

13. WYBRANE PROBLEMY ZŁOŻONEGO STANU NAPRĘŻENIA



13.1. JEDNOCZESNE DZIAŁANIE SIŁY NORMALNEJ I MOMENTU ZGINAJĄCEGO

13.1.1. Obliczanie naprężeń. Oś obojętna

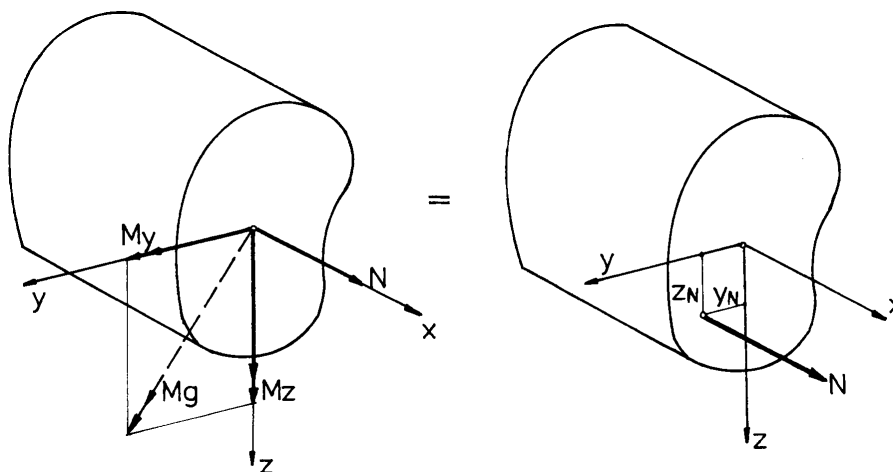
Ostateczny efekt jednoczesnego działania siły normalnej i momentu zginającego w prętach liniowo-sprężystych można uzyskać z wykorzystaniem zasady superpozycji. Ograniczymy się jedynie do szczegółowej analizy naprężeń.

Zarówno siła normalna, jak i moment zginający w prętach przymatycznych wywołują tylko naprężenia normalne σ_x . Naprężenia te obliczymy z zasady superpozycji, wykorzystując wzory (9.2) i (10.7):

$$\sigma_x = \sigma_x^N + \sigma_x^M = \frac{N}{A} - \frac{M_y J_{yz} + M_z J_y}{J_y J_z - J_{yz}^2} \cdot y + \frac{M_y J_z + M_z J_{yz}}{J_y J_z - J_{yz}^2} \cdot z. \quad (13.1)$$

Jeżeli rozważania odniesiemy do głównych osi bezwładności, to wzory (13.1) uproszczą się do postaci:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{J_z} y + \frac{M_y}{J_y} z. \quad (13.2)$$



Rys. 13.1

Powyższe wzory nie zawierają w zasadzie żadnych nowych elementów. Okazuje się jednak, że równoczesne działanie siły normalnej i momentu zginającego można uważać za działanie siły normalnej nie w osi ciężkości przekroju lecz w punkcie o współrzędnych y_N i z_N obranych w ten sposób, by momenty zginające M_y i M_z odpowiadały momentom siły N względem osi y i z (por. rys. 13.1), tzn. by

$$\left. \begin{aligned} M_y &= N \cdot z_N, \\ M_z &= -N \cdot y_N. \end{aligned} \right\}. \quad (13.3)$$

Znak minus w drugim wzorze wynika z przyjętej konwencji znaków wektora momentu (dodatni moment jest prawoskrętny). Wobec powyższego wzór (13.2) można zapisać następująco:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{N y_N}{J_z} y + \frac{N z_N}{J_y} z. \quad (13.4)$$

Ze wzoru (13.4) obliczamy naprężenia dla tzw. mimośrodowego działania siły normalnej. Jeśli $N > 0$, mamy przypadek mimośrodowego rozciągania; jeśli $N < 0$ – przypadek mimośrodowego ściskania.

Współrzędne y_N i z_N nazywamy odpowiednio mimośrodkami siły normalnej względem osi z i y .

Wzór (13.4) poddamy dalszym przekształceniom:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} \cdot \left(1 + A \frac{y_N y}{J_z} + A \frac{z_N z}{J_y} \right).$$

Jeśli jeszcze uwzględnimy, że

$$J_z / A = i_z^2 \quad \text{oraz} \quad J_y / A = i_y^2,$$

gdzie i_z oraz i_y oznaczają tzw. główne promienie bezwładności przekroju, to otrzymujemy:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} \left(1 + \frac{y_N y}{i_z^2} + \frac{z_N z}{i_y^2} \right). \quad (13.5)$$

Równanie osi obojętnej uzyskujemy przez przyrównanie σ_x do zera:

$$1 + \frac{y_N y}{i_z^2} + \frac{z_N z}{i_y^2} = 0. \quad (13.6)$$

Równanie to wygodnie będzie przedstawić w postaci odcinkowej:

$$\frac{y}{y_0} + \frac{z}{z_0} = 1, \quad (13.7)$$

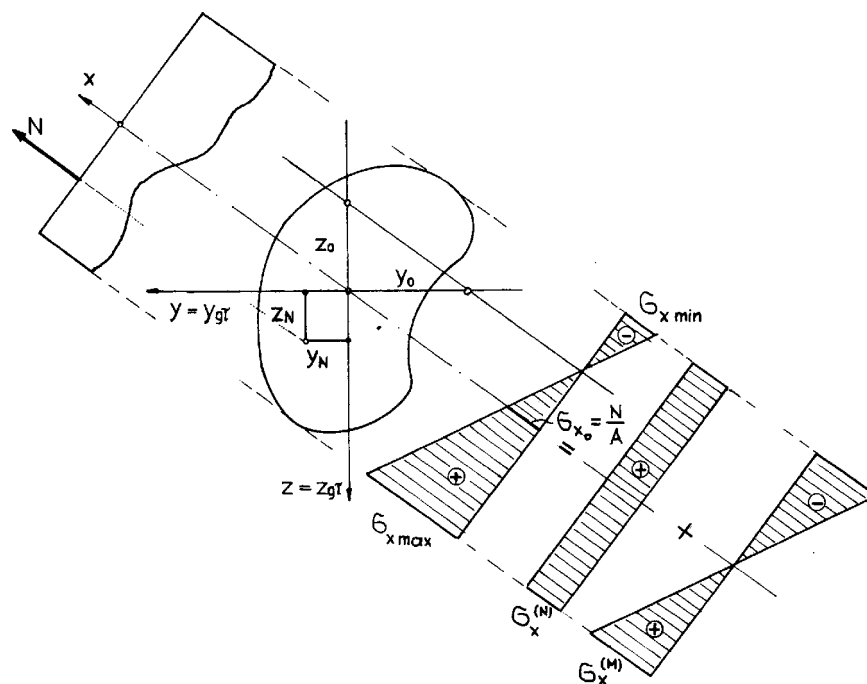
gdzie

$$y_0 = -\frac{i_z^2}{y_N}, \quad z_0 = -\frac{i_y^2}{z_N}. \quad (13.8)$$

Rozkład naprężeń ilustruje rys. 13.2.

Z dotychczasowych rozważań wynikają następujące wnioski:

- oś obojętka przy mimośrodowym działaniu siły normalnej nie przechodzi przez środek ciężkości przekroju;
- w środku ciężkości przekroju występuje naprężenie $\sigma_{x0} = N/A$;
- środek ciężkości przekroju leży zawsze między osią obojętną a punktem przyłożenia siły normalnej; wynika to stąd, że y_0 i z_0 mają przeciwne znaki do znaków y_N i z_N (por. wzór (13.8));
- im y_N i z_N są większe, tym oś obojętka jest bliżej środka ciężkości przekroju.

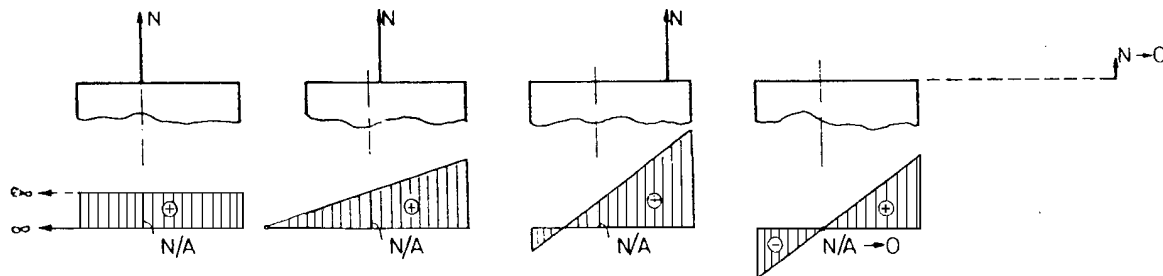


Rys. 13.2

Widzimy więc, że czyste zginanie można uważać za przypadek graniczny działania nieskończenie małej siły N na nieskończenie dużym mimośrodku. Wówczas oś obojętna przechodzi przez środek ciężkości przekroju, bo $\sigma_{x0} = 0$, przy czym:

$$\lim_{N \rightarrow 0, z_N \rightarrow \infty} (N \cdot z_N) = M_y; \quad -\lim_{N \rightarrow 0, y_N \rightarrow \infty} (N \cdot y_N) = M_z.$$

Z kolei w przypadku osiowego działania siły normalnej ($y_N = z_N = 0$) oś obojętna znajduje się w nieskończoności. Opisane zależności ilustruje rys. 13.3.



Rys. 13.3

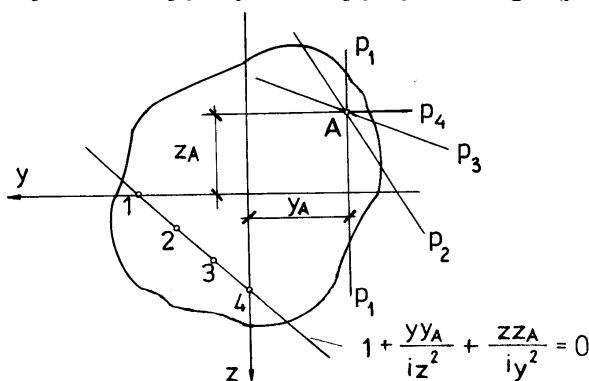
Pokażemy jeszcze, że pękowi osi obojętnych przechodzących przez dany punkt A odpowiadają punkty przyłożenia siły N leżące na linii prostej. Jeśli każda z osi obojętnych przechodzi przez dany punkt A , to współrzędne tego punktu muszą spełniać równania tych osi, czyli

$$1 + \frac{y_A y_N}{i_z^2} + \frac{z_A z_N}{i_y^2} = 0.$$

Wynika stąd, że między współrzędnymi y_N i z_N zachodzi zależność liniowa, a punkty (y_N, z_N) leżą na prostej (por. rys. 13.4):

$$1 + \frac{y_A y}{i_z^2} + \frac{z_A z}{i_y^2} = 0.$$

W przypadku szczególnym, gdy punkt przyłożenia siły przemieszcza się wzdłuż prostej przechodzącej przez środek ciężkości przekroju, osie obojętne przesuwają się równolegle (por. rys.13.5).



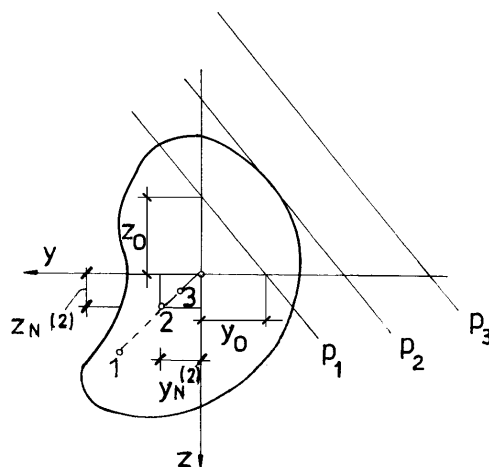
Rys. 13.4

13.1.2. Rdzeń przekroju

Oś obojętna jest linią dzielącą przekrój na dwie części: rozciąganą i ściskaną. Tak jest, jeżeli oś obojętna przecina przekrój (prosta p_1 na rys. 13.5). Jeżeli oś obojętna nie przecina przekroju (proste p_2 i p_3), to występują naprężenia jednakowego znaku. Jeśli znamy położenie osi obojętnych, to na podstawie wzoru (13.8) bardzo łatwo możemy wyznaczyć współrzędne punktu przyłożenia siły N :

$$y_N = -\frac{i_z^2}{y_0}, \quad z_N = -\frac{i_y^2}{z_0}, \quad (13.8a)$$

gdzie y_0 i z_0 są znanymi odcinkami wyznaczonymi przez oś obojętną na osiach y i z .



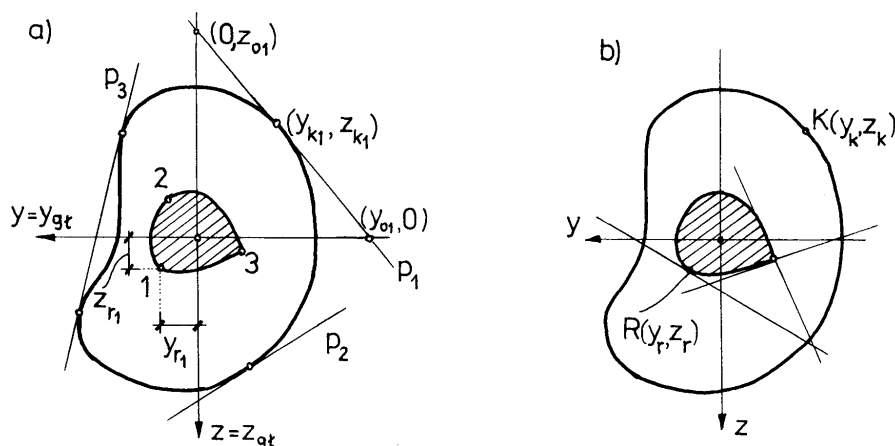
Rys. 13.5

W praktyce bardzo często interesują nas przypadki, w których przekrój może przenosić tylko naprężenia jednego znaku. Przypadki te występują w projektowaniu konstrukcji betonowych lub murowych oraz w obliczaniu naprężeń w gruncie na poziomie posadowienia fundamentu. Chodzi wówczas o wyznaczenie takiego obszaru przyłożenia siły normalnej, by naprężenia σ_x były tego samego znaku (we wspomnianych przypadkach zawsze ujemne). Obszar ten nazywa się rdzeniem przekroju, a jego granice wyznaczają osie obojętne, styczne do wypukłej obwiedni konturu przekroju. Na przykład na granicy rdzenia leży punkt 2 odpowiadający osi obojętnej p_2 na rys. 13.5.

Wyznaczanie granic rdzenia jest więc nader proste. Dla kilku osi obojętnych, stycznych do wypukłego konturu przekroju, zgodnie ze wzorami (13.8a) wyznaczamy współrzędne y_r i z_r , odpowiadające punktom leżącym na granicy rdzenia:

$$y_r = -\frac{i_z^2}{y_0}, \quad z_r = -\frac{i_y^2}{z_0}. \quad (13.9)$$

Przyporządkowanie punktów przyłożenia siły poszczególnym osiom obojętnym ilustruje rys. 13.6a (punkt i odpowiada osi p_i). Przy dużej liczbie prostych p_i można wyznaczyć kształt i rozmiary rdzenia z żadaną dokładnością.



Rys. 13.6

Rysunek 13.6b ilustruje inny sposób wyznaczania rdzenia przekroju. Sposób ten wynika z następujących rozważań. Równanie osi obojętnej stycznej do konturu przekroju ma postać:

$$1 + \frac{y \cdot y_r}{i_z^2} + \frac{z \cdot z_r}{i_y^2} = 0, \quad (13.10)$$

gdzie y_r i z_r są współrzędnymi punktu R leżącego na krawędzi rdzenia. Współrzędne y_K i z_K punktu K , w którym oś obojętna jest styczna do krawędzi przekroju, również spełniają równanie (13.10). Wynika stąd zależność między współrzędnymi punktów K i R :

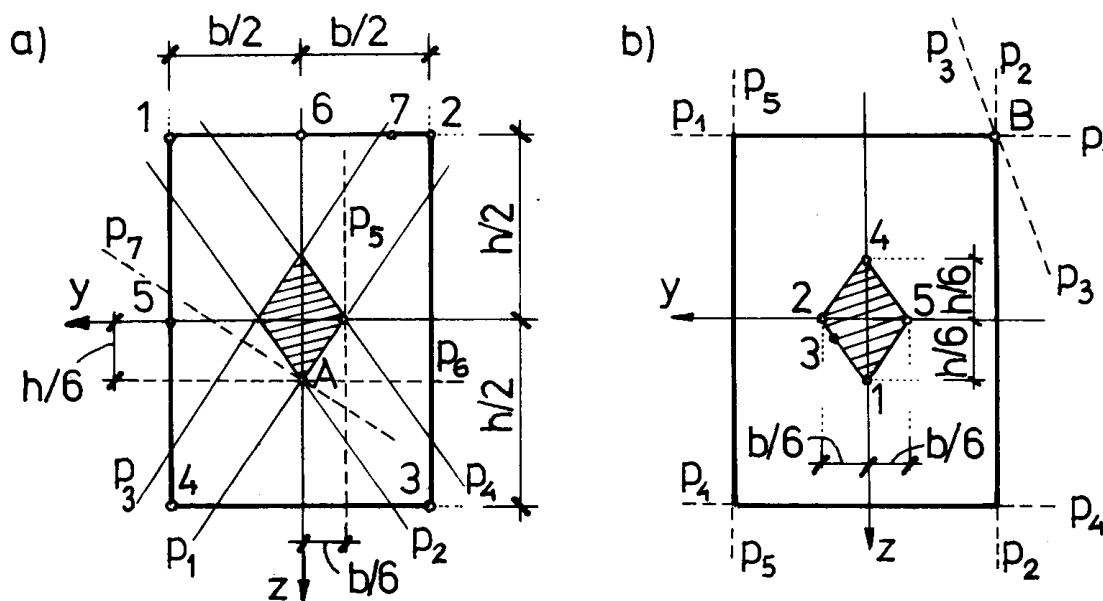
$$1 + \frac{y_K y_r}{i_z^2} + \frac{z_K z_r}{i_y^2} = 0. \quad (13.11)$$

Przyjmijmy teraz, że siłę przyłożono w punkcie styczności K . Wówczas odpowiednie równanie osi obojętnej jest następujące:

$$1 + \frac{y \cdot y_K}{i_z^2} + \frac{z \cdot z_K}{i_y^2} = 0,$$

Po podstawieniu do tego równania zamiast y i z współrzędnych y_r i z_r , odpowiadających punktowi R , otrzymujemy zależność identyczną z równaniem (13.11). Wynika stąd, że w tym wypadku oś obojętna przechodzi przez punkt R leżący na krawędzi rdzenia przekroju. Drugi sposób wyznaczania rdzenia polega więc na tym, że siłę normalną ustawiamy w kilku punktach wypukłego konturu pręta. Osie obojętne odpowiadające tym położeniom siły są styczne do obrysu rdzenia. Dostatecznie duża liczba tych osi pozwala wyznaczyć poszukiwany rdzeń przekroju.

