury ( $A = 116,9 \text{ cm}^2$ ,  $S_y = 1679,0 \text{ cm}^3$ ,  $S_x = 1239,1 \text{ cm}^3$ ):

$$x_c = \frac{1679,0}{116,9} = 14,36 \text{ cm}, \quad y_c = \frac{1239,1}{116,9} = 10,60 \text{ cm}.$$

Zwróćmy uwagę na to, że środek ciężkości całego przekroju musi leżeć w obrębie wieloboku utworzonego przez połączenie środków ciężkości figur składowych.

W naszym zadaniu wymaganie to jest spełnione (por. rys. 22.8).

b) Obliczenie momentów bezwładności względem osi środkowych  $x_0, y_0$

Współrzędne środków ciężkości w układzie osi środkowych dla poszczególnych figur składowych obliczamy ze wzorów:

$$(c) \quad \begin{cases} x_{ci} = x_i - x_c, \\ y_{ci} = y_i - y_c. \end{cases}$$

Momenty bezwładności względem osi środkowych wyznaczamy na podstawie wzorów *Steinera*:

$$\begin{aligned}
 J_{x_0} &= \sum_i \left( J_{x_{0i}} + A_i \cdot y_{ci}^2 \right) = \sum_i J_{x_{0i}} + \sum_i A_i (y_i - y_c)^2, \\
 (d) \quad J_{y_0} &= \sum_i \left( J_{y_{0i}} + A_i \cdot x_{ci}^2 \right) = \sum_i J_{y_{0i}} + \sum_i A_i (x_i - x_c)^2, \\
 J_{x_0 y_0} &= \sum_i \left( J_{x_{0i} y_{0i}} + A_i \cdot x_{ci} y_{ci} \right) = \sum_i J_{x_{0i} y_{0i}} + \sum_i A_i (x_i - x_c) \cdot (y_i - y_c).
 \end{aligned}$$

Wyznaczenie momentów bezwładności poszczególnych figur względem własnych osi środkowych, równoległych do osi  $x_0$  i  $y_0$ , tzn.  $J_{x_{0i}}$ ,  $J_{y_{0i}}$ ,  $J_{x_{0i} y_{0i}}$ , wymaga pewnych dodatkowych obliczeń.

#### Element 1

Najpierw trzeba ustalić momenty bezwładności dla osi  $x_{01}$  i  $y_{01}$ . Na podstawie tablic otrzymujemy:

$$J_{x_{01}} = 279 \text{ cm}^4, \quad J_{y_{01}} = 99,6 \text{ cm}^4.$$

Moment dewiacyjny  $J_{x_{01} y_{01}}$  można wyznaczyć kilkoma sposobami, ponieważ znamy zarówno  $J_{\min} = J_{\text{II}}$ , jak i  $\text{tg} \varphi_0$ .

Sposób 1. Ponieważ  $J_{\text{I}} + J_{\text{II}} = J_{x_{01}'} + J_{y_{01}'}$ ,

$$\text{więc: } J_{\text{I}} = J_{x_{01}'} + J_{y_{01}'} - J_{\text{II}} = 279,0 + 99,6 - 57,7 = 320,9 \text{ cm}^4.$$

Ze wzoru (22.10) na obliczenie niezmiennika  $I_3$  otrzymujemy:

$$J_{x_{01}'} J_{y_{01}'} - J_{x_{01} y_{01}'}^2 = J_{\text{I}} J_{\text{II}},$$

skąd

$$J_{x_{01} y_{01}'} = \sqrt{J_{x_{01}'} J_{y_{01}'} - J_{\text{I}} J_{\text{II}}} = \sqrt{279 \cdot 99,6 - 320,9 \cdot 57,7} = 96,3 \text{ cm}^4 > 0,$$

bo w układzie osi  $x'_{01}$ ,  $y'_{01}$  kątownik jest w położeniu dodatnim.