W podsumowaniu zwrócimy uwagę na to, że rdzeń przekroju można wyznaczyć, nie precyzując wartości siły N . Obszar rdzenia zależy tylko od geometrii przekroju i jest zawsze wypukły. Przypominamy, że w przytoczonych wyżej wzorach osie y i z są głównymi środkowymi osiami bezwładności przekroju.



Rys. 13.7

Dla przykładu wyznaczmy rdzeń przekroju prostokąta. Kontur prostokąta ograniczają cztery proste pokrywające się z bokami figury. Zgodnie z drugim sposobem wyznaczania rdzenia siłę normalną należy ustawiać w punktach leżących na konturze przekroju. Najwygodniej jest obrać punkty narożne: 1, 2, 3, 4 (rys. 13.7a). Dla siły ustawionej w punkcie 1 mamy $y_1 = b/2$, $z_1 = -h/2$, a równanie osi obojętnej p_1 jest następujące:

$$1 + \frac{y}{y_{01}} + \frac{z}{z_{01}} = 0.$$

Ponieważ

$$J_y = \frac{bh^3}{12}, \quad J_z = \frac{hb^3}{12}, \quad A = bh,$$

więc

$$i_y^2 = \frac{J_y}{A} = \frac{h^2}{12}, \quad i_z^2 = \frac{J_z}{A} = \frac{b^2}{12},$$

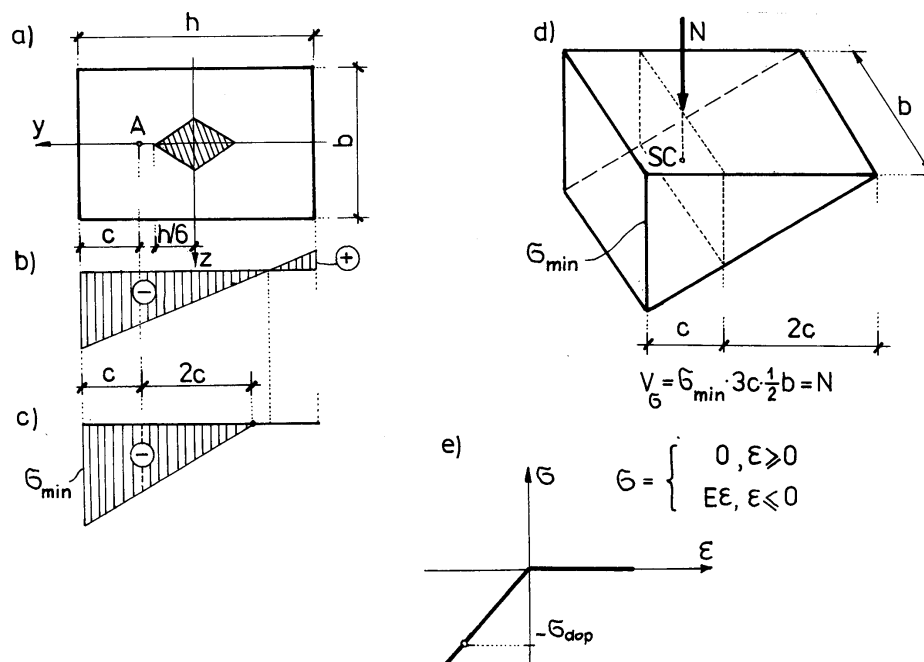
a wartości y_{01} i z_{01} są następujące:

$$y_{01} = -y_1 / i_z^2 = -b/6; \quad z_{01} = -z_1 / i_y^2 = h/6.$$

Dla siły ustawionej w punkcie 2 otrzymujemy oś obojętną p_2 ($y_{02} = b/6$, $z_{02} = h/6$). Jeśli siła normalna przesuwa się wzdłuż linii prostej łączącej punkty 1 i 2, osie obojętne obracają się wokół punktu A , będącego narożem rdzenia przekroju. Widać stąd, że podczas wyznaczania obrysu rdzenia wielobocznego konturu przekroju wystarczy ustawiać siłę normalną tylko w punktach wierzchołkowych konturu. Rysunek 13.7b ilustruje pierwszy sposób wyznaczania rdzenia: osie obojętne pokrywają się z liniami obwodzącymi kontur przekroju, a punkty przyłożenia siły wypadają na krawędzi rdzenia. Pęk osi obojętnych przechodzących przez punkt narożny konturu (np. punkt B) odpowiada ustawieniu siły normalnej na prostej stanowiącej bok rdzenia (np. prosta p_3 odpowiada punktowi 3). Wnioskujemy stąd, że w trakcie wyznaczania wierzchołków rdzenia wystarczy analizować tylko te osie obojętne, które pokrywają się z bokami konturu pręta.

Na zakończenie zwróćmy uwagę na bardzo ważny przypadek występujący w praktyce. Załóżmy, że pręt prostokątny wykonano z materiału nie przenoszącego naprężeń rozciągających^{*)} (por. rys. 13.8e). Na przekrój działa siła ściskająca usytuowana w punkcie A , leżącym poza rdzeniem (rys. 13.8a). Jaki będzie przebieg naprężeń ściskających, jeżeli podczas ściskania materiał zachowuje się liniowo-sprężyste? Według wzoru (13.6) otrzymujemy wykres naprężeń jak na rys. 13.8b. Występują tutaj jednak naprężenia rozciągające. Odrzucenie dodatniej części wykresu byłoby błędne, gdyż naruszylibyśmy warunek równowagi. Każdy poprawny wykres naprężeń musi spełniać dwa warunki:

- sumy rzutów sił, tzn. objętość bryły naprężeń równa się sile wypadkowej
- sumy momentów, tzn. środek ciężkości bryły naprężeń odpowiada punktowi przyłożenia siły wypadkowej.



Rys. 13.8

^{*)} Jest to materiał z tzw. *więzami jednostronnymi*.

Wobec tego jeśli założymy, że wykres naprężeń jest nadal liniowy, to jego kształt musi być trójkątny (rys. 13.8c), a środek ciężkości musi przypadać pod siłą N , tj. w odległości $c = h/2 - |z_N|$ od zewnętrznej krawędzi przekroju. Podstawa trójkąta naprężeń ma więc długość równą $3c$. Skrajne naprężenie normalne wyznaczamy żądając, by objętość bryły naprężeń równała się sile N :

$$\frac{\sigma_{\min} \cdot 3c}{2} \cdot b = N,$$

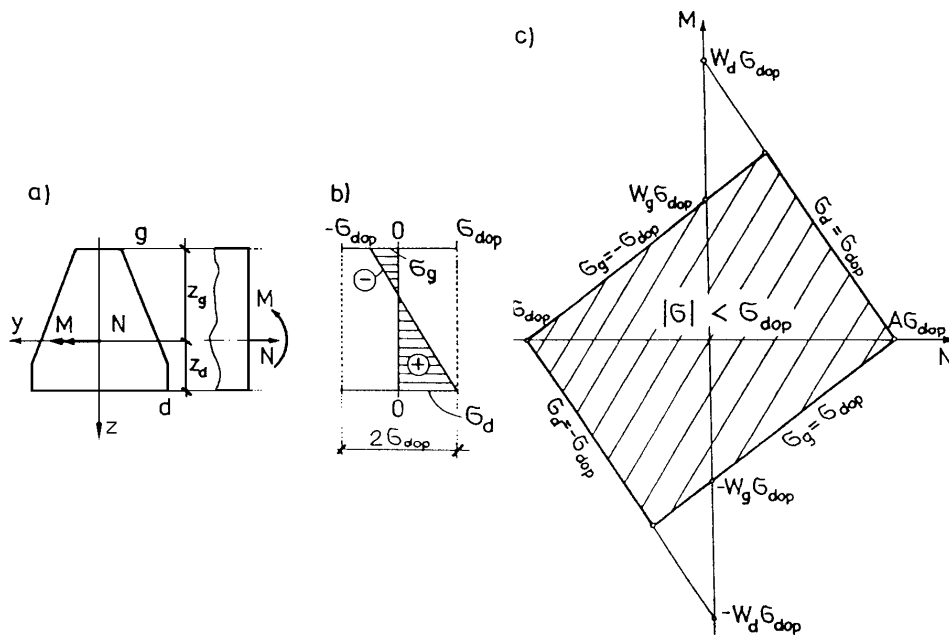
skąd

$$\sigma_{\min} = \frac{2N}{3bc}. \quad (13.12)$$

Przy stosowaniu zależności (13.12) trzeba pamiętać, że rozważane zagadnienie jest nieliniowe i nie obowiązuje zasada superpozycji. Nieliniowość ma tutaj charakter fizyczny, bowiem charakterystyka wykresu $\sigma(\epsilon)$ (rys. 13.8e) dla badanego materiału jest nieliniowa (ściślej: biliniowa).

13.1.3. Warunek projektowania. Obszar dopuszczalny

Rozważmy najprostszy przypadek obciążenia, w którym $y_N = 0$. Na przekrój pręta działają zatem tylko dwie siły wewnętrzne: N i $M = M_y = N \cdot z_N$ (rys. 13.9a).



Rys. 13.9

Przyjmijmy, że kryterium projektowania przekroju polega na spełnieniu nierówności:

$$(a) \quad -\sigma_{\text{dop}} \leq \sigma \leq \sigma_{\text{dop}}.$$

Warunek ten pociąga za sobą ograniczenie sił wewnętrznych, stosownie do wzorów na ekstremalne naprężenia w skrajnych włóknach przekroju (por. rys. 13.9b):

$$(b) \quad \begin{cases} -\sigma_{\text{dop}} \leq \frac{N}{A} - \frac{M}{W_g} \leq \sigma_{\text{dop}}, & W_g = J_y / z_g, \\ -\sigma_{\text{dop}} \leq \frac{N}{A} + \frac{M}{W_d} \leq \sigma_{\text{dop}}, & W_d = J_y / z_d, \end{cases}$$

przy czym osie y i z pokrywają się z głównymi osiami bezwładności przekroju.

Zależność (b) wyznacza w przestrzeni sił wewnętrznych obszar ograniczony czterema liniami prostymi (rys. 13.9c). Siły wewnętrzne odpowiadające punktom leżącym w obrębie tego obszaru wywołują naprężenia mniejsze od dopuszczalnych. Opisany obszar nosi nazwę obszaru dopuszczalnego. Gdy występują trzy siły wewnętrzne: N , M_y i M_x , obszar dopuszczalny w przestrzeni tych sił wewnętrznych jest wielościanem.

W materiałach przenoszących tylko naprężenia jednego znaku, np. naprężenia ściskające, obszar dopuszczalny wyznaczamy z warunku:

$$(c) \quad -\sigma_{\text{dop}} \leq \sigma \leq 0.$$

Rozważmy zatem przekrój prostokątny poddany działaniu siły normalnej N i momentu zginającego $M = M_y$ (rys. 13.10a). Jeżeli siła normalna (ściskająca) $N = -P < 0$ jest usytuowana w obrębie rdzenia przekroju, czyli gdy $|z_N| = |M/N| < h/6$, to kryterium projektowania przyjmuje postać (rys. 13.10b):

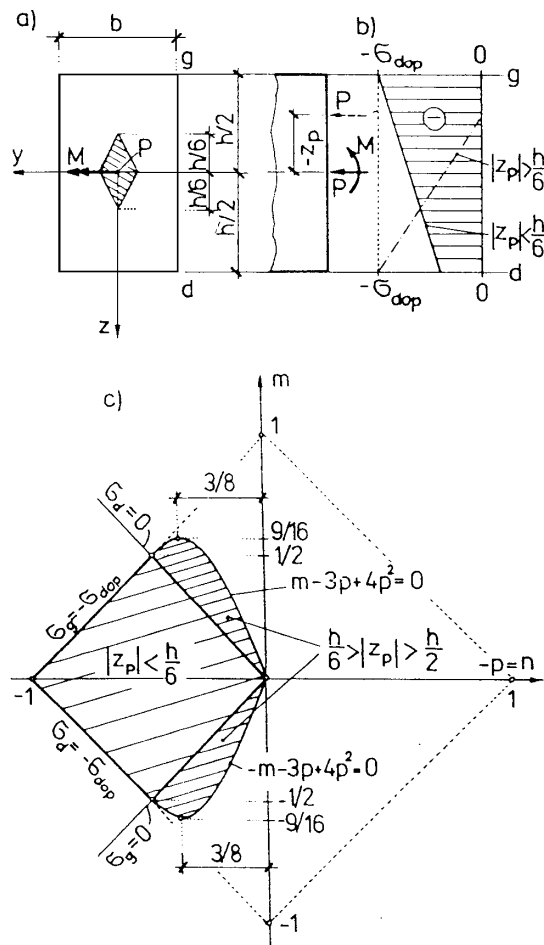
$$(d) \quad \begin{aligned} -\sigma_{\text{dop}} &\leq -\frac{P}{A} - \frac{M}{W} \leq 0, \\ -\sigma_{\text{dop}} &\leq -\frac{P}{A} + \frac{M}{W} \leq 0 \end{aligned}$$

lub

$$(e) \quad 0 \leq p + |m| \leq 1,$$

gdzie

$$(f) \quad p = P / P_{\text{dop}}, \quad m = M / M_{\text{dop}}, \quad P_{\text{dop}} = A\sigma_{\text{dop}}, \quad M_{\text{dop}} = W\sigma_{\text{dop}}.$$



Rys. 13.10

Obszar odpowiadający nierównościom (d) lub (e) jest czworobokiem, który na rys. 13.10c zaznaczono grubą linią ciągłą.

Jeżeli dopuścimy do rozwarcia rys, to dla siły P ustawionej poza rdzeniem kryterium projektowania wynika ze wzoru (13.12):

$$(g) \quad \frac{2P}{3b\left(\frac{h}{2} - |z_P|\right)} \leq \sigma_{\text{dop}},$$

przy czym

$$(h) \quad |z_P| = |z_N| = \frac{|M|}{P} = \frac{M_{\text{dop}}}{P_{\text{dop}}} \cdot \frac{|m|}{p} = \frac{h}{6} \cdot \frac{|m|}{p}.$$

Uwzględnivszy oznaczenia (f) nierówność (g) można przekształcić do następującej postaci:

$$(i) \quad |m| - 3p + 4p^2 \leq 0.$$

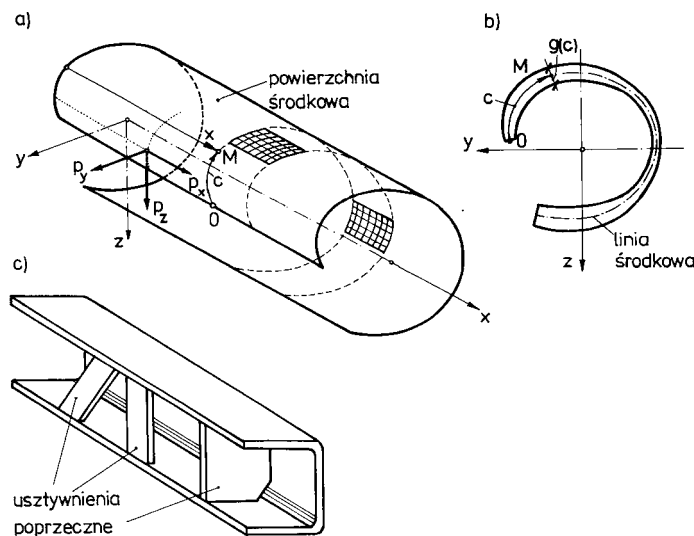
Brzeg obszaru dopuszczalnego, określonego nierównością (i), składa się z dwóch parabol II stopnia, zaznaczonych na rys. 13.10c cienką linią ciągłą. Obszar dopuszczalny (i) jest zatem większy niż obszar dopuszczalny (e) dla przekroju nie zarysowanego. Maksymalna wartość momentu zginającego $|m| = 9/16$ i odpowiada sile normalnej $n = -p = -3/8$ oraz mimośrodkowi $|z_P| = h/4$.

Dla porównania linią kropkową zaznaczono obszar dopuszczalny w przypadku, gdy materiał przenosi naprężenia rozciągające, stosownie do kryterium (a).

13.2. PODSTAWY TEORII PRĘTÓW CIENKOŚCIENNYCH WŁASOWA

13.2.1. Wprowadzenie

Przedstawimy uproszczoną teorię złożonego obciążenia prętów cienkościennych zaproponowaną w 1940 roku przez *Własow*a. Teoria ta uwzględnia również przypadki skręcania nieswobodnego. Rozważać będziemy tylko pręty pryzmatyczne o przekroju otwartym. Pręty takie ściślej biorąc są długimi powłokami walcowymi o stałej lub zmiennej grubości g . Założenia teorii odpowiadają założeniom klasycznej liniowej teorii sprężystości, jakkolwiek istnieją również uogólnienia na inne modele fizyczne. Przyjmujemy zatem liniowość fizyczną (tzn. materiał pręta jest liniowo-sprężysty), liniowość geometryczną (tzn. przemieszczenia i odkształcenia są bardzo małe) oraz izotropię i jednorodność materiału.



Rys. 13.11

Zasadnicze rozważania przeprowadzimy w układzie współrzędnych kartezjańskich x, y, z , pokrywających się z osią ciężkości i głównymi środkowymi osiami bezwładności przekroju. Do identyfikacji punktów leżących na powierzchni środkowej są również dogodne współrzędne krzywoliniowe x, c (rys. 13.11a, b). Rozważany pręt jest nieważki, a jego obciążenie stanowi pole wektorowe naprężeń powierzchniowych $p(x, c)$ o składowych p_x, p_y i p_z .

Teoria *Własowa* opiera się na dwóch zasadniczych założeniach kinematycznych:

- 1) linie środkowe przekrojów poprzecznych pręta ulegają deformacji tylko w kierunku osi x (tzw. hipoteza sztywnego przekroju poprzecznego),
- 2) odkształcenia postaciowe powierzchni środkowej są równe zero tzn. $\gamma_{xc} = 0$ (por. rys. 13.11a).

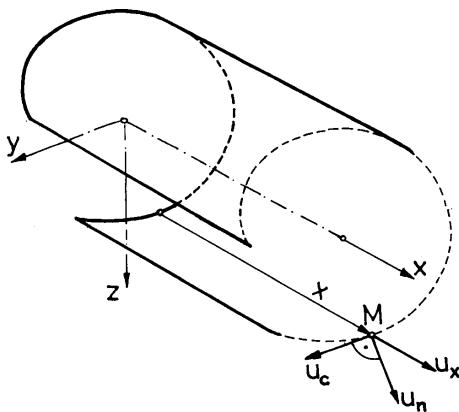
Założenie 1) pokrywa się z założeniem *de Saint-Venanta*, stosowanym w teorii skręcania swobodnego prętów zwartych. Aby przekroje pręta cienkościennego zachowały swój kształt, wprowadza się różnego rodzaju usztywnienia poprzeczne (por. rys. 13.11c).

Założenie 2) znajduje uzasadnienie doświadczalne tylko dla otwartych przekrojów cienkościennych. Geometryczny sens tego założenia obserwujemy np. podczas skręcania rozciętej rurki z kartonu – elementy pobocznic nie wykazują zmian kątowych (por. np. rys. 11.19).

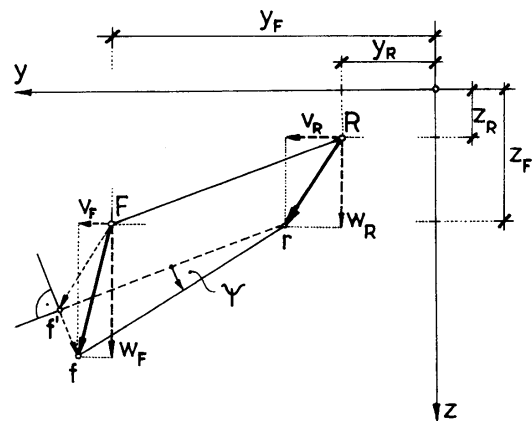
Dokładniejsza teoria prętów cienkościennych o przekroju zamkniętym, w której założenie 2) nie obowiązuje, jest już bardziej skomplikowana. W zastosowaniach praktycznych wystarczające są jednak zazwyczaj zasady obliczeń podane w rozdziałach 9, 10, 11 i 12.3.

13.2.2. Zależności kinematyczne

Wyznamy obecnie podstawowe zależności kinematyczne wynikające z więzów kinematycznych teorii *Własowa*. Chodzi przede wszystkim o wyznaczenie wektora przemieszczenia dowolnego punktu leżącego na powierzchni środkowej pręta. Wektor ten określają trzy współrzędne: u_x, u_c i u_n . Składowa u_x ma kierunek równoległy do osi pręta, a składowe u_c i u_n są odpowiednio styczne i normalne do linii środkowej przekroju. Na rysunku 13.12 przedstawiono powierzchnię środkową pręta oraz składowe wektora przemieszczenia dowolnego punktu M .



Rys. 13.12



Rys. 13.13

W pierwszej kolejności wyznaczmy przemieszczenia u_c i u_n mierzone w płaszczyźnie przekroju poprzecznego w odległości x od początku układu współrzędnych. Stosownie do pierwszego założenia teorii *Własowa* wnioskujemy, że przemieszczenia całego przekroju opisują jednoznacznie trzy wielkości: dwie współrzędne wektora przemieszczenia dowolnie obranego punktu R związanego

z przekrojem oraz kąt skręcania $\psi(x)$ całego przekroju wokół tego punktu (rys. 13.13). Punkt R po deformacji przyjmuje położenie r , określone współrzędnymi wektora przemieszczenia $v_R(x)$ i $w_R(x)$. Rozważymy teraz przemieszczenie punktu F , związanego z płaszczyzną przekroju. Punkt ten z położenia F przechodzi w położenie f . Przesunięcie (translację) całego przekroju opisuje odcinek Ff' ,

a obrót – odcinek $f'f$. Współrzędne wektora przemieszczenia punktu F : $v_F(x)$

i $w_F(x)$, można wyrazić przez $v_R(x)$, $w_R(x)$ oraz $\psi(x)$ następująco:

$$\left. \begin{aligned} v_F(x) &= v_R(x) - (z_F - z_R) \cdot \psi(x), \\ w_F(x) &= w_R(x) + (y_F - y_R) \cdot \psi(x). \end{aligned} \right\} \quad (13.13)$$

Rozważmy w końcu przemieszczenie pewnego dowolnego punktu M leżącego na linii środkowej przekroju. W konfiguracji początkowej punkt ten na płaszczyźnie przekroju zajmuje położenie określone współzrędnymi y i z (rys. 13.14). Współrzędne te można zastąpić jedną współzrędną krzywoliniową c , oznaczającą długość linii środkowej, odmierzaną od pewnego ustalonego punktu początkowego O . Zgodnie

z wieloletnią tradycją dodatni zwrot współrzędnej c odpowiada kierunkowi ruchu wskazówek zegara względem tzw. bieguna. W rozważanym przypadku biegun umieścimy w punkcie R . Wektor przemieszczenia punktu M opisują współrzędne $v(x, c)$ i $w(x, c)$ w układzie głównych osi bezwładności przekroju y, z lub współrzędne $u_c(x, c)$ i $u_n(x, c)$, odniesione do lokalnego prostokątnego układu osi c, n . Zależności między współzrędnymi tych wektorów wynikają z równań transformacyjnych przy obrocie układu o kąt $\alpha(c)$ lub bezpośrednio z rys. 13.14:

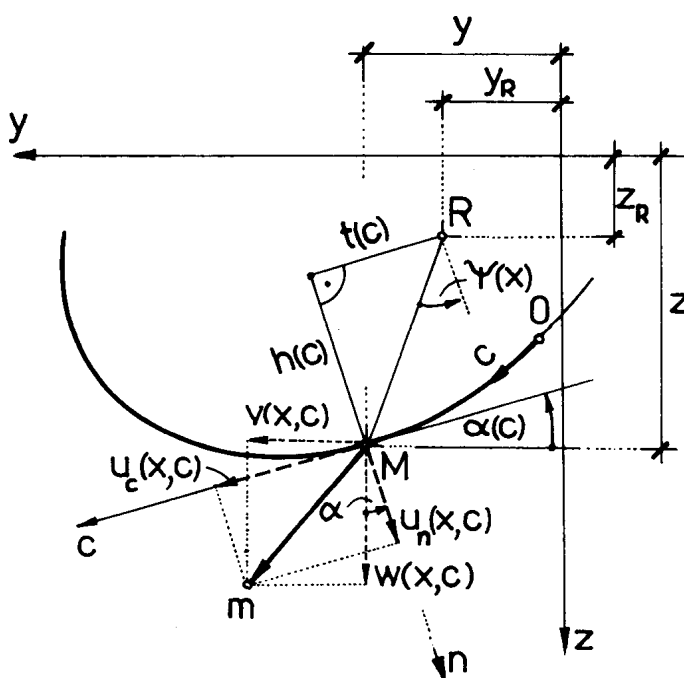
$$(a) \quad \begin{cases} u_c(x, c) = v(x, c) \cos \alpha(c) + w(x, c) \sin \alpha(c), \\ u_n(x, c) = -v(x, c) \sin \alpha(c) + w(x, c) \cos \alpha(c), \end{cases}$$

gdzie stosownie do równań (13.13):

$$(b) \quad \begin{cases} v(x, c) = v_R(x) - [z(c) - z_R] \cdot \psi(x), \\ w(x, c) = w_R(x) + [y(c) - y_R] \cdot \psi(x). \end{cases}$$

Po podstawieniu do równania (b) równań (a) otrzymujemy poszukiwane wyrażenia na przemieszczenia $u_c(x, c)$ oraz $u_n(x, c)$:

$$\left. \begin{aligned} u_c(x, c) &= v_R(x) \cos \alpha(c) + w_R(x) \sin \alpha(c) - \psi(x) \cdot h(c), \\ u_n(x, c) &= -v_R(x) \sin \alpha(c) + w_R(x) \cos \alpha(c) + \psi(x) \cdot t(c). \end{aligned} \right\} \quad (13.14)$$



Rys. 13.14

Wielkości $h(c)$ i $t(c)$ oznaczają odległości bieguna R od stycznej i normalnej do linii środkowej w punkcie M (por. rys. 13.14):

$$(c) \quad \begin{cases} h(c) = -(y - y_R) \sin \alpha(c) + (z - z_R) \cos \alpha(c), \\ t(c) = (y - y_R) \cos \alpha(c) + (z - z_R) \sin \alpha(c). \end{cases}$$

W celu określenia współrzędnej $u_x(x, c)$ posłużymy się założeniem 2) teorii Własowa:

$$\gamma_{xc} = \frac{\partial u_x}{\partial c} + \frac{\partial u_c}{\partial x} = 0,$$

skąd

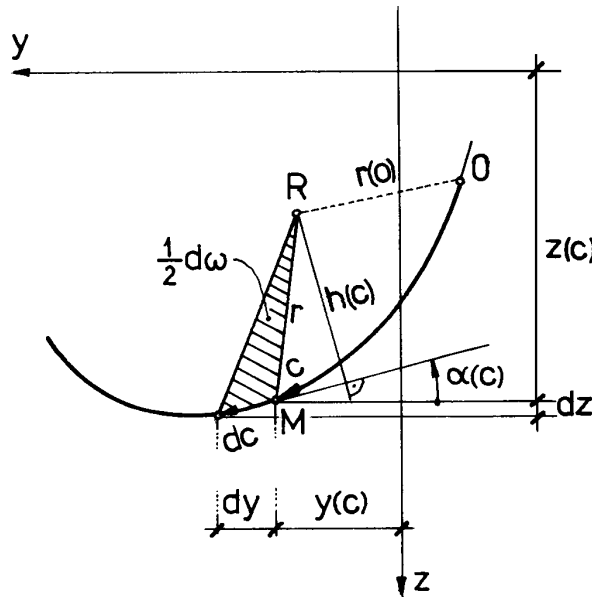
$$(d) \quad u_x(x, c) = - \int_0^c \frac{\partial u_c}{\partial x} dc + u_x^*(x).$$

Funkcja $u_x^*(x)$ odgrywa tutaj rolę stałej całkowania. Pochodną $\partial u_c / \partial x$ obliczymy wykorzystując zależność (13.14)₁:

$$\frac{\partial u_c}{\partial x} = v_R'(x) \cos \alpha(c) + w_R'(x) \sin \alpha(c) - \psi'(x) h(c), \quad \text{gdzie } ()' = \frac{d}{dx} ().$$

Po podstawieniu powyższego rezultatu do równania (d) otrzymujemy:

$$(e) \quad u_x(x, c) = -v_R'(x) \cdot \int_0^c \cos \alpha(c) dc - w_R'(x) \cdot \int_0^c \sin \alpha(c) dc + \psi'(x) \int_0^c h(c) dc + u_x^*(x).$$



Rys. 13.15

Z rysunku 13.15 wynika, że

$$(f) \quad \begin{cases} dy = \cos \alpha(c) dc, \\ dz = \sin \alpha(c) dc, \\ d\omega = h(c) dc, \end{cases}$$

gdzie $d\omega$ oznacza podwójne pole elementarnego wycinka (obszar zakreskowany).

Uwzględnivszy powyższe spostrzeżenia we wzorze (e) otrzymujemy poszukiwane wyrażenie na współrzędną $u_x(x, c)$:

$$u_x(x, c) = \hat{u}_x(x) - v_R'(x) \cdot y(c) - w_R'(x) \cdot z(c) + \psi'(x) \cdot \omega(c), \quad (13.15)$$

gdzie

$$(g) \quad \hat{u}_x(x) = u_x^*(x) + v_R'(x) \cdot y(0) + w_R'(x) \cdot z(0) - \psi'(x) \cdot \omega(0).$$

Ostatni składnik prawej strony wzoru (g) jest równy zeru, bo

$$(h) \quad \omega(0) = 0.$$

Funkcję $\hat{u}_x(x)$ interpretujemy jako równoległe przemieszczenie całego przekroju wzdłuż osi pręta. Funkcje $v_R'(x)$ i $w_R'(x)$ oznaczają kąty obrotu przekroju odpowiednio względem osi z i y , a $\psi'(x)$ jest jednostkowym kątem skręcenia przekroju. Wielkości $y(c)$ i $z(c)$ nie wymagają komentarza; wielkość $\omega(c)$ nazywamy **współrzedną wycinkową** badanego punktu M należącego do linii środkowej. Współrzedną wycinkową $\omega(c)$ obliczamy z definicji:

$$\omega(c) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^c h(c) dc = \int_0^c d\omega. \quad (13.16)$$

Współrzedna wycinkowa punktu M na rys. 13.15 jest równa podwojonemu polu wycinka wyznaczonego promieniami RM i RO oraz łukiem OM . W punkcie O ($c = 0$) współrzedna wycinkowa ω jest oczywiście równa zeru (por. również zależność (h)). Dlatego punkt początkowy O nazywamy również punktem zerowym współrzędnej wycinkowej. Ze wzoru (13.15) wynika geometryczna interpretacja współrzędnej wycinkowej; jest ona miarą odchylenia przemieszczeń u_x od prawa płaskich przekrojów, czyli deplanacji.

Charakterystyczne **cechy stanu odkształcenia** wynikają z postulatów teorii *Własowa*. Drugi postulat ($\gamma_{xc} = 0$) odpowiada założeniu, że osie lokalne układu współrzędnych x, c, n pokrywają się z głównymi osiami odkształcenia. Odkształcenia ε_x w punktach leżących na powierzchni środkowej można obliczyć ze znanego równania geometrycznego $\varepsilon_x = \partial u_x / \partial x$. Wykorzystanie tego równania i uwzględnienie wzoru (13.15) prowadzi do następującego rezultatu:

$$\varepsilon_x(x, c) = u_x'(x) - v_R''(x) \cdot y(c) - w_R''(x) \cdot z(c) + \psi''(x) \cdot \omega(c). \quad (13.17)$$

Z pierwszego postulatu o sztywnych liniach środkowych wynika, że

$$\varepsilon_c(x, c) = 0.$$

Zależność tę można również otrzymać analitycznie ze wzorów (13.14), określających przemieszczenia $u_c(x, c)$ i $u_n(x, c)$. W tym celu trzeba jednak wyprowadzić odpowiednią postać równań geometrycznych w krzywoliniowym układzie współrzędnych c, n . Przy szacowaniu odkształceń ε_n , opisujących zmianę grubości ścianki, uwzględnia się fakt, że w kierunku normalnym do linii środkowej występuje swoboda odkształceń. Jeżeli powierzchnia ścianki jest wolna od obciążeń, to można przyjąć, że w elemencie powierzchni środkowej występuje płaski stan naprężenia. Wartości ε_n wynikają wówczas z poprzecznego przewężenia ścianki: $\varepsilon_x = -\nu \varepsilon_x$. Widzimy zatem, że odkształcenia ε_n mają znaczenie drugorzędne.

Podobnie traktujemy odkształcenia kątowe γ_{nc} i γ_{nx} – uznajemy, że są pomijalnie małe.

13.2.3. Naprężenia normalne. Bimoment

W celu zdefiniowania sił wewnętrznych rozważymy wyrażenie odpowiadające energii naprężeń normalnych:

$$\int_V \sigma_x \varepsilon_x dV = \int_l \left\{ u'_x(x) \left[\int_A \sigma_x dA \right] + v_R''(x) \left[- \int_A \sigma_x y(c) dA \right] - \right. \\ \left. - w_R''(x) \left[\int_A \sigma_x z(c) dA \right] + \psi''(x) \left[\int_A \sigma_x \omega(c) dA \right] \right\} dx. \quad (13.18)$$

We wzorze tym odkształcenie ε_x wyrażono zależnością (13.17). Pierwsze trzy całki występujące w nawiasach kwadratowych po prawej stronie równania (13.18) przedstawiają kolejno znane siły wewnętrzne (por. rys. 13.16a): siłę normalną (N), moment zginający względem osi z (M_z) oraz moment zginający względem osi y (M_y). Czwarta całka przedstawia nową „siłę” wewnętrzną, charakterystyczną dla pręta cienkościennego. Jest to tak zwany **bimoment**, oznaczony dalej symbolem B . Bimoment mierzymy w jednostkach siły razy kwadrat jednostki długości, np. $[\text{kN} \cdot \text{m}^2]$. Wielkości kinematyczne jako mnożniki odpowiednich sił wewnętrznych oznaczają kolejno: wydłużenie względne osi pręta λ , krzywiznę κ_y , krzywiznę κ_z , oraz „krzywiznę skrętną” $\kappa_\omega = \psi''$. Wymienione wielkości statyczne i kinematyczne zestawiamy niżej:

$$\left. \begin{aligned} N &= \int_A \sigma_x dA [\text{N}] ; \quad \lambda = u'_x [-]; \\ M_y &= \int_A \sigma_x z dA [\text{N} \cdot \text{m}] ; \quad \kappa_y = -w_R'' [\text{m}^{-1}]; \\ M_z &= - \int_A \sigma_x y dA [\text{N} \cdot \text{m}] ; \quad \kappa_z = v_R'' [\text{m}^{-1}]; \\ B &= \int_A \sigma_x \omega dA [\text{N} \cdot \text{m}^2] ; \quad \kappa_\omega = \psi'' [\text{m}^{-2}]. \end{aligned} \right\} \quad (13.19)$$

Wobec powyższego uogólnioną na pręty o osi zakrzywionej zależność (13.18) można zapisać następująco:

$$\int_V \sigma_x \varepsilon_x dV = \int_s (N\lambda + M_y \kappa_y + M_z \kappa_z + B \kappa_\omega) ds. \quad (13.20)$$

Przy układaniu powyższego wzoru nie precyzowano żadnego prawa fizycznego. Wnioskujemy stąd, że zależność (13.20) jest słuszna dla dowolnego materiału.

W dalszym ciągu pozostaniemy przy materiale liniowo-sprężystym, dla którego obowiązują związki fizyczne (por. rys. 13.16b):

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_c), \\ \varepsilon_c &= \frac{1}{E} (\sigma_c - \nu \sigma_x) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (13.21)$$

Uwzględniono tutaj, że w badanym elemencie powierzchni środkowej występuje płaski stan naprężenia, tzn. $\sigma_n = 0$. Na podstawie równań (13.21) otrzymujemy:

$$\sigma_c = \nu \sigma_x, \quad (13.22)$$

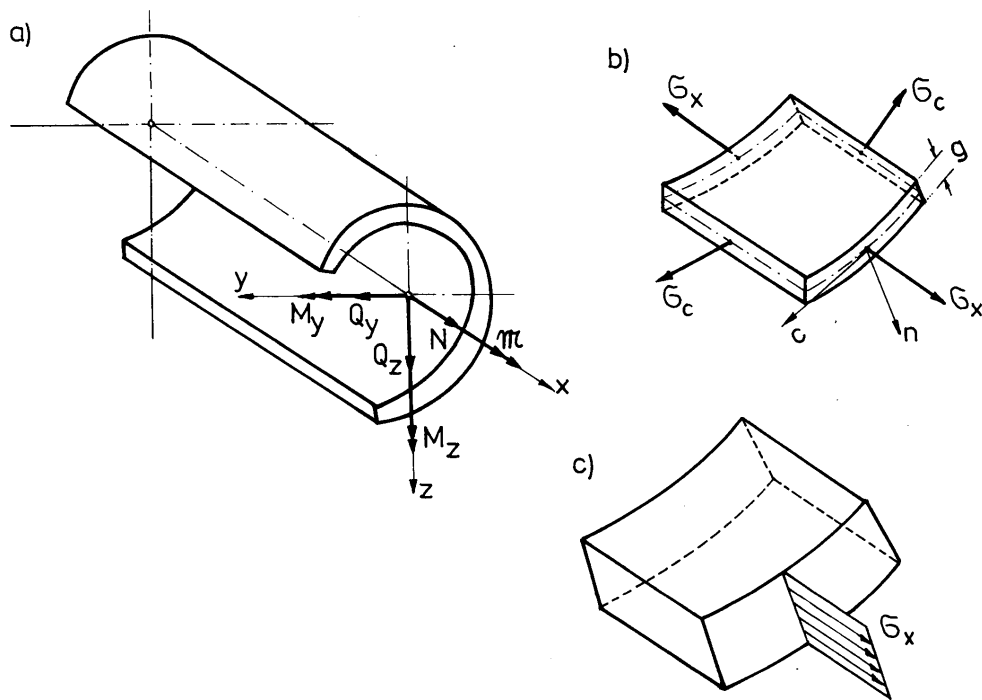
$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \varepsilon_x = E_1 \cdot \varepsilon_x, \quad (13.23)$$

gdzie

$$E_1 = \frac{E}{(1-\nu^2)}.$$

Wzór (13.23) po wykorzystaniu zależności (13.17) i oznaczeń (13.19) pozwala obliczyć naprężenia normalne σ_x w punktach linii środkowej:

$$\sigma_x(x, c) = E_1 [\lambda(x) - \kappa_z y(c) + \kappa_y z(c) + \kappa_\omega \omega(c)] \quad (13.24)$$



Rys. 13.16

W teorii *Własowa* przyjmuje się, że naprężenia normalne σ_x na grubości ścianki są stałe (por. rys. 13.16c). Uważamy zatem, że wzór (13.24) określający średnie wartości tych naprężeń obowiązuje również dla punktów nie leżących na linii środkowej przekroju.