Sposób 2. Ze wzoru na obliczenie  $\text{tg} 2\varphi_0$  mamy ( $2\varphi_0 = 2\arctg(0,436) = 47,11^\circ$ ):

$$|J_{x_{01} y_{01}'}| = \left| \frac{J_{x_{01}'} - J_{y_{01}'}}{2} \cdot \text{tg} 2\varphi_0 \right|, \quad J_{x_{01} y_{01}'} = \frac{279 - 99,6}{2} \cdot \text{tg} 47,11^\circ = 96,6 \text{ cm}^4.$$

Sposób 3. Ze wzoru transformacyjnego na  $J_{xy}$ , wyrażonego przez główne momenty bezwładności  $J_{\text{I}}$  i  $J_{\text{II}}$ , mamy:

$$J_{x_{01} y_{01}'} = \frac{J_{\text{I}} - J_{\text{II}}}{2} \cdot \sin 2\varphi = \frac{320,9 - 57,7}{2} \cdot \sin 47,11^\circ = 96,4 \text{ cm}^4.$$

Do dalszych obliczeń przyjmujemy, że  $J_{x_{01} y_{01}'} = 96,5 \text{ cm}^4$ . W celu obliczenia  $J_{x_{01}}$ ,  $J_{y_{01}}$ ,  $J_{x_{01} y_{01}}$  wykorzystamy wzory transformacyjne na obrót układu z położenia  $x'_{01}$ ,  $y'_{01}$  do położenia  $x_{01}$ ,  $y_{01}$  o kąt  $\alpha = -53,13^\circ$ .

$$J_{x_{01}} = \frac{279 + 99,6}{2} + \frac{279 - 99,6}{2} \cos(-2 \cdot 53,13^\circ) - 96,5 \cdot \sin(-2 \cdot 53,13^\circ) = 256,8 \text{ cm}^4,$$

$$J_{y_{01}} = 279 + 99,6 - 256,8 = 121,8 \text{ cm}^4,$$

$$J_{x_{01} y_{01}} = \frac{279 - 99,6}{2} \sin(-2 \cdot 53,13^\circ) + 96,5 \cdot \cos(-2 \cdot 53,13^\circ) = -113,1 \text{ cm}^4.$$

#### Element 2 (blacha 250 mm×20 mm)

Momenty bezwładności względem osi  $x_{02}'$  i  $y_{02}'$

$$J_{x_{02}'} = \frac{25,0 \cdot 2,0^3}{12} = 16,7 \text{ cm}^4; \quad J_{y_{02}'} = \frac{2,0 \cdot 25,0^3}{12} = 2604,2 \text{ cm}^4.$$

Ponieważ osie  $x'_{02}$ ,  $y'_{02}$  są głównymi osiami bezwładności, więc  $J_{x'_{02}y'_{02}} = 0$ . Momenty bezwładności względem osi środkowych  $x_{02}$  i  $y_{02}$  obliczymy podobnie jak dla elementu 1:

$$J_{x_{02}} = \frac{16,7 + 2604,2}{2} + \frac{16,7 - 2604,2}{2} \cdot \cos(-2 \cdot 53,13^\circ) = 1672,7 \text{ cm}^4,$$

$$J_{y_{02}} = 16,7 + 2604,2 - 1672,7 = 948,2 \text{ cm}^4,$$

$$J_{x_{02}y_{02}} = \frac{16,7 - 2604,2}{2} \sin(-2 \cdot 53,13^\circ) = 1242,0 \text{ cm}^4.$$

Element 3

$$J_{x_{03}} = J_{y_{03}} = 145 \text{ cm}^4.$$

Moment dewiacyjny  $J_{x_{03}y_{03}}$  obliczymy ze wzorów transformacyjnych wiedząc, że główne osie bezwładności są pochylone pod kątem  $-45^\circ$  w stosunku do osi  $x_{03}$ ,  $y_{03}$ , a  $J_I = 230 \text{ cm}^4$  i  $J_{II} = 60 \text{ cm}^4$

$$J_{x_{03}y_{03}} = \frac{230,0 - 66,0}{2} \sin(-2 \cdot 45^\circ) = -85,0 \text{ cm}^4.$$

Element 4

Osie  $x_{04}$  i  $y_{04}$  są głównymi osiami bezwładności ceownika. Mamy więc:

$$J_{x_{04}} = 1910 \text{ cm}^4, \quad J_{y_{04}} = 148 \text{ cm}^4, \quad J_{x_{04}y_{04}} = 0.$$