Wzór (13.24) wykorzystamy teraz w zależnościach (13.19), definiujących siły wewnętrzne. Uwzględnimy fakt, że osie y i z są głównymi środkowymi osiami bezwładności i wówczas

$$S_y = \int_A z dA = 0, \quad S_z = \int_A y dA = 0, \quad J_{yz} = \int_A yz dA = 0. \quad (13.25)$$

W rezultacie otrzymujemy:

$$\left. \begin{aligned} N &= \int_A \sigma_x dA = E_1 \left[\lambda \int_A dA - \kappa_z \int_A y dA + \kappa_y \int_A z dA + \kappa_\omega \int_A \omega dA \right] = \\ &= E_1 A \lambda + E_1 \kappa_\omega \int_A \omega dA, \\ M_y &= \int_A \sigma_x \cdot z dA = E_1 \left[\lambda \int_A z dA - \kappa_z \int_A zy dA + \kappa_y \int_A z^2 dA + \kappa_\omega \int_A \omega z dA \right] = \\ &= E_1 J_y \kappa_y + E_1 \kappa_\omega \int_A \omega z dA, \\ M_z &= - \int_A \sigma_x \cdot y dA = E_1 \left[\lambda \int_A y dA - \kappa_z \int_A y^2 dA + \kappa_y \int_A yz dA + \kappa_\omega \int_A \omega y dA \right] = \\ &= E_1 J_z \kappa_z - E_1 \kappa_\omega \int_A \omega y dA, \\ B &= \int_A \sigma_x \cdot \omega dA = E_1 \left[\int_A \omega dA - \kappa_z \int_A \omega y dA + \kappa_y \int_A \omega z dA + \kappa_\omega \int_A \omega^2 dA \right]. \end{aligned} \right\} \quad (13.26)$$

Powyższe równania uproszczą się znacznie, jeżeli tak obierzemy położenie bieguna R i punktu początkowego O , by były spełnione następujące warunki:

$$S_\omega = 0; \quad J_{\omega z} = J_{\omega y} = 0,$$

gdzie

$$S_\omega \stackrel{\text{def}}{=} \int_A \omega dA, \quad J_{\omega z} \stackrel{\text{def}}{=} \int_A \omega z dA, \quad J_{\omega y} \stackrel{\text{def}}{=} \int_A \omega y dA. \quad (13.27)$$

Wielkość S_ω to **wycinkowy moment statyczny**, a $J_{\omega z}$ i $J_{\omega y}$ to **wycinkowe momenty odśrodkowe** (dewiacyjne). Wymaganie, by wielkości te zniknęły, pozwala określić położenie tzw. **bieguna głównego** S oraz zerowych **punktów początkowych**. Punkt zerowy leżący najbliżej bieguna głównego nazywamy **głównym punktem zerowym** G . Zbiór definicji wycinkowych parametrów geometrycznych przekroju cienkościennego uzupełnia jeszcze tzw. wycinkowy moment bezwładności J_ω , określony następująco:

$$J_\omega \stackrel{\text{def}}{=} \int_A \omega^2 dA \quad [\text{m}^6]. \quad (13.28)$$

Uwzględniając w równaniach (13.26) wzory (13.27) i (13.28) otrzymujemy bardzo ważne zależności fizyczne obowiązujące dla głównych środkowych osi bezwładności y, z oraz głównych współrzędnych wycinkowych przekroju (tzn. dla bieguna głównego S i głównego punktu zerowego G):

$$\left. \begin{aligned} N &= E_1 A \lambda = E_1 A \hat{u}_x'(x), \\ M_y &= E_1 J_y \kappa_y = -E_1 J_y w_S''(x), \\ M_z &= E_1 J_z \kappa_z = E_1 J_z v_S''(x), \\ B &= E_1 J_\omega \kappa_\omega = E_1 J_\omega \psi''(x). \end{aligned} \right\}$$

Zależności te można zapisać również następująco:

$$\left. \begin{aligned} \lambda(x) = u_x''(x) &= \frac{N(x)}{E_1 A}, \\ \kappa_y(x) = -w_s''(x) &= \frac{M_y(x)}{E_1 J_y}, \\ \kappa_z(x) = v_s''(x) &= \frac{M_z(x)}{E_1 J_z}, \\ \kappa_\omega(x) = \psi''(x) &= \frac{B(x)}{E_1 J_\omega}. \end{aligned} \right\} \quad (13.29)$$

Po uwzględnieniu tych wzorów w równaniu (13.24) otrzymujemy podstawowy wzór na obliczenie naprężeń normalnych σ_x w przekroju cienkościennym:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{J_z} y + \frac{M_y}{J_y} z + \frac{B}{J_\omega} \omega. \quad (13.30)$$

Ostatni składnik prawej strony wzoru (13.30), charakterystyczny dla prętów cienkościennych, oznaczmy przez $\sigma_x(\omega)$. Odzwierciedla on naprężenia normalne wynikające z więzów nałożonych na deplanację przekroju. Zwróćmy uwagę na to, że

$$\begin{aligned} \int_A \sigma_x(\omega) dA &= \frac{B}{J_\omega} \int_A \omega dA = 0; \\ \int_A \sigma_x(\omega) y dA &= \frac{B}{J_\omega} \int_A \omega y dA = 0; \\ \int_A \sigma_x(\omega) z dA &= \frac{B}{J_\omega} \int_A \omega z dA = 0. \end{aligned}$$

Wynika stąd wniosek, że naprężenia normalne wywołane przez bimoment tworzą układ samorównoważący się. Charakteryzuje się on tym, że standardowe siły wewnętrzne (N , M_y , M_z) pochodzące od naprężeń $\sigma_x(\omega)$ są tożsamościowo równe zeru.

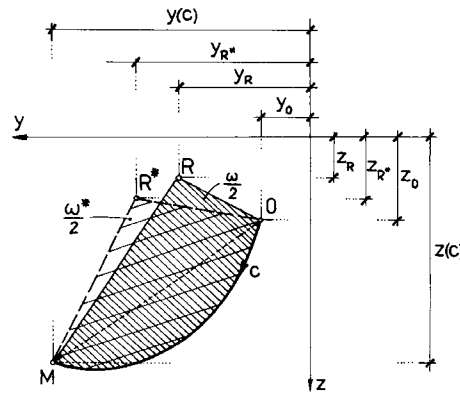
13.2.4. Główne współrzędne wycinkowe

Pewnego komentarza wymaga sposób wyznaczania położenia bieguna głównego S i głównego punktu zerowego G . Zastanowimy się najpierw, jaką wartość przyjmuje współrzędna wycinkowa $\omega^* = \omega(R^*, 0)$ po zmianie bieguna z położenia R do położenia R^* (rys. 13.17). Jeżeli współrzędna wycinkowa ω punktu M obliczona dla bieguna R jest znana, to współrzędna $\omega^* = \omega - 2(\text{pole } \Delta MOR - \text{pole } \Delta MOR^*)$, tzn.

$$\omega^* = \omega - \begin{vmatrix} y & z & 1 \\ y_0 & z_0 & 1 \\ y_R & z_R & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y & z & 1 \\ y_0 & z_0 & 1 \\ y_{R^*} & z_{R^*} & 1 \end{vmatrix}.$$

Po obliczeniu wartości wyznaczników i wykonaniu redukcji wyrazów podobnych otrzymujemy:

$$\omega^* = \omega - (z_{R^*} - z_R)(y - y_0) + (y_{R^*} - y_R)(z - z_0). \quad (13.31)$$



Rys. 13.17

Jeżeli punkt R^* jest biegunem głównym, to $R^* = S(y_{R^*} = y_S, z_{R^*} = z_S)$ oraz $S_{\omega^*} = 0$, $J_{\omega^*z} = J_{\omega^*y} = 0$. Rozważmy najpierw wymaganie, by $J_{\omega^*z} = 0$, które przy wykorzystaniu zależności (13.31) oraz definicji (13.27)₂ daje następujące równanie:

$$J_{\omega^*z} = \int_A \omega z dA - (z_S - z_R) \cdot \left[\int_A y z dA - y_0 \int_A z dA \right] + (y_S - y_R) \cdot \left[\int_A z^2 dA - z_0 \int_A z dA \right] = 0.$$

Wziąwszy pod uwagę, że osie y i z są głównymi środkowymi osiami bezwładności przekroju ($J_{yz} = S_y = S_z = 0$), a $\int_A z^2 dA = J_y$, otrzymujemy:

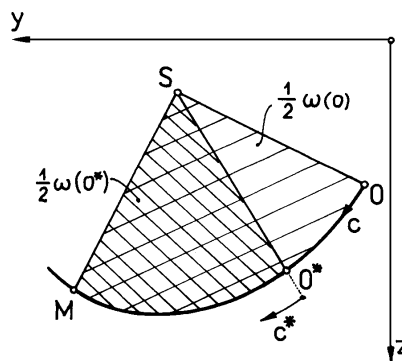
$$(i) \quad J_{\omega z} + (y_S - y_R) \cdot J_y = 0.$$

Podobnie wymaganie, by $J_{\omega^*y} = 0$, prowadzi do wyniku

$$(j) \quad J_{\omega y} - (z_S - z_R) \cdot J_z = 0.$$

Równania (i) oraz (j) pozwalają określić współrzędne bieguna głównego y_S i z_S :

$$\left. \begin{aligned} y_S &= y_R - \frac{J_{\omega z}}{J_y}, \\ z_S &= z_R + \frac{J_{\omega y}}{J_z}. \end{aligned} \right\} \quad (13.32)$$



Rys. 13.18

Następnym zadaniem jest określenie wartości współrzędnej wycinkowej ω dowolnego punktu M po zmianie punktu początkowego z położenia O do położenia O^* . Rozwiązanie otrzymujemy bezpośrednio z rys. 13.18:

$$2 \times \text{pole } O^*MS = 2 \times (\text{pole } OMS - \text{pole } OO^*S)$$

lub

$$\omega(O^*) = \omega(O) - \omega_O^*(O), \quad (13.33)$$

gdzie $\omega_O^*(O)$ oznacza współrzędną wycinkową punktu O^* przy założeniu, że punkt początkowy przyjęto w punkcie O . Jeżeli punkt O^* jest głównym punktem zerowym G , to musi być jeszcze spełnione ostatnie wymaganie: $S_{\omega^*} = 0$. Z definicji (13.27)₁, w której uwzględniona jest zależność (13.31), otrzymujemy:

$$S_{\omega^*} = \int_A \omega(O^*) dA = \int_A \omega(G) dA = \int_A [\omega(O) - \omega_G(O)] dA = \int_A \omega(O) dA - \omega_G(O) \int_A dA = 0, \text{ skąd współrzędna}$$

głównego punktu początkowego

$$\omega_G(O) = \frac{S_{\omega}(O)}{A}. \quad (13.34)$$

Wszystkie dalsze rozważania przeprowadzać będziemy tylko dla głównych współrzędnych wycinkowych.

13.2.5. Naprężenia styczne. Moment giętno-skrętny

Na wstępie zaznaczymy, że teoria *Własowa* jest tak samo niekonsekwentna jak klasyczna teoria prętów zwartych, w której założenie płaskich przekrojów *Bernoulliego* ($c = 0$) kłóci się z występowaniem naprężeń stycznych τ_{xz} . Na podstawie równań fizycznych i drugiego założenia teorii *Własowa* ($\gamma_x = 0$) można bowiem wnioskować, że $\tau_{xc} = 0$. Bezkrytyczna akceptacja tego wniosku uniemożliwia jednak spełnienie równań równowagi. Wyjaśniamy zatem, że założenia kinematyczne teorii *Własowa* służą przede wszystkim do wyznaczenia naprężeń normalnych σ_x oraz przemieszczeń pręta.

W odniesieniu do naprężeń stycznych przyjmujemy, że w każdym przekroju $\tau_{xn} = \tau_{cn} = 0$. W celu wyznaczenia naprężeń stycznych $\tau_{xc} = \tau_{cx}$ rozważymy równowagę elementu pręta ograniczonego dwoma przekrojami: x oraz $x + dx$ (rys. 13.19). Ułożymy najpierw równanie równowagi sił równoległych do osi x dla całego przekroju poprzecznego ograniczonego wartościami $c = -c^-$ oraz $c = c^+$. Na rozważany element działają:

- obciążenia $p_x(x, c)$ odniesione do jednostki pola powierzchni środkowej;
- obciążenia $q_x^-(x)$ i $q_x^+(x)$ odniesione do jednostki długości pręta; są one wypadkowymi naprężeniami stycznych τ_{cx} rozłożonych odpowiednio na płaszczyznach brzegowych $c = -c^-$ oraz $c = c^+$;
- naprężenia normalne σ_x w przekroju x oraz naprężenia normalne $\sigma_x + d\sigma_x$ w przekroju $x + dx$.

Wobec powyższego równanie równowagi rzutów sił na oś x przyjmuje postać:

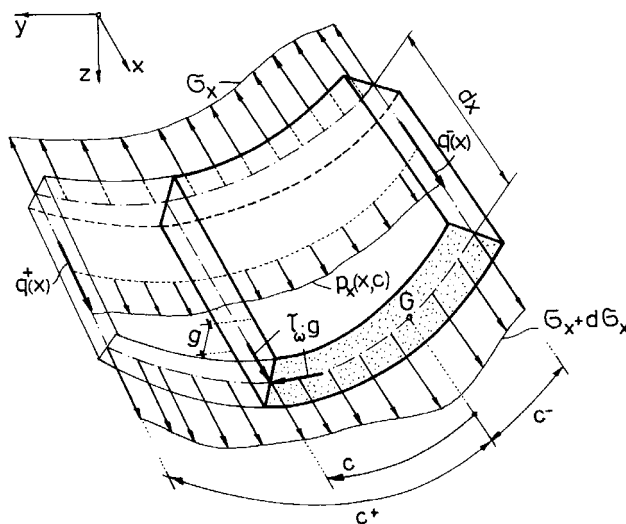
$$\left[\int_{-c^-}^{c^+} p_x(x, c) dc \right] dx + (q_x^- + q_x^+) dx + \int_{-c^-}^{c^+} d\sigma_x(x, c) g(c) dc = 0.$$

Pierwsza z całek oznacza obciążenie $q_x^c(x)$ odniesione do jednostki długości pręta i będące wypadkową obciążeń podłużnych działających na całość szerokości przekroju ograniczonej współrzędnymi $-c^-$ oraz c^+ :

$$q_x^c(x) = \int_{-c^-}^{c^+} p(x, c) dc. \quad (13.35)$$

Z uwagi na to, że element pola przekroju pręta $dA = g(c)dc$, druga całka przedstawia przyrost siły normalnej po zmianie współrzędnej x o wartość dx :

$$dN(x) = \int_{-c^-}^{c^+} d\sigma_x(x, c) dA(c). \quad (13.36)$$



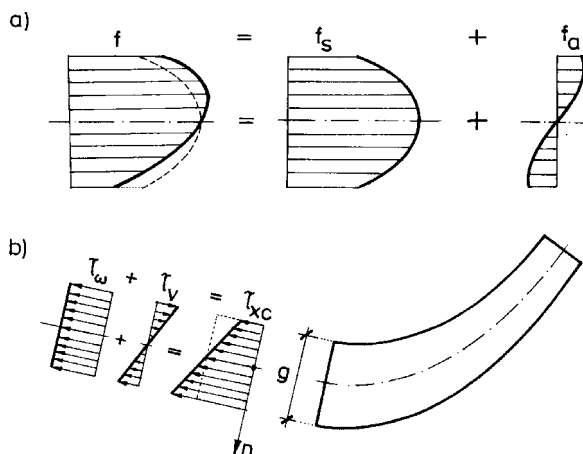
Rys. 13.19

Suma rzutów sił na oś x prowadzi zatem do zależności:

$$q_x^c(x)dx + [q_x^-(x) + q_x^+(x)]dx + dN(x) = 0,$$

skąd

$$\frac{dN(x)}{dx} = N'(x) = -[q_x^c(x) + q_x^-(x) + q_x^+(x)] = -q_x(x). \quad (13.37)$$



Rys. 13.20

Przejdziemy teraz do określenia naprężeń stycznych τ_{xc} . Zwróćmy uwagę na to, że rozkład tych naprężeń na grubości ścianki nie jest znany. Każdą dowolną funkcję (por. rys. 13.20a) można przedstawić jako sumę funkcji symetrycznej (parzystej) i antysymetrycznej (nieparzystej):

$$f = f_s + f_a.$$

Najprostszą funkcją symetryczną jest funkcja $f_s = \text{const}$, a najprostszą funkcją antysymetryczną jest jednorodna funkcja liniowa. Przyjmijmy te założenia w odniesieniu do rozkładu naprężeń τ_{xc} jako funkcji zmiennej n . Mamy więc:

$$\tau_{xc}(x, c, n) = \tau_\omega(x, c) + \tau_v(x, n). \quad (13.38)$$

We wzorze (13.38) τ_ω oznacza naprężenie średnie, stałe na grubości ścianki, natomiast τ_v jest liniową jednorodną funkcją współrzędnej n ($-g(c)/2 \leq n \leq g(c)/2$):

$$\tau_v(x, n) = n\mu(x), \quad (13.39)$$

gdzie $\mu(x)$ jest współczynnikiem kątowym tego liniowego rozkładu. Rozkład naprężeń stycznych τ_{xc} ilustruje rys. 13.20b.

Liniową zmianę naprężeń τ_v możemy przypisać skręcaniu swobodnemu otwartego przekroju cienkościennego. Stosownie do wzoru (12.30)₂ naprężenia te wyraża zależność:

$$\tau_v = \tau_v(x, n) = -n \frac{2\mathcal{M}_v(x)}{J_s(x)} = n\mu(x), \quad (13.40)$$

gdzie \mathcal{M}_v jest momentem skręcającym odpowiadającym skręcaniu swobodnemu (tzw. moment *de Saint-Venanta*), a J_s jest momentem bezwładności na skręcanie (por. p. 12.3.2). Z zależności (13.40) wynika, że $\mu(x, c) = \mu(x)$, a ekstremalne naprężenia styczne τ_v występują na krawędziach $n = \pm g(c)/2$:

$$\tau_{v\text{ekstr}} = \tau_v \Big|_{n=\pm \frac{1}{2}g} = \pm \frac{\mathcal{M}_v(x)}{J_s(x)} g(c). \quad (13.41)$$

W celu określenia naprężeń τ_ω , stałych na grubości ścianki, rozważymy równowagę części przekroju ograniczonego wartościami $c = -c^-$ i $c = c$ (element zaznaczony linią ciągłą na rys. 13.19). Wziąwszy ponownie sumę rzutów sił na oś x otrzymujemy:

$$\left[\int_{-c^-}^c p_x(x, c) dc \right] dx + q_x^-(x) dx + \int_{-c^-}^c d\sigma_x(x, c) g(c) \cdot dc + \tau_\omega(x, c) g(c) dx = 0.$$

Zauważymy, że

$$d\sigma_x = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \quad \text{oraz} \quad g(c) dc = dA.$$

Wówczas:

$$\int_{-c^-}^c p_x(x, c) dc + q_x^-(x) + \int_{A_1} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dA + \tau_\omega(x, c) g(c) = 0,$$

przy czym A_1 jest częścią przekroju zakropkowaną na rys. 13.19. Na podstawie powyższego równania mamy:

$$\tau_\omega(x, c) = \hat{\tau}_\omega(x) - \frac{1}{g(c)} \cdot \left[\int_{A_1} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dA \right], \quad (13.42)$$

gdzie

$$\hat{\tau}_{\omega}(x) = -\frac{1}{g(c)} \cdot \left[\int_{-c}^c p_x(x, c) dc + q_x^-(x) \right].$$

Do obliczenia pochodnej $\partial \sigma_x / \partial x$ wykorzystamy wyrażenie (13.30), określające naprężenie $\sigma_x(x, c)$. Uzyskany rezultat podstawiamy do równania (13.42):

$$\begin{aligned} \tau_{\omega}(x, c) = \hat{\tau}_{\omega}(x) - \frac{N'(x)}{A g(c)} \int_{A_1} dA + \frac{M_z'(x)}{J_z g(c)} \int_{A_1} y(c) dA - \\ - \frac{M_y'(x)}{J_y g(c)} \int_{A_1} z(c) dA - \frac{B'(x)}{J_{\omega} g(c)} \int_{A_1} \omega(c) dA. \end{aligned} \quad (13.42a)$$

Całki występujące w równaniu (13.42a) oznaczmy następująco:

$$A_1 = \int_{A_1} dA; \quad S_z(c) = \int_{A_1} y(c) dA; \quad S_y(c) = \int_{A_1} z(c) dA; \quad S_{\omega}(c) = \int_{A_1} \omega(c) dA,$$

gdzie $S_z(c)$ i $S_y(c)$ są momentami statycznymi pola A_1 względem osi z i y , zaś $S_{\omega}(c)$ jest wycinkowym momentem statycznym tego pola względem bieguna głównego.

Wielkości $N'(x)$, $M_y'(x)$, $M_z'(x)$ oraz $B'(x)$ mają sens statyczny, wynikający z równań równowagi.

Pochodną $N'(x)$ określa wzór (13.37), a na podstawie znanych zależności różniczkowych wiadomo, że

$$M_z'(x) = -Q_y(x), \quad M_y'(x) = Q_z(x).$$

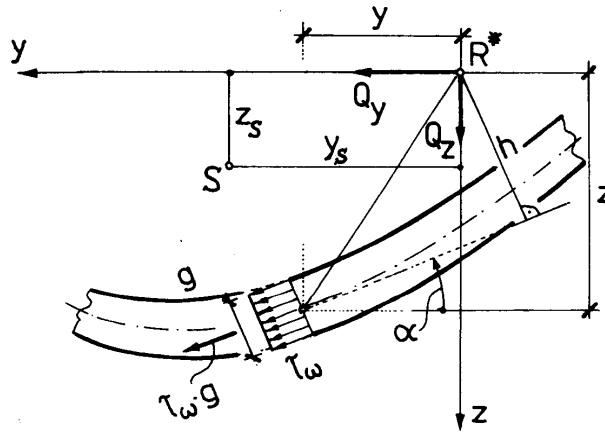
Po uwzględnieniu powyższych uwag w równaniu (13.42a) otrzymujemy podstawowy wzór służący do obliczenia naprężeń τ_{ω} w prętach cienkościennych:

$$\tau_{\omega}(x, c) = \hat{\tau}_{\omega}(x) + \frac{q_x(x)}{A \cdot g(c)} A_1(c) - \frac{Q_y(x) S_z(c)}{J_z g(c)} - \frac{Q_z(x) S_y(c)}{J_y g(c)} - \frac{B'(x) S_{\omega}(c)}{J_{\omega} g(c)}. \quad (13.43)$$

Wzór (13.43) stanowi pewne uogólnienie znanego wzoru (11.6) na naprężenia styczne w belkach dwukierunkowo zginanych poprzecznie. Pierwsze dwa składniki wzoru (13.43) występują tylko wówczas, gdy obciążenia osiowe na długości pręta są różne od zera, tj. gdy $p_x \neq 0$, $q_z^- \neq 0$ i $q_z^+ \neq 0$. Obciążenia takie występują niezmiernie rzadko i na ogół można je pominąć. Zasadniczą nowością jest pojawienie się składnika zawierającego pochodną bimomentu $B'(x)$. Sens tej wielkości wyjaśni się podczas obliczania całkowitego momentu skręcającego jako efektu działania naprężeń $\tau_{xc} = \tau_v + \tau_{\omega}$. Moment skręcający pochodzący od naprężeń τ_v jest równy tylko połowie momentu skręcania swobodnego (por. p. 12.1 wzór (h) i p. 12.3.2). Mamy więc:

$$\mathcal{M}_v = -2 \int_A \tau_v n dA.$$

Znak minus wynika stąd, że przyjęty zwrot naprężeń τ_v daje moment lewoskrętny.



Rys. 13.21

Wyznaczenie momentu skręcającego spowodowanego naprężeniami τ_ω jest dosyć skomplikowane. Dla uproszczenia obliczeń pominiemy wpływ obciążeń osiowych. Przyjmijmy nadto, że początek układu osi y i z odpowiada pewnemu biegunowi R^* (por. rys. 13.21). Wówczas

$$\mathcal{M}(\tau_\omega) = - \int_c \tau_\omega g h \, dc = - \int_c \tau_\omega g \, d\omega^*.$$

Zależność tę przetransformujemy do głównego wycinkowego bieguna S o współrzędnych y_S, z_S . Stosownie do wzoru (13.31) mamy ($y_{R^*} = z_{R^*} = 0, y_R = y_S, z_R = z_S$):

$$\omega^* = \omega - y_S(z - z_G) + z_S(y - y_G),$$

gdzie ω^* jest główną współrzędną wycinkową, a y_G i z_G są współrzędnymi głównego punktu zerowego. Różniczkowanie tego wyrażenia daje:

$$d\omega^* = d\omega - y_S dz + z_S dy.$$

Moment $\mathcal{M}(\tau_\omega)$ wyrazimy zatem następująco:

$$\mathcal{M}(\tau_\omega) = - \int_c \tau_\omega g \cdot d\omega + y_S \int_c \tau_\omega g \cdot dz - z_S \int_c \tau_\omega g \cdot dy. \quad (13.44)$$

Dwie ostatnie całki przedstawiają momenty skręcające sił poprzecznych Q_y i Q_z względem bieguna głównego S :

$$\begin{aligned} -y_S \int_c \tau_\omega g \, dz &= y_S \int_c \tau_\omega \sin \alpha \cdot g \, dc = y_S \int_c \tau_{xz} \, dA = y_S Q_z, \\ z_S \int_c \tau_\omega g \, dz &= -z_S \int_c \tau_\omega \cos \alpha \cdot g \, dc = -z_S \int_c \tau_{xz} \, dA = -z_S Q_y. \end{aligned}$$

Do obliczenia pierwszej całki we wzorze (13.44) wykorzystamy wzór (13.43) przyjąwszy, że $\hat{\tau}_\omega = q_x = 0$:

$$- \int_c \tau_\omega g \cdot d\omega = \frac{Q_y(x)}{J_z} \int_c S_z(y) \, d\omega + \frac{Q_z(x)}{J_y} \int_c S_y(z) \, d\omega + \frac{B'(x)}{J_\omega} \int_c S_\omega(c) \, d\omega.$$

Poszczególne składniki tego wyrażenia scałkujemy przez części:

$$\begin{aligned}
 \int_c S_z(y) d\omega &= \int_c^{c^+} \left[\int_{-c^-}^c y(\bar{c}) g(\bar{c}) d\bar{c} \right] d\omega(c) = \\
 &= \left| \omega(c) \int_{-c^-}^c y(\bar{c}) g(\bar{c}) d\bar{c} \right|_{-c^-}^{c^+} - \int_{-c^-}^{c^+} \omega(c) \frac{d}{d\omega} \left[\int_{-c^-}^c y(\bar{c}) g(\bar{c}) d\bar{c} \right] d\omega = \\
 &= \omega(c^+) \int_{-c^-}^c y(\bar{c}) g(\bar{c}) d\bar{c} - \omega(c^-) \int_{-c^-}^{c^+} y(\bar{c}) g(\bar{c}) d\bar{c} - \int_{-c^-}^{c^+} \omega(\bar{c}) \frac{d}{d\bar{c}} \left[\int_{-c^-}^c y(\bar{c}) g(\bar{c}) d\bar{c} \right] \frac{d\bar{c}}{d\omega} d\omega = \\
 &= \omega(c^+) \int_A y dA - \int_{-c^-}^{c^+} \omega(c) y(c) g(c) dc = \omega(c^+) S_z - \int_A \omega y dA.
 \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy zatem zależność:

$$(k) \quad \int_c S_z(y) d\omega = \omega(c^+) S_z - J_{\omega y}.$$

Podobnie dochodzimy do dalszych zależności:

$$(l) \quad \int_c S_y(z) d\omega = \omega(c^+) S_y - J_{\omega z},$$

$$(m) \quad \int_c S_\omega(c) d\omega = \omega(c^+) S_\omega - J_\omega.$$

Ponieważ rozważania dotyczą głównych osi środkowych oraz głównych współrzędnych wycinkowych, więc

$$S_y = S_z = 0, \quad S_\omega = 0, \quad J_{\omega y} = 0, \quad J_{\omega z} = 0.$$

Wobec powyższego

$$-\int_c \tau_\omega \cdot g \cdot d\omega = -B'(x),$$

a wzór (13.44) przyjmuje postać:

$$\mathcal{M}(\tau_\omega) = -B'(x) + Q_z y_S - Q_y z_S. \quad (13.45)$$

Jeśli moment skracający obliczymy nie względem środka ciężkości przekroju lecz względem bieguna głównego S , to momenty pochodzące od sił poprzecznych będą równe zero ($d\omega^* = d\omega$). Obliczony w ten sposób moment skracający oznaczmy przez \mathcal{M}_ω .

W podsumowaniu stwierdzamy więc, że całkowity moment skracający obliczony względem bieguna głównego \mathcal{M}_S jest sumą momentu od skręcania swobodnego \mathcal{M}_v i skręcania skrępowanego \mathcal{M}_ω :

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{M}_S &= \mathcal{M}_v + \mathcal{M}_\omega, \\ \mathcal{M}_\omega &= -B'(x). \end{aligned} \right\} \quad (13.46)$$

Moment \mathcal{M}_ω nazywamy **momentem giętno-skrętnym**. Znak minus we wzorze (13.46)₁ wynika z przyjęcia, że dodatni moment skracający jest prawoskrętny. Wzór (13.46)₂ jest analogiczny do znanej zależności różniczkowej między siłą poprzeczną a momentem zginającym: $Q_z = M_y'(x)$.

Z powyższych rozważań wynika, że biegun główny pokrywa się ze środkiem ścinania (zginania) omawianym w p. 11.5.

Na koniec przytoczymy najczęściej stosowaną postać wzoru na naprężenia styczne τ_ω , w którym pominięto wpływ obciążeń osiowych i uwzględniono zależność (13.46)₁:

$$\tau_\omega = -\frac{Q_y S_z}{J_z g} - \frac{Q_z S_y}{J_y g} + \frac{\mathcal{M}_\omega S_\omega}{J_\omega g}. \quad (13.47)$$

13.2.6. Równania różniczkowe funkcji bimomentu i funkcji kąta skręcenia. Warunki brzegowe

Omówimy sposób wyznaczania funkcji bimomentu $B(x)$ i funkcji kąta skręcenia $\psi(x)$. Wielkości te są niezbędne do wyznaczenia naprężeń normalnych i stycznych.

Z teorii skręcania swobodnego wiadomo, że

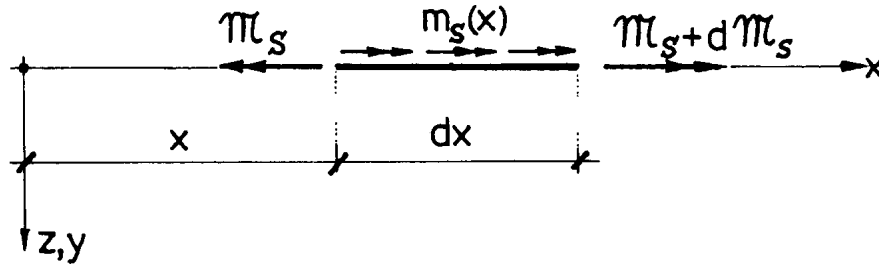
$$(n) \quad \mathcal{M}_\psi = GJ_s \theta = GJ_s \cdot \psi'(x),$$

natomiast na podstawie wzoru (13.46)₂ i zależności (13.26) otrzymujemy:

$$(o) \quad \mathcal{M}_\omega = -B'(x) = -E_1 \cdot J_\omega \cdot \psi'''(x).$$

Wobec powyższego wzór (13.46)₁ można wyrazić następująco:

$$\mathcal{M}_S(x) = -E_1 \cdot J_\omega \cdot \psi'''(x) + GJ_s \cdot \psi'(x). \quad (13.48)$$



Rys. 13.22

Rozważymy obecnie równowagę elementu przedstawionego na rys. 13.22. Symbolem $m_S(x)$ oznaczmy rozłożony w sposób ciągły moment skręcający względem środka skręcania S . Moment ten jest efektem działania obciążeń $p_y(x)$ i $p_z(x)$. Z rysunku 13.22 otrzymujemy:

$$\frac{d\mathcal{M}_S}{dx} = -m_S(x). \quad (13.49)$$

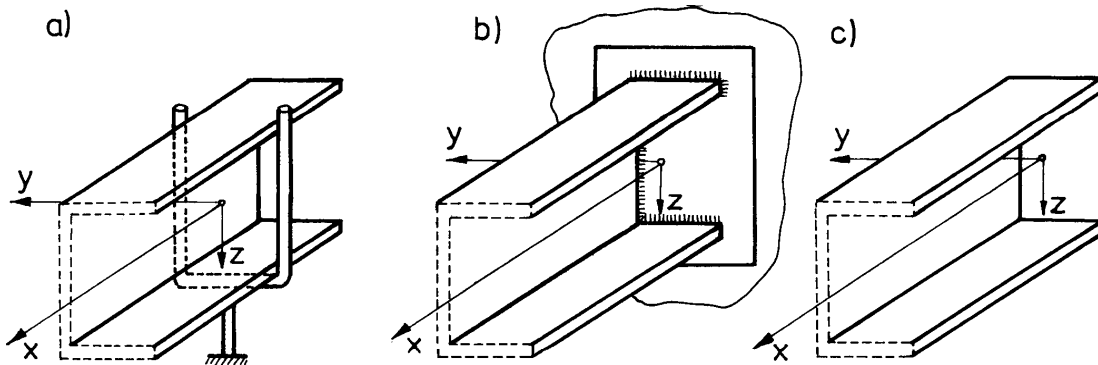
Z drugiej strony na podstawie równania (13.48) mamy:

$$\frac{d\mathcal{M}_S}{dx} = -E_1 \cdot J \cdot \psi^{IV}(x) + GJ_s \cdot \psi''(x) = -B''(x) + \frac{GJ_s}{E_1 J_\omega} \cdot B(x).$$

Po połączeniu otrzymanej zależności z równaniem (13.49) uzyskujemy dwa bardzo ważne równania różniczkowe na funkcję bimomentu $B(x)$ i kąta skręcenia $\psi(x)$:

$$\left. \begin{aligned} B''(x) - \vartheta \cdot B(x) &= m_S(x), \\ \psi^{IV}(x) - \vartheta^2 \cdot \psi''(x) &= \frac{m_S(x)}{E_1 J_\omega}, \quad \text{gdzie} \quad \vartheta^2 = \frac{GJ_s}{E_1 J_\omega} \end{aligned} \right\} \quad (13.50)$$

Równanie (13.50)₁ stosujemy wówczas, gdy dane są statyczne warunki brzegowe. Przy kinematycznych warunkach brzegowych wykorzystujemy równanie (13.50)₂.



Rys. 13.23

Najczęściej spotykane warunki podparcia prętów cienkościennych zestawimy poniżej:

– podparcie widełkowe (rys. 13.23a), gdzie

$$\psi = 0 \quad \text{i} \quad B = 0, \quad \text{czyli} \quad \psi'' = 0,$$

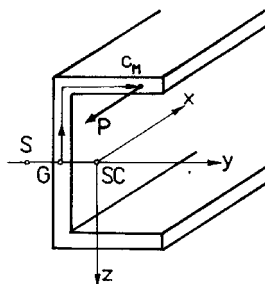
– sztywne zamocowanie uniemożliwiające deplanację (13.23b):

$$\psi = 0 \quad \text{i} \quad u_x = 0, \quad \text{czyli} \quad \psi' = 0,$$

– koniec swobodny, wolny od naprężeń (rys. 13.23c):

$$\begin{aligned} B &= 0, \quad \text{czyli} \quad \psi'' = 0 \\ \mathcal{M}_S &= 0, \quad \text{czyli} \quad -E_1 J_\omega \cdot \psi'''' + GJ_s \cdot \psi' = 0 \quad \text{lub} \quad \psi'''' - \vartheta^2 \cdot \psi' = 0. \end{aligned}$$

Podane wyżej warunki brzegowe stosujemy do równania IV rzędu na kąt skręcenia ψ (13.50)₂.



Rys. 13.24

Statyczne warunki brzegowe występują w tych nielicznych przypadkach, gdy znamy rozkład naprężeń normalnych na końcu pręta. Jeżeli dla przykładu w punkcie M przekroju początkowego ($x = 0$) jest przyłożona siła skupiona P równoległa do osi x (rys. 13.24), to wartość brzegowa bimomentu stosownie do definicji (13.19)₄

$$B(0) = \int_A \sigma_x(0) \cdot \omega dA = P \int_A \delta(c - c_M) \cdot \omega dA = P \cdot \omega_M,$$

gdzie przez $\delta(c - c_M)$ oznaczono deltę Diraca, a przez ω_M współrzędną wycinkową punktu M .