Dalsze obliczenia według wzorów (d) zamieszczono w tablicy. Momenty bezwładności całego przekroju względem osi środkowych  $x_0$ ,  $y_0$  wynoszą więc:

$$J_{x_0} = \sum_i J_{x_{0i}} + \sum_i A_i (y_i - y_c)^2 = 3984,5 + 868,7 = 4853,2 \text{ cm}^4,$$

$$J_{y_0} = \sum_i J_{y_{0i}} + \sum_i A_i (x_i - x_c)^2 = 1363,0 + 14920,6 = 16283,6 \text{ cm}^4,$$

$$J_{x_0y_0} = \sum_i J_{x_{0i}y_{0i}} + \sum_i A_i (x_i - x_c)(y_i - y_c) = 1043,9 + 1736,8 = 2780,7 \text{ cm}^4.$$

Sprawdzenie poprawności uzyskanych rezultatów jest w ogólności niemożliwe. Jednak w celu wychwycenia oczywistych błędów warto zdać się na intuicję oraz sprawdzić nierówności (22.13). W naszym zadaniu przekrój jest rozbudowany wzdłuż osi  $x_0$ , jest więc intuicyjnie oczywiste, że moment bezwładności  $J_{y_0}$  musi być wyraźnie większy od momentu bezwładności  $J_{x_0}$ . Można też oszacować „na oko” znak momentu dewiacyjnego, rozpatrując rozmieszczenie materiału w poszczególnych ćwiartkach układu  $x_0$ ,  $y_0$ . Na rysunku 22.8 widać, że większa część materiału jest rozmieszczona w ćwiartkach I i III (ćwiartki dodatnie), a więc moment dewiacyjny  $J_{x_0y_0}$  powinien być większy od zera. Tak więc przesłanki intuicyjne potwierdzają poprawność uzyskanych wyników. Również nierówności (a) i (b) z p. 22.5 są spełnione:

$$J_{xy} = 2780,7 \text{ cm}^4 < \sqrt{4853,2 \cdot 16283,6} = 8890,56 \text{ cm}^4,$$

$$J_{xy} = 2780,7 \text{ cm}^4 < \frac{4853,2 + 16283,6}{2} = 10568,4 \text{ cm}^4.$$

Powyzsza krytyczna ocena uzyskanych rezultatów jest konieczna, gdyż – jak wykazuje doświadczenie – największe błędy popełniamy właśnie podczas obliczania wyjściowych wartości momentów bezwładności.

c) Obliczenie kierunków środkowych osi głównych

Położenie środkowych osi głównych I i II jest określone przez kąt  $\varphi_0$ :

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = -\frac{2J_{x_0y_0}}{J_{x_0} - J_{y_0}} = -\frac{2 \cdot 2780,7}{4853,2 - 16283,6} = 0,4865, \quad \text{skąd} \quad \varphi_0 = \frac{25,94^\circ}{2} = 12,97^\circ. \text{ Ponieważ } J_{x_0} < J_{y_0},$$

więc kąt  $\varphi_0$  jest kątem między osią  $x_0$  a osią II.

d) Obliczenie głównych środkowych momentów bezwładności

$$J_I = \frac{4853,2 + 16283,6}{2} + \sqrt{\left(\frac{4853,2 - 16283,6}{2}\right)^2 + 2780,7^2} = 16924,2 \text{ cm}^4,$$

$$J_{II} = \frac{4853,2 + 16283,6}{2} - \sqrt{\left(\frac{4853,2 - 16283,6}{2}\right)^2 + 2780,7^2} = 4212,6 \text{ cm}^4.$$

Sprawdźmy jeszcze wartość niezmiennika  $I_3$ :

$$I_3 = J_I \cdot J_{II} = 16924,2 \cdot 4212,6 = 7,129 \cdot 10^7 \text{ cm}^8 = J_{x_0} \cdot J_{y_0} - J_{x_0y_0}^2.$$

e) Obliczenie momentów bezwładności względem osi  $x'_0, y'_0$ , obróconych względem osi  $x_0, y_0$  o kąt  $\varphi = -40^\circ$ .