13.2.7. Zależności energetyczne

W prętach cienkościennych do obliczania energii stosujemy wyrażenia (por. wzór (13.20)):

$$\int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \int_s (N\lambda + M_y k_y + M_z k_z + Bk_\omega + \mathcal{M}_\theta \theta) ds. \quad (13.51)$$

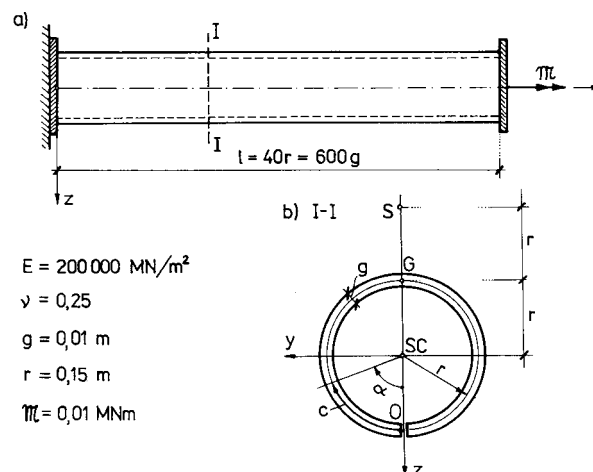
Wzór (13.51) obowiązuje dla dowolnego materiału, jeśli są spełnione założenia kinematyczne teorii *Własowa*. Dlatego znikają składniki zawierające siły poprzeczne i moment giętno-skrętny. Składniki wirtualnych prac wewnętrznych uzyskujemy przez wyróżnienie odpowiednich wielkości statycznych lub kinematycznych. Dla materiału liniowo-sprężystego wyrażenia na energię wewnętrzną budujemy z wykorzystaniem wzorów (13.26) lub (13.29):

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_s \left(\frac{N^2}{E_1 A} + \frac{M_y^2}{E_1 J_y} + \frac{M_z^2}{E_1 J_z} + \frac{B^2}{E_1 J_\omega} + \frac{\mathcal{M}_\theta^2}{G J_s} \right) ds \\ \text{albo} \\ U &= \frac{1}{2} \int_s \left(E_1 A \lambda^2 + E_1 J_y k_y^2 + E_1 J_z k_z^2 + E_1 J_\omega k_\omega^2 + G J_s \theta^2 \right) ds. \end{aligned} \right\} \quad (13.52)$$

13.2.8. Przykłady

Przykład 1

Obliczyć maksymalny kąt skęcenia ψ_{\max} oraz wyznaczyć rozkład naprężeń normalnych i stycznych podczas skęcenia stalowej cienkościennej rury kołowej przeciętej wzdłuż tworzącej. Oba końce rury są przymocowane do sztywnych płyt uniemożliwiających deplanację przekroju. Tekst zadania i szczegółowe wymiary ilustruje rys. 13.25.



Rys. 13.25

Rozwiązanie

a. Parametry geometryczne przekroju

Pole $A = 2\pi gr$.

Główne momenty bezwładności $J_y = J_z = \pi gr^3$.

Moment bezwładności przy skręcaniu swobodnym $J_s = 2\pi r g^3 / 3$.

Współrzędne wycinkowe przekroju dla bieguna leżącego w środku ciężkości (SC) i punktu początkowego O (rys. 13.25b):

$$\omega(\alpha) = \int_0^\alpha r \, dc = r^2 \int_0^\alpha d\alpha = r^2 \cdot \alpha.$$

Wycinkowe momenty odśrodkowe:

$$J_{\omega x} = \int_A \omega x \, dA = \int_0^{2\pi} r^2 \alpha (r \cos \alpha) g r \, d\alpha = 0,$$

$$J_{\omega y} = \int_A \omega y \, dA = r^4 g \int_0^{2\pi} \alpha \sin \alpha \, d\alpha = -2\pi r^4 g.$$

Położenie bieguna głównego (środku ścinania S):

$$y_S = -\frac{J_{\omega x}}{J_y} = 0,$$

$$z_S = \frac{J_{\omega y}}{J_z} = -\frac{2\pi r^4 g}{\pi r^3 g} = -2r.$$

Obliczenie współrzędnej wycinkowej dla bieguna S i punktu początkowego O (punkt R odpowiada środkowi ciężkości, tzn. $S.C. = R$):

$$\begin{aligned} \omega(S, 0) &= \omega(R, 0) - (z_S - z_R) \cdot (y - y_0) + (y_S - y_R) \cdot (z - z_0) = \\ &= r^2 \alpha - (-2r - 0) \cdot (y - 0) + (0 + 0) \cdot (z - r) = r^2 (\alpha + 2 \sin \alpha). \end{aligned}$$

Wycinkowy moment statyczny:

$$S_\omega = \int_A \omega \, dA = \int_0^{2\pi} r^2 (\alpha + 2 \sin \alpha) r g \, d\alpha = 2\pi^2 g r^3.$$

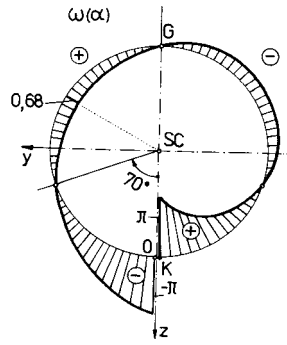
Współrzędna wycinkowa głównego punktu zerowego G :

$$\omega_G(S, 0) = \frac{S_\omega}{A} = \frac{2\pi^2 g r^3}{2\pi g r} = \pi r^2.$$

Punkt G leży zatem na linii łączącej punkty S i SC (por. rys. 13.25b). Główna współrzędna wycinkowa obliczona dla głównego bieguna S i głównego punktu początkowego G :

$$\omega(S, G) = \omega(\alpha) = \omega(S, 0) - \omega_G(S, 0) = r^2 (\alpha - \pi + 2 \sin \alpha).$$

Wykres funkcji $\omega(\alpha)$ przedstawia rys. 13.26.



Rys. 13.26

Główny wycinkowy moment bezwładności:

$$J_{\omega} = \int_A \omega^2 dA = \int_0^{2\pi} r^4 (\alpha - \pi + 2 \sin \alpha)^2 gr d\alpha = \pi gr^5 \left(\frac{2}{3} \pi^2 - 4 \right).$$

b. Wyznaczenie funkcji kąta skręcania

Należy rozwiązać równanie różniczkowe (13.50)₂:

$$\psi^{IV} - \vartheta^2 \psi'' = 0$$

dla następujących warunków brzegowych:

$$\psi(0) = \psi'(0) = \psi'(l) = 0; \quad \psi'''(l) - \vartheta^2 \psi'(l) = -\frac{\mathcal{M}}{E_1 J_{\omega}}.$$

Całą ogólną tego równania jest funkcja:

$$\psi(x) = D_1 + D_2 x + D_3 \sinh(\vartheta x) + D_4 \cosh(\vartheta x),$$

gdzie

$$\vartheta = \sqrt{\frac{G J_s}{E_1 J_{\omega}}} = \sqrt{\frac{E(1-\nu^2)}{2E(1+\nu)}} \cdot \frac{J_s}{J_{\omega}} = \frac{g}{r^2} \sqrt{\frac{1-\nu}{2\pi^2 - 12}}.$$

Do obliczenia stałych całkowania konieczne jest obliczenie pochodnych funkcji $\psi(x)$:

$$\psi'(x) = D_2 + \vartheta D_3 \cosh(\vartheta x) + \vartheta D_4 \sinh(\vartheta x),$$

$$\psi''(x) = \vartheta^2 D_3 \sinh(\vartheta x) + \vartheta^2 D_4 \cosh(\vartheta x),$$

$$\psi'''(x) = \vartheta^3 D_3 \cosh(\vartheta x) + \vartheta^3 D_4 \sinh(\vartheta x).$$

Warunki brzegowe prowadzą do następujących równań:

$$\psi(0) = 0:$$

$$D_1 + D_4 = 0,$$

$$\psi'(0) = 0:$$

$$D_2 + \vartheta D_3 = 0,$$

$$\psi'(l) = 0:$$

$$D_2 + \vartheta \cosh(\vartheta l) D_3 + \vartheta \sinh(\vartheta l) D_4 = 0,$$

$$\psi'''(l) - \vartheta^2 \psi'(l) = -\frac{\mathcal{M}}{E_1 J_{\omega}}:$$

$$\vartheta^2 D_2 = \frac{\mathcal{M}}{E_1 J_{\omega}}.$$

Wobec powyższego

$$D_1 = -D_4 = -\frac{\mathcal{M}}{GJ_s} \cdot \frac{\cosh(\vartheta l) - 1}{\sinh(\vartheta l)},$$

$$D_2 = \frac{\mathcal{M}}{GJ_s}, \quad D_3 = -\frac{1}{\vartheta} \cdot \frac{\mathcal{M}}{GJ_s}.$$

a funkcja $\psi(x)$ ma postać:

$$\psi(x) = \psi_0 \left\{ \frac{1}{(\vartheta l)} \left[\frac{\cosh(\vartheta l) - 1}{\sinh(\vartheta l)} \cdot (\cosh(\vartheta x) - 1) + \vartheta x - \sinh(\vartheta x) \right] \right\},$$

przy czym $\psi_0 = \mathcal{M} l / (GJ_s)$ i jest całkowitym kątem skręcenia swobodnego. Funkcja zawarta w nawiasie klamrowym zależy od proporcji geometrycznych pręta oraz współczynnika *Poissona*. Przyjawszy, że $r = 15$ g, $l = 40$ r = 600 g oraz $\nu = 0,25$, otrzymujemy:

$$\vartheta l = \frac{gl}{r^2} \sqrt{\frac{1-\nu}{2\pi^2 - 12}} = 0,83, \quad \sinh(\vartheta l) = 0,9288, \quad \cosh(\vartheta l) = 1,3648.$$

Maksymalny kąt skręcenia występuje dla $x = l$:

$$\psi_{\max} = \psi(l) = \psi_0 \cdot \left\{ \frac{1}{0,83} \left[\frac{(1,3648 - 1)^2}{0,9288} + 0,83 - 0,9288 \right] \right\} = 0,0536 \cdot \psi_0.$$

Widzimy zatem, że kąt ψ_{\max} stanowi około 5% wartości kąta przy skręcaniu ze swobodną deplanacją przekrojów końcowych. Wartość ta ($675 \cdot 0,0536 \approx 36$) jest kilkadziesiąt razy większa od kąta skręcenia przekroju zamkniętego, tj. rury nie przeciętej wzdłuż tworzącej (por. p. 12.3.3).

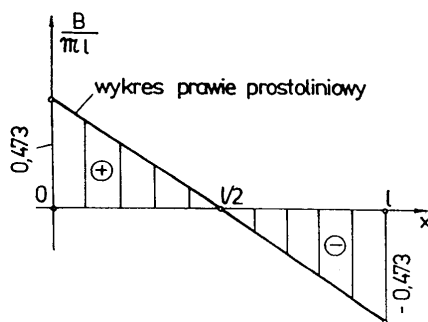
c. Obliczenie naprężeń

W tym celu trzeba wyznaczyć bimoment i moment giętno-skrętny:

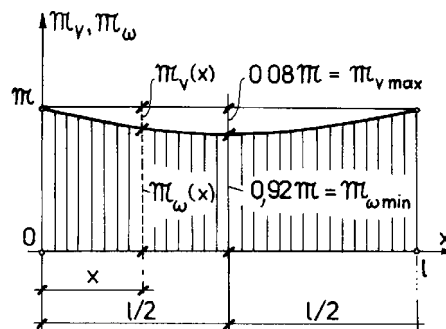
$$B(x) = E_1 J_\omega \cdot \psi''(x) = \frac{E_1 J_\omega \psi_0 \vartheta^2}{(\vartheta l)} \cdot \left[\frac{\cosh(\vartheta l) - 1}{\sinh(\vartheta l)} \cdot \cosh(\vartheta x) - \sinh(\vartheta x) \right] =$$

$$= \mathcal{M} l \cdot \frac{\cosh[\vartheta(l-x)] - \cosh(\vartheta x)}{(\vartheta l) \sinh(\vartheta l)} = \mathcal{M} l \cdot \frac{\cosh[0,83(1-\xi) - \cosh(0,83\xi)]}{0,771},$$

gdzie $\xi = x/l$. Wykres funkcji $B(x)$ przedstawia rys. 13.27.



Rys. 13.27



Rys. 13.28

Moment giętno-skrętny określamy z zależności (13.46)₂:

$$\mathcal{M}_\omega = -B'(x) = \mathcal{M} \frac{\sinh[\vartheta(l-x)] + \sinh(\vartheta x)}{\sinh(\vartheta l)} = \frac{\sinh[0,83(1-\xi)] + \sinh(0,83\xi)}{0,9288}.$$

Na rysunku 13.28 przedstawiono wykresy momentów \mathcal{M}_ω i $\mathcal{M}_v = GJ_s \cdot \psi'(x) = \mathcal{M} - \mathcal{M}_\omega$. Obie funkcje są oczywiście symetryczne względem połowy rozpiętości. Jak widać, udział momentu *de Saint-Venanta* jest znikomy i sięga zaledwie 8% wartości momentu całkowitego. Na końcach pręta moment \mathcal{M}_v jest równy zero z uwagi na całkowicie skrupowaną deplanację. Naprężenia normalne i styczne obliczamy ze wzorów (13.30) oraz (13.41) i (13.43) przy uwzględnieniu zależności (13.46)₂:

$$\sigma_x = \frac{B(x)}{J_\omega} \cdot \omega, \quad \tau_{xc}(x, c, n) = -\frac{2\mathcal{M}_v(x)}{J_s} n + \frac{\mathcal{M}_\omega(x) \cdot S_\omega(c)}{J_\omega \cdot g}.$$

Największe naprężenia normalne występują w przekrojach końcowych, gdzie

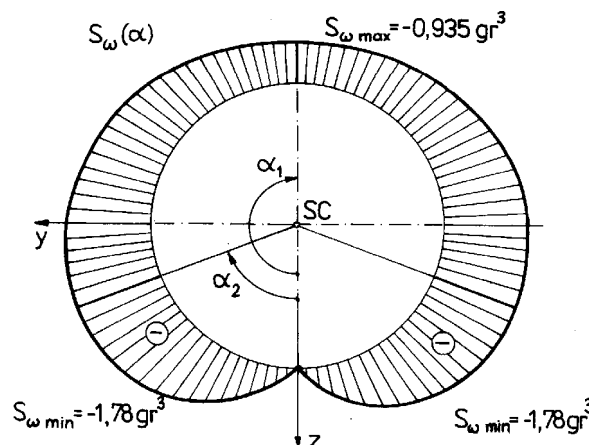
$B = B_{\text{extr}}$. Rozkład naprężeń w obrębie tych przekrojów jest proporcjonalny do wykresu współrzędnej wycinkowej $\omega(\alpha)$ z rys. 13.28. Z tego rysunku odczytujemy, że największe naprężenie występuje w punkcie K, leżącym tuż przy krawędzi rozcięcia. Do obliczeń przyjmujemy zatem, że $B = B_{\text{max}} = B(0) = \mathcal{M}l$, $\omega = \omega_k = \pi r^2$:

$$\sigma_x(x, \omega)_{\text{max}} = \sigma_x(0, \pi r^2) = \frac{\mathcal{M}l}{J_\omega} \cdot \pi r^2 = \frac{3\mathcal{M}l}{gr^3(2\pi^2 - 12)} = 15,5 \frac{\mathcal{M}}{gr^2}.$$

Naprężenia styczne obliczymy w dwóch przekrojach: na lewym końcu pręta ($x = 0$), gdzie $\mathcal{M}_\omega = \mathcal{M}$ i $\mathcal{M}_v = 0$, oraz w połowie rozpiętości pręta ($x = 0,5l$), gdzie $\mathcal{M}_\omega = 0,92 \mathcal{M}$ oraz $\mathcal{M}_v = 0,08 \mathcal{M}$. Na wstępie wyznaczmy funkcję wycinkowego momentu statycznego $S_\omega(c)$. Zamiast zmiennej c przyjmijmy zmienną α :

$$\begin{aligned} S_\omega(\alpha) &= \int_{A_1(\alpha)} \omega(\alpha) dA = \int_0^\alpha r^2 (\alpha - \pi + 2 \sin \bar{\alpha}) gr d\bar{\alpha} = \\ &= gr^3 \left[\frac{1}{2} \bar{\alpha}^2 - \pi \bar{\alpha} - 2 \cos \bar{\alpha} \right]_0^\alpha = gr^3 \left[\frac{\alpha^2}{2} - \pi \alpha + 2(1 - \cos \alpha) \right]. \end{aligned}$$

Wykres funkcji $S_\omega(\alpha)$ przedstawia rys. 13.29.



Rys. 13.29

Ekstremalne naprężenia styczne τ_ω występują w punktach zerowych głównej współrzędnej wycinkowej, czyli tam, gdzie

$$\alpha - \pi + 2 \sin \alpha = 0.$$

W przedziale $\langle 0^\circ, 180^\circ \rangle$ otrzymujemy dwa rozwiązania (por. rys. 13.26):

$$\alpha_1 = \pi = 180^\circ \quad \text{oraz} \quad \alpha_2 \approx 71,7^\circ.$$

Po podstawieniu tych wartości do wyrażenia na $S_\omega(\alpha)$ mamy:

$$S_\omega(\alpha_1) = -0,93 \, g \, r^3, \quad S_\omega(\alpha_2) = -1,78 \, g \, r^3 = S_{\omega \min}.$$

Dla $x = 0$

$$\tau_{xc \min} = \tau_{\omega \min} = \frac{\mathcal{M} S_{\omega \min}}{J_\omega g} = -\frac{1,78 \cdot 3gr^3 \mathcal{M}}{\pi gr^5 (2\pi^2 - 12)g} = -0,22 \frac{\mathcal{M}}{gr^2}.$$

Dla $x = l/2$

$$\tau_{v \text{ ekstr}} = \pm \frac{\mathcal{M}_v}{J_s} \cdot g = \pm \frac{0,08 \mathcal{M} \cdot 3}{2\pi r g^2} = \pm 0,038 \frac{\mathcal{M}}{r g^2}.$$

Ponieważ przyjęliśmy, że $g = r/15$, więc $\tau_{v \min} = -0,57 \mathcal{M} / (gr^2)$, z kolei

$$\tau_{\omega \min} = -0,22 \cdot 0,92 \cdot \frac{\mathcal{M}}{gr^2} = -0,20 \cdot \frac{\mathcal{M}}{gr^2}.$$

Wobec tego $\tau_{xc \min} = \tau_{v \min} + \tau_{\omega \min} = -0,77 \mathcal{M} / (gr^2)$.

Porównanie uzyskanych rezultatów pozwala stwierdzić, że dominującą rolę podczas nieswobodnego skręcania pręta cienkościennego odgrywają naprężenia normalne. Naprężenia styczne mają wartości wielokrotnie mniejsze. Godne uwagi jest również to, że naprężenia τ_v są wyraźnie mniejsze od naprężeń τ_ω .

Na zakończenie porównamy obliczone wyżej naprężenia z wartościami występującymi podczas skręcania swobodnego przekrojów zamkniętego (z) i otwartego (o) (por. p. 12.3.3) dla $r/g = 15$.

$$\begin{aligned} \left| \tau^{(z)} \right|_{\max} &= \frac{\mathcal{M}}{2\pi gr^2} = 0,16 \cdot \frac{\mathcal{M}}{gr^2}, & \sigma_x^{(z)} &= 0, \\ \left| \tau^{(o)} \right|_{\max} &= \frac{3\mathcal{M}}{2\pi r g^2} = 7,16 \cdot \frac{\mathcal{M}}{gr^2}, & \sigma_x^{(o)} &= 0. \end{aligned}$$

W rozważanym zadaniu $|\tau_{\max}| = 0,77 \mathcal{M} / (gr^2)$, $\sigma_x = 15,5 \mathcal{M} / (gr^2)$.

W przekrojach otwartych wprowadzenie płyt uniemożliwiających deplanację wydatnie zwiększyło sztywność skrętną, ale spowodowało wystąpienie znacznych naprężeń normalnych. Warto jeszcze zwrócić uwagę na to, że naprężenia zredukowane w obu przypadkach nie różnią się jednak w istotny sposób. Dla skręcania swobodnego

$$\sigma_{\text{red}}^{(o)} = \sqrt{3} \cdot \tau^{(o)} = \sqrt{3} \cdot 7,16 \cdot \frac{\mathcal{M}}{gr^2} = 12,4 \frac{\mathcal{M}}{gr^2},$$

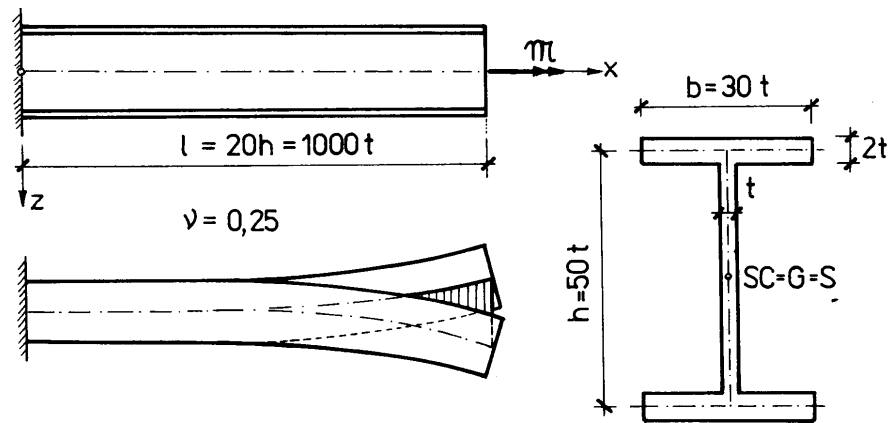
a dla skrępowanego (w punkcie K):

$$\sigma_{\text{red}} = \sigma_x(\omega_k) = 15,5 \frac{\mathcal{M}}{gr^2}.$$

Z powyższego wynika, że podczas skręcania przewaga przekrojów zamkniętych jest niepodważalna. Pręty te wykazują zarówno dużą sztywność, jak i dużą wytrzymałość.

Przykład 2

Wyznaczyć funkcję bimomentu $B(x)$ oraz moment giętno-skrętny $\mathcal{M}_\omega(x)$ podczas skręcania stalowego pręta dwuteowego momentem \mathcal{M} . Lewy koniec pręta jest całkowicie utwierdzony (deplanacja równa się zero), a prawy koniec pręta jest całkowicie swobodny (rys. 13.30).



Rys. 13.30

a. Parametry geometryczne przekroju

Pole $A \approx 2 \cdot 60t^2 + 50t^2 = 170t^2$.

Momenty bezwładności:

$$J_y \approx \frac{t(50t)^3}{12} + 2 \cdot 60 \cdot t^2 \cdot (25t)^2 = 85417t^4,$$

$$J_z \approx 2 \cdot 2t \cdot \frac{(30t)^3}{12} = 9000t^4,$$

$$J_s \approx \frac{1}{3} \cdot \left[2 \cdot (2t)^3 \cdot 30t + t^3 \cdot 50t \right] = 177t^4.$$

Nietrudno się przekonać, że biegun główny S , główny punkt początkowy G i środek ciężkości SC pokrywają się. Sporządzenie wykresu głównych współrzędnych wycinkowych nie nastręcza trudności. Rzędne wykresu (rys. 13.31a) przedstawiają podwójne pola odpowiednich trójkątów; np. współrzędna ω_c przedstawia podwójne pole trójkąta SBC .

Przy wyznaczaniu wykresu wycinkowego momentu statycznego $S_\omega(c)$ należy zwracać uwagę na znaki. Obliczanie S_ω obejmuje myślowo odciętą część przekroju, przy czym całkowanie rozpoczynamy od krawędzi swobodnych. Ostateczny znak regulują stosownie przyjęte granice całkowania. Jeśli S_ω traktujemy jako pole wykresu $\omega(c)$ pomnożone przez grubość ścianki, to przed obliczoną wartością (dodatnią lub ujemną, zależnie od znaku współrzędnej ω) stawiamy dodatkowo znak minus, gdy kierunek całkowania i nie pokrywa się z dodatnim (tj. zgodnym z ruchem wskazówek zegara) kierunkiem współrzędnej c (rys. 13.31b). Na przykład na odcinku CB otrzymujemy:

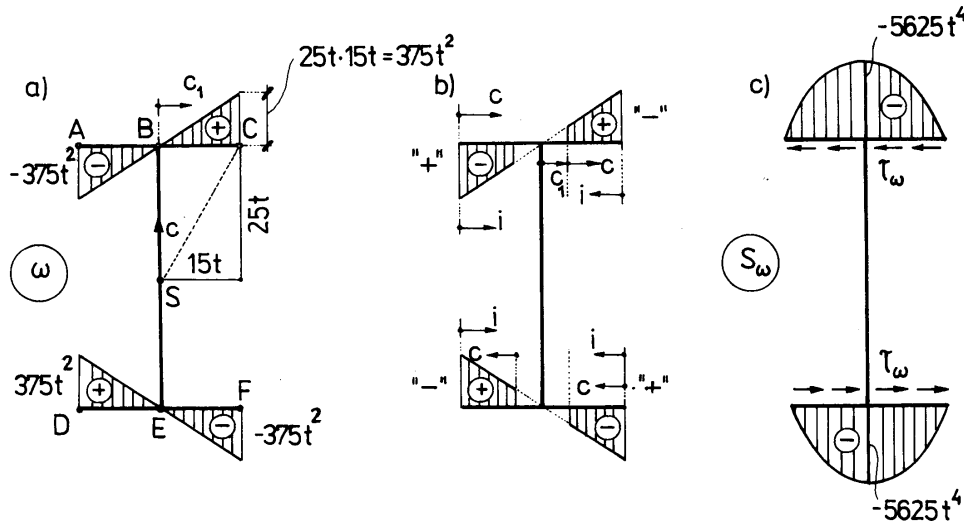
$$S_\omega(c_1) = \int_{15t}^{c_1} \omega(c_1) dA(c_1) = \int_{15t}^{c_1} 25t \cdot c_1 \cdot 2t \cdot dc_1 = 25t^2 c_1^2 - 5625t^4,$$

$$S_\omega(o) = -5625t^4.$$

Ponieważ grubość ścianki jest stała, wartość $S_{\omega}(0)$ można również obliczyć jako pole wykresu $\omega(c)$ odciętej myślowo części przekroju razy grubość ścianki $2t$:

$$S_{\omega}(0) = -375 \cdot t^2 \cdot 15t \cdot \frac{1}{2} \cdot 2t = -5625t^4,$$

przy czym znak minus wynika z niezgodności zwrotów i oraz c . Ostateczny wykres funkcji $S_{\omega}(c)$ przedstawia rys. 13.31c.



Rys. 13.31

Wycinkowy moment bezwładności J_{ω} wyraża wzór:

$$J_{\omega} = \int_A \omega^2 dA = 2t \int_c \omega^2(c) dc,$$

przy czym całkowanie dotyczy obu pasów. Ponieważ $\omega(c)$ jest funkcją liniową, więc można zastosować tutaj całkowanie graficzne (sposób Wiereszczagina):

$$J_{\omega} = 2t \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 375t^2 \cdot 15t \cdot \frac{2}{3} \cdot 375t^2 = 5\,625\,000t^6.$$

b. Równanie różniczkowe kąta skręcania $\psi(x)$

Równanie to jest identyczne z równaniem w przykładzie 1. Odmienne są warunki brzegowe:

$$\begin{aligned} \psi(0) &= 0: & D_1 + D_4 &= 0, \\ \psi'(0) &= 0: & D_2 + \vartheta D_3 &= 0, \\ B(l) = 0, \text{ czyli } \psi''(l) &= 0: & D_3 \sinh(\vartheta l) + D_4 \cosh(\vartheta l) &= 0, \\ \psi'''(l) - \vartheta^2 \cdot \psi'(l) &= -\frac{\mathcal{M}}{E_1 J_{\omega}}: & D_2 &= \frac{\mathcal{M}}{G J_s} = \frac{\psi_0}{l}. \end{aligned}$$

Rozwiązując ten układ otrzymujemy:

$$D_1 = -D_4 = -\frac{\psi_0}{(\vartheta l)} \operatorname{tgh}(\vartheta l), \quad D_2 = \frac{\psi_0}{l}, \quad D_3 = -\frac{\psi_0}{(\vartheta l)}.$$

c. Obliczenie bimomentu i momentu giętno-skrętnego

$$B(x) = E_1 J_\omega \psi''(x) = E_1 J_\omega \vartheta^2 \left[-\frac{\psi_0}{(\vartheta l)} \sinh(\vartheta x) + \frac{\psi_0}{(\vartheta l)} \operatorname{tgh}(\vartheta l) \cosh(\vartheta x) \right] =$$

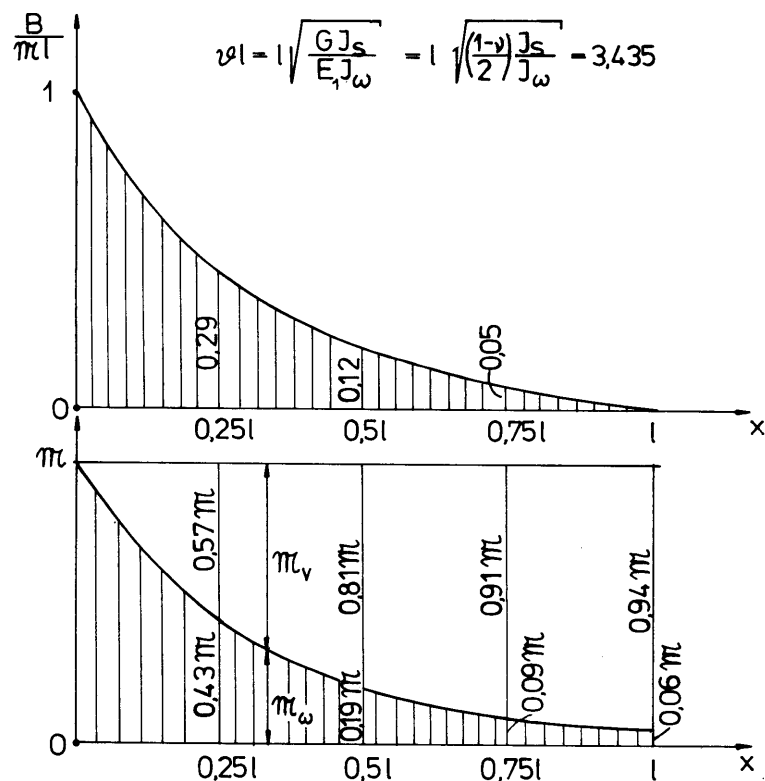
$$= \mathcal{M} \cdot l \frac{\sinh[\vartheta(l-x)]}{(\vartheta l) \cosh(\vartheta l)},$$

$$\mathcal{M}_\omega(x) = -B'(x) = \frac{\cosh[\vartheta(l-x)]}{\cosh(\vartheta l)},$$

$$\mathcal{M}_v(x) = GJ_s \psi'(x) = GJ_s \left[\frac{\psi_0}{l} + \vartheta \left(-\frac{\psi_0}{\vartheta l} \right) \cosh(\vartheta x) + \vartheta \left(-\frac{\psi_0}{\vartheta l} \right) \operatorname{tgh}(\vartheta l) \cdot \sinh(\vartheta x) \right] =$$

$$= \mathcal{M} [1 - \cosh(\vartheta x) - \operatorname{tgh}(\vartheta l) \sinh(\vartheta x)] = \mathcal{M} - \mathcal{M}_\omega(x).$$

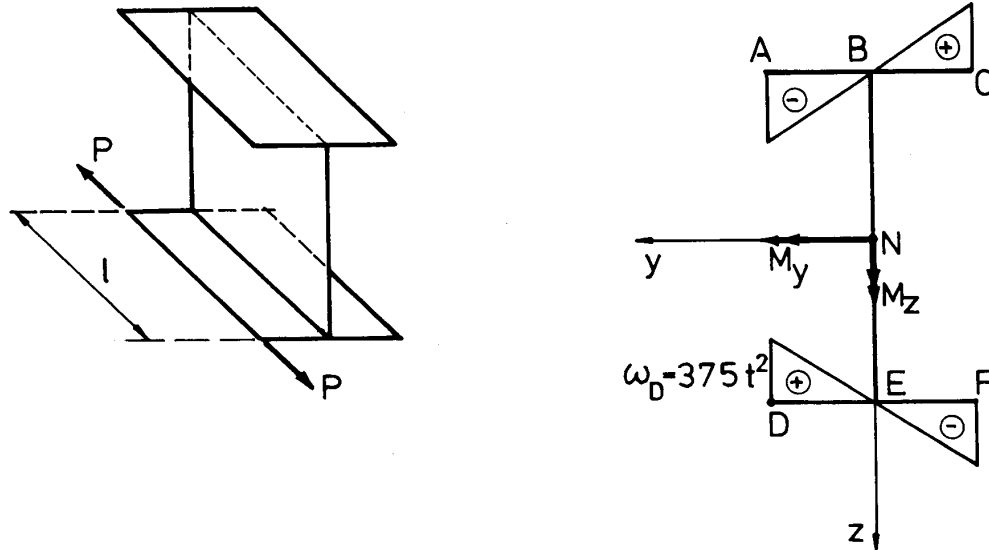
Wykresy $B(x)$, $\mathcal{M}_\omega(x)$ i $\mathcal{M}_v(x)$ podano na rys. 13.32.



Rys. 13.32

Przykład 3

Obliczyć ekstremalne naprężenia normalne i styczne w pręcie dwuteowym obciążonym na płaszczyznach czołowych dwoma podłużnymi siłami skupionymi przyłożonymi na krawędzi pasów (rys. 13.33). Parametry geometryczne przekroju przyjąć z przykładu 2.



Rys. 13.33

Rozwiązanie

W postawionym zadaniu mamy do czynienia z czysto statycznymi warunkami brzegowymi. Standardowe siły wewnętrzne są następujące:

$$\begin{aligned} N(x) &= P = \text{const}, & M_z(x) &= -15 Pt = \text{const}, \\ M_y(x) &= 25 Pt = \text{const}, & \mathcal{M}(x) &= \mathcal{M}_S(x) = 0. \end{aligned}$$

Ponadto znane są brzegowe wartości bimomentu: $B_0 = B(0) = B(l) = P\omega_D = 375t^2P$.

Do określenia funkcji $B(x)$ wykorzystamy równanie różniczkowe (13.50)₁, w którym $\mathcal{M}'_S = m_S = 0$:

$$B''(x) - \vartheta^2 B(x) = 0.$$

Rozwiązaniem tego równania jest funkcja:

$$B(x) = D_1 \sinh(\vartheta x) + D_2 \cosh(\vartheta x).$$

W

wykorzystanie warunków brzegowych prowadzi do zależności:

$$B(0) = B_0: \quad D_2 = B_0,$$

$$B(l) = B_0: \quad D_1 \sinh(\vartheta l) + B_0 \cosh(\vartheta l) = B_0, \text{ skąd } D_1 = \frac{B_0 [1 - \cosh(\vartheta l)]}{\sinh(\vartheta l)}.$$

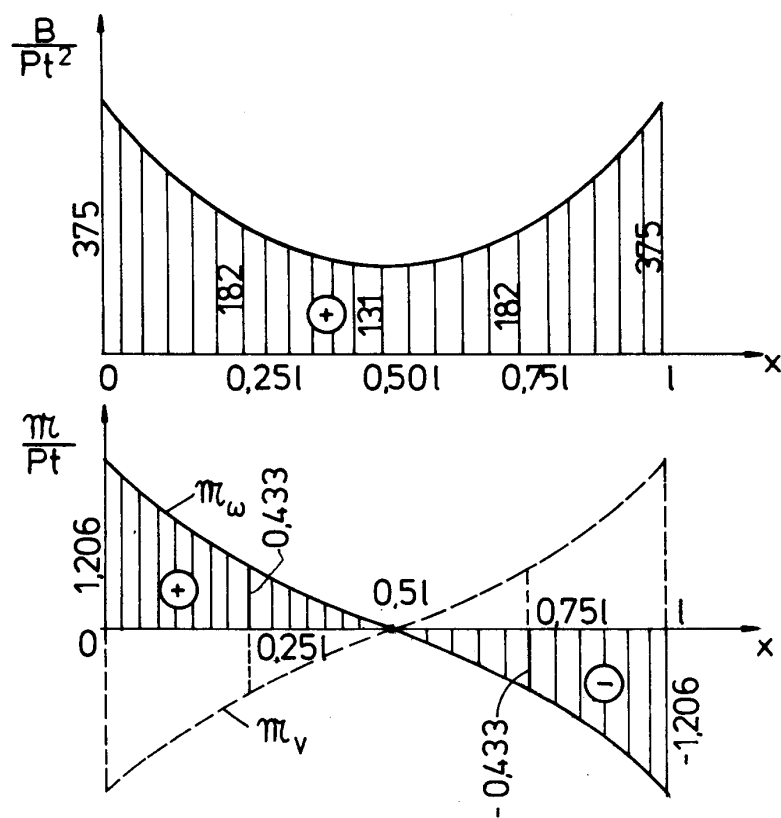
Wobec tego

$$B(x) = B_0 \left[\cosh(\vartheta x) + \frac{1 - \cosh(\vartheta l)}{\sinh(\vartheta l)} \sinh(\vartheta x) \right] = B_0 \frac{\sinh[\vartheta(l-x)] + \sinh(\vartheta x)}{\sinh(\vartheta l)}.$$

Moment giętno-skrętny wyraża funkcja:

$$\mathcal{M}_\omega(x) = -B'(x) = B_0 \cdot \vartheta \frac{\cosh[\vartheta(l-x)] - \cosh(\vartheta x)}{\sinh(\vartheta l)}.$$

Wykresy funkcji $B(x)$ oraz $\mathcal{M}_\omega(x)$ i $\mathcal{M}_v(x)$ przedstawia rys. 13.34.



Rys. 13.34

Ponieważ $\mathcal{M}_S(x) = \mathcal{M}_v(x) + \mathcal{M}_\omega(x) = 0$, więc $\mathcal{M}_v(x) = -\mathcal{M}_\omega(x)$.