Do obliczenia wykorzystujemy wzory transformacyjne:

$$J_{x'_0} = \frac{4853,2 + 16283,6}{2} + \frac{4853,2 - 16283,6}{2} \cos(-80^\circ) - 2780,7 \sin(-80^\circ) = 12314,4 \text{ cm}^4,$$

$$J_{y'_0} = 4853,2 + 16283,6 - 12314,4 = 8822,4 \text{ cm}^4,$$

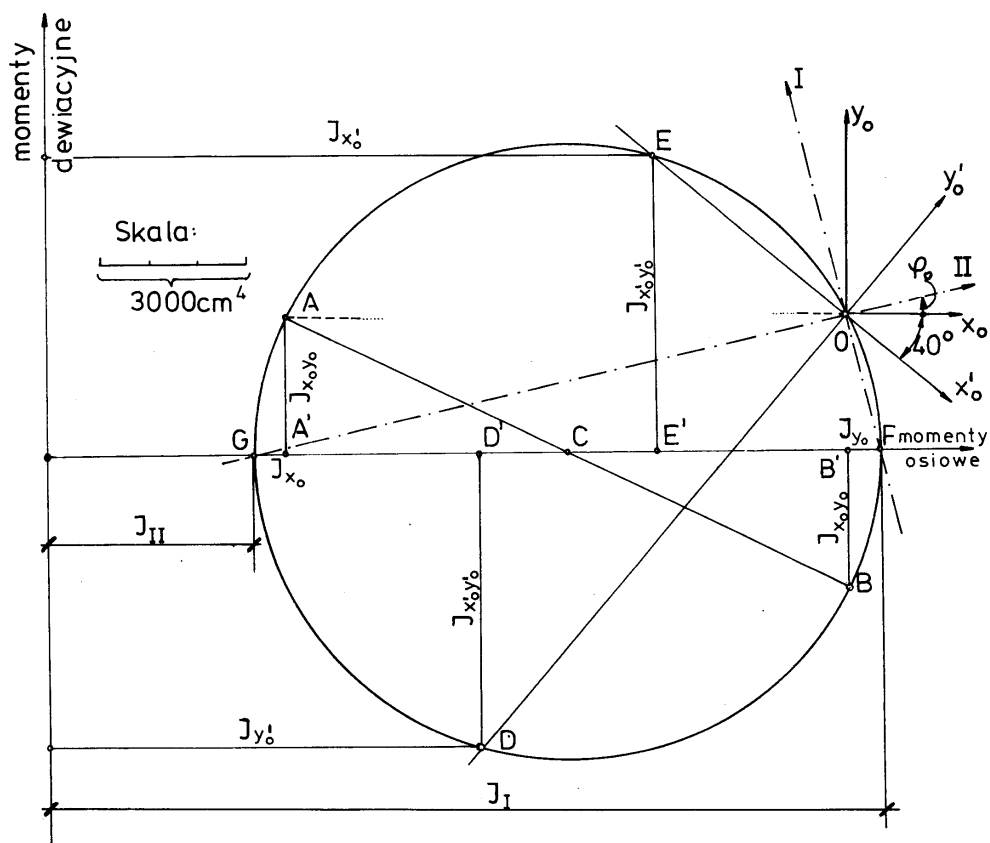
$$J_{x'_0y'_0} = \frac{4853,2 - 16283,6}{2} \cdot \sin(-80^\circ) + 2780,7 \cdot \cos(-80^\circ) = 6111,2 \text{ cm}^4.$$

Sprawdzenie  $I_3$ :

$$I_3 = 12314,4 \cdot 8822,4 - 6111,2^2 = 7,129 \cdot 10^7 \text{ cm}^8.$$

Rezultaty obliczeń zawartych w punktach c), d) i e) sprawdzono za pomocą koła *Mohra* (rys. 22.9). Z rysunku odczytano (w nawiasach podano wartości ścisłe):

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= 13^\circ & (12,97^\circ), \\ J_I &= 16940 \text{ cm}^4 & (16924,2 \text{ cm}^4), \\ J_{II} &= 4200 \text{ cm}^4 & (4212,6 \text{ cm}^4), \\ J_{x'_0} &= 12390 \text{ cm}^4 & (12314,4 \text{ cm}^4), \\ J_{y'_0} &= 8780 \text{ cm}^4 & (8822,4 \text{ cm}^4), \\ J_{x'_0y'_0} &= 6110 \text{ cm}^4 & (6111,2 \text{ cm}^4). \end{aligned}$$



Rys. 22.9