Największe naprężenia normalne występują w przekroju $x = 0$. Obliczymy je na podstawie wzoru (13.30):

$$\sigma_x = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{J_z} \cdot y + \frac{M_y}{J_y} \cdot z + \frac{B}{J_\omega} \cdot \omega = \frac{P}{t^2} \cdot \left(\frac{1}{170} + \frac{y}{600t} + \frac{z}{3417t} + \frac{\omega}{15000t^2} \right).$$

Dla punktu A mamy ($y = 15t$, $z = -25t$, $\omega = -375t^2$):

$$\sigma_{xA} = \frac{P}{t^2} \left(\frac{1}{170} + \frac{1}{40} - \frac{1}{137} - \frac{1}{40} \right) = -\frac{P}{706t^2}.$$

Dla punktów C , D i F otrzymujemy kolejno:

$$\sigma_{xC} = \frac{P}{t^2} \left(\frac{1}{170} - \frac{1}{40} - \frac{1}{137} + \frac{1}{40} \right) = -\frac{P}{706t^2},$$

$$\sigma_{xD} = \frac{P}{t^2} \left(\frac{1}{170} + \frac{1}{40} + \frac{1}{137} + \frac{1}{40} \right) = \frac{P}{15,8t^2},$$

$$\sigma_{xF} = \frac{P}{t^2} \left(\frac{1}{170} - \frac{1}{40} + \frac{1}{137} - \frac{1}{40} \right) = -\frac{P}{27,2t^2}.$$

Obliczymy jeszcze naprężenia styczne w przekroju $x = 0$. Największe naprężenia τ_v występują w pasach, bo tam jest największa grubość ścianki:

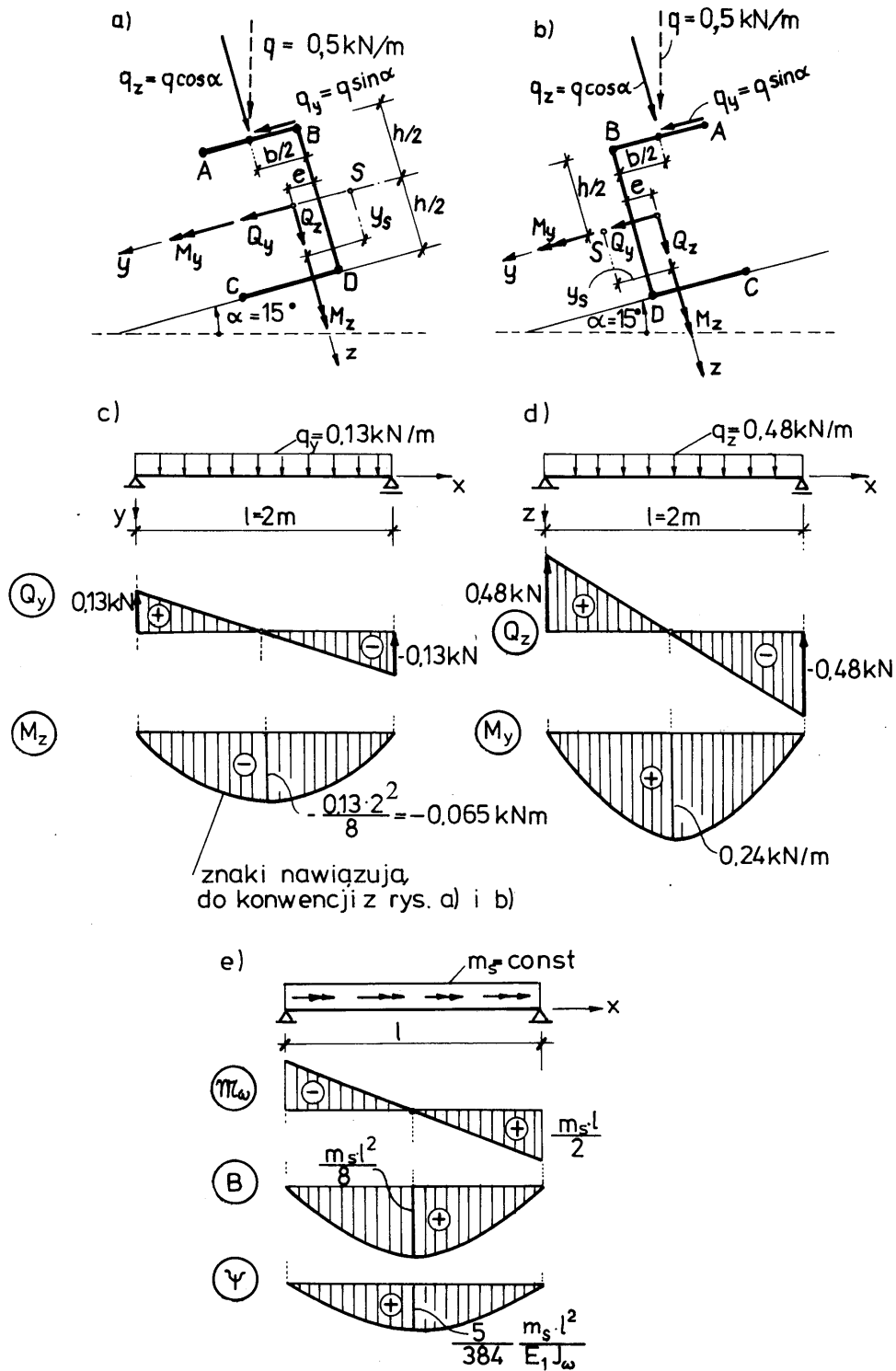
$$\tau_{v \max} = \frac{\mathcal{M}_v}{J_s} \cdot 2t = \frac{1,206Pt \cdot 2t}{177t^4} = \frac{P}{73,4t^2}.$$

Największe wartości bezwzględne naprężeń τ_ω występują również w pasach, gdzie $|S_\omega| = \max$, czyli w punktach B i F :

$$|\tau_\omega|_{\max} = \frac{\mathcal{M}_\omega \cdot S_\omega}{J_\omega \cdot 2t} = \frac{1,206Pt \cdot 5625t^4}{5625000t^6 \cdot 2t} = \frac{P}{1660t^2}.$$

Przykład 4

Obliczyć naprężenia w przekroju ceowym (por. rys. 13.35) dla dwóch przypadków ustawienia belki zobrażowanych na rys. 13.36a i 13.36b. Rozpiętość belki wynosi 2 m. Oba końce belki są podparte wielkowo



Rys. 13.35

Rozwiązanie

a. Parametry geometryczne przekroju (wymiary wg rys. 13.35)

Pole:

$$A = 2 \cdot 5 \cdot 0,06 + 10 \cdot 0,06 = 1,2 \text{ cm}^2 = 1,2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2.$$

Położenie środka ciężkości:

$$e = \frac{0,6 \cdot 2,5}{1,2} = 1,25 \text{ cm} = 1,25 \cdot 10^{-2} \text{ m}.$$

Główne momenty bezwładności:

$$J_y = 0,6 \cdot \frac{10^2}{12} + 0,6 \cdot 1 \cdot 5^2 = 20 \text{ cm}^4 = 20 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4,$$

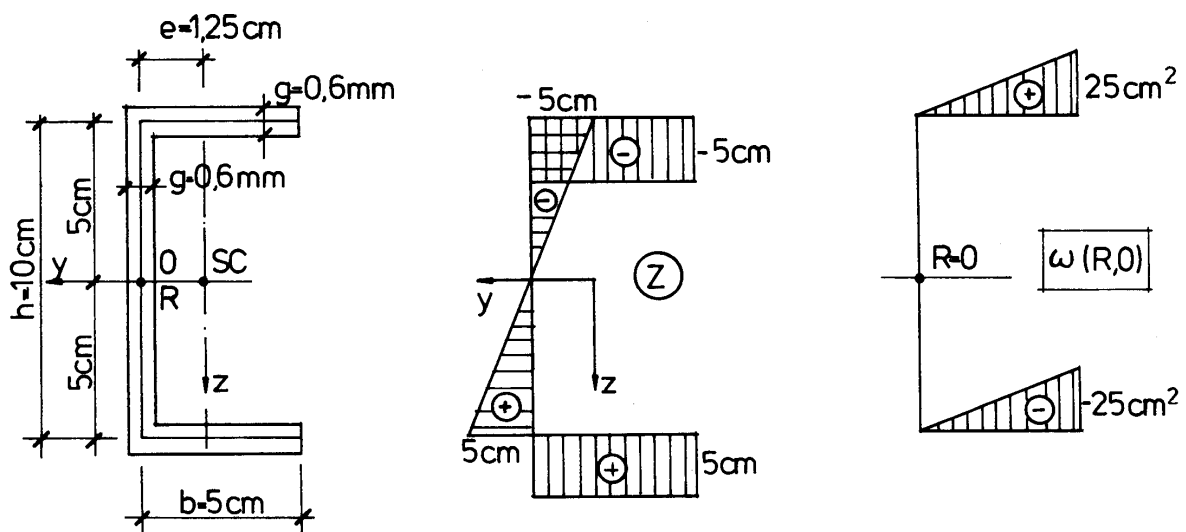
$$J_z = 0,6 \cdot 1,25^2 + 0,6 \cdot \frac{5^2}{12} + 0,6 \cdot 1,25^2 = 3,1 \text{ cm}^4 = 3,1 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$$

Moment bezwładności na skręcanie:

$$J_s = \frac{1}{3} \cdot (10 + 2 \cdot 5) \cdot 0,06^3 = 0,00144 \text{ cm}^4 = 0,00144 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4.$$

Przyjmujemy, że biegun pomocniczy R i punkt początkowy O pokrywają się i leżą w połowie wysokości średnika. Dla tak przyjętego układu wyznaczono pomocnicze współrzędne wycinkowe $\omega(R, 0)$ (rys. 13.35b). Wycinkowy moment odśrodkowy $J_{\omega y} = 0$. Moment wycinkowy $J_{\omega z}$ wyznaczymy sposobem Wierszeczagina przez przemnożenie wykresów $\omega(R, 0)$ i z (rys. 13.35c):

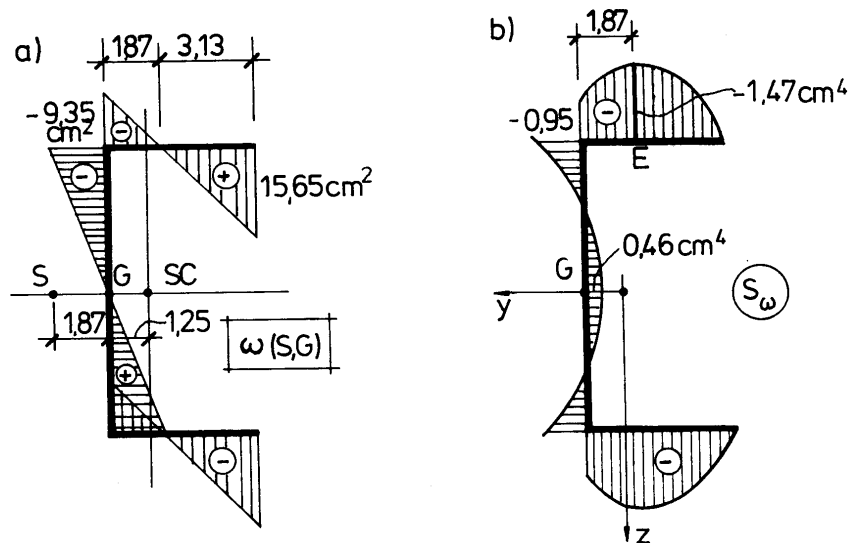
$$J_{\omega z} = \int_A \omega z dA = g \int_C \omega(c) z(c) dc = -0,06 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 25 = -37,5 \text{ cm}^5 = -37,5 \cdot 10^{-10} \text{ m}^5.$$



Rys. 13.36

Położenie środka ścinania określają współrzędne ($y_R = 1,25$ cm, $z_R = 0$):

$$y_S = y_R - \frac{J_{\omega z}}{J_y} = 1,25 + \frac{37,5}{20} = 3,12 \text{ cm} = 3,12 \cdot 10^{-2} \text{ m}, \quad z_S = z_R + \frac{J_{\omega y}}{J_z} = 0.$$



Rys. 13.37

Na rysunku 13.37a przedstawiono wykres głównych współrzędnych wycinkowych $\omega(S, G)$. Główny punkt początkowy pokrywa się z uprzednio przyjętym punktem O , co łatwo zauważyć, gdyż

$$\int_A \omega dA = S_\omega = 0.$$

Wykres wycinkowego momentu statycznego $S_\omega(c)$ podano na rys. 13.37b. Wykres ten składa się z paraboli, a ekstremalne wartości osiąga w punktach zerowych.

Wycinkowy moment bezwładności J_ω obliczymy również metodą całkowania graficznego. W tym celu przemnożymy przez siebie wykres $\omega(S, G)$:

$$\begin{aligned} J_\omega &= \int_A \omega^2 dA = t \int_c \omega \cdot \omega \cdot dc = \\ &= 2 \cdot 0,06 \cdot \left[\frac{9,35 \cdot 5}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 9,35 + \frac{9,35 \cdot 1,8}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 9,35 + \frac{15,65 \cdot 3,13}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 15,65 \right] = \\ &= 0,12 \cdot (145,7 + 54,5 + 255,5) = 54,7 \text{ cm}^6 = 54,7 \cdot 10^{-12} \text{ m}^6. \end{aligned}$$

Współczynnik

$$\vartheta l = l \cdot \sqrt{\frac{GJ_s}{E_1 J_\omega}} = l \cdot \sqrt{\frac{(1-\nu)J_s}{2 \cdot J_\omega}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{(1-0,25) \cdot 0,00144 \cdot 10^{-8}}{1 \cdot 54,7 \cdot 10^{-12}}} = 0,63.$$

b. Obliczenie sił wewnętrznych

Obciążenie q jest przyłożone w połowie szerokości półki b . Z rysunku 13.35 odczytujemy:

$$q_y = q \cdot \sin \alpha = 0,13 \text{ kN/m},$$

$$q_z = q \cdot \cos \alpha = 0,48 \text{ kN/m}.$$

Poza tym występuje równomiernie rozłożony zewnętrzny moment skręcający względem bieguna głównego (środka ścinania):

– w przypadku a :

$$m_S = q_y \cdot \frac{h}{2} + q_z \left(\frac{b}{2} - e + y_S \right) = 0,13 \cdot \frac{0,1}{2} + 0,43 \left(\frac{0,05}{2} - 0,0125 + 0,0312 \right) = \\ = 0,0065 + 0,021 = 0,0275 \text{ kN} \cdot \text{m} / \text{m}.$$

– w przypadku b :

$$m_S = q_y \cdot \frac{h}{2} - q_z \left(\frac{b}{2} - e + y_S \right) = 0,0065 - 0,021 = -0,0145 \text{ kN} \cdot \text{m} / \text{m}.$$

Funkcje $B(x)$ i $\mathcal{M}_\omega(x)$ obliczymy po rozwiązaniu równania różniczkowego (13.49) na kąt skręcenia $\psi(x)$. Gdy współczynnik ϑl jest dostatecznie mały, równanie to, można znacznie uprościć, przyjmując, że $GJ = 0$. Mnożnik GJ_s pomija się, jeżeli (por. Bielajew, [3]):

- dla dwustronnego podparcia widelkowego ($\psi = \psi'' = 0$), $\vartheta l < 0,75$,
- dla obustronnego pełnego utwierdzenia ($\psi = \psi' = 0$), $\vartheta l < 1,50$,
- dla jednego końca swobodnego, a drugiego w pełni utwierdzonego $\vartheta l < 0,50$.

W naszym zadaniu $\vartheta l = 0,63 < 0,75$. Przyjmujemy zatem uproszczoną postać równania (13.50)₂:

$$E_1 J_\omega \psi^{IV} = m_S(x).$$

Całkowanie tego równania jest bardzo proste i przebiega identycznie jak całkowanie równania różniczkowego linii ugięcia:

$$EJ w^{IV} = q(x).$$

Warunki brzegowe w naszym zadaniu ($\psi(0) = \psi(l) = 0$, $\psi''(0) = \psi''(l) = 0$) odpowiadają warunkom dla belki swobodnie podpartej: $w(0) = w(l) = 0$, oraz

$w''(0) = w''(l) = 0$. Dzięki tej analogii możemy sporządzić wykresy $B(x)$, $\mathcal{M}_\omega(x)$ oraz $\psi(x)$ bez dodatkowych obliczeń (por. rys. 13.36e).

c. Obliczenie naprężeń

Największe naprężenia normalne występują w połowie rozpiętości:

$$\sigma_x = -\frac{M_z}{J_z} \cdot y + \frac{M_y}{J_y} \cdot z + \frac{B}{J_\omega} \cdot \omega,$$

przy czym

$$M_z(l/2) = -0,65 \text{ kN} \cdot \text{m}, \quad M_y(l/2) = 0,24 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

W przypadku a :

$$B\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{m_S \cdot l^2}{8} = \frac{0,0275 \cdot 2^2}{8} = 0,0138 \text{ kN} \cdot \text{m}^2.$$

W przypadku b :

$$B\left(\frac{l}{2}\right) = -\frac{0,0145 \cdot 2^2}{8} = -0,0073 \text{ kN} \cdot \text{m}^2.$$

Obliczymy naprężenia normalne w punktach A , B , C i D .

Przypadek a

$$\sigma_x = \frac{0,065}{3,1 \cdot 10^{-8}} \cdot y + \frac{0,24}{20 \cdot 10^{-8}} \cdot z + \frac{0,0138}{54,7 \cdot 10^{-12}} \cdot \omega = \\ = 2097000 y + 1200000 z + 252300000 \omega.$$

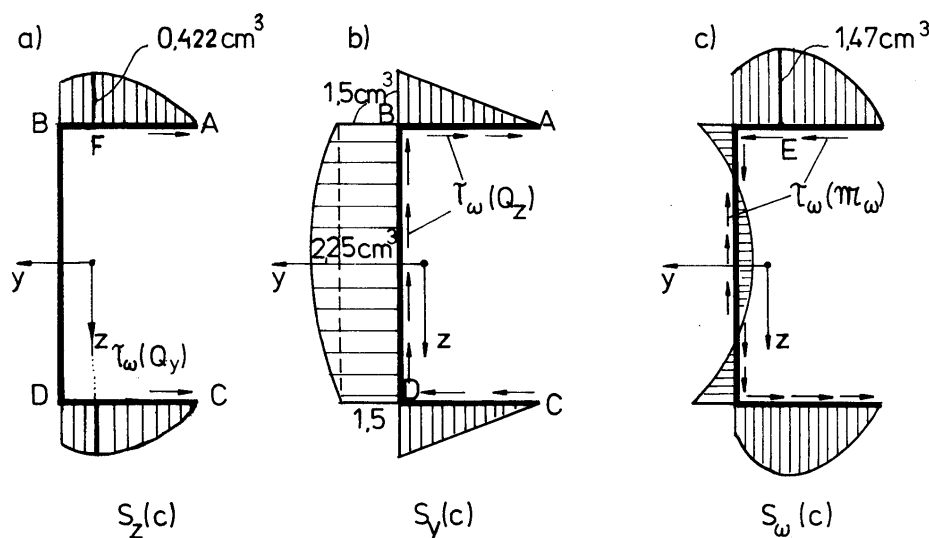
- Punkt A ($y = 0,0375 \text{ m}$, $z = -0,05 \text{ m}$, $\omega = -0,001565 \text{ m}^2$):
 $\sigma_x = 78640 - 60000 - 394830 = -376200 \text{ kN/m}^2$.
- Punkt B ($y = -0,0125 \text{ m}$, $z = -0,05 \text{ m}$, $\omega = -0,000935 \text{ m}^2$):
 $\sigma_x = -26210 - 60000 + 235620 = 149410 \text{ kN/m}^2$.
- Punkt C ($y = 0,0375 \text{ m}$, $z = 0,05 \text{ m}$, $\omega = 0,001565 \text{ m}^2$):
 $\sigma_x = 78640 + 60000 + 394830 = 533470 \text{ kN/m}^2$.
- Punkt D ($y = -0,0125 \text{ m}$, $z = 0,05 \text{ m}$, $\omega = 0,000935 \text{ m}^2$):
 $\sigma_x = -26210 + 60000 - 235620 = -331640 \text{ kN/m}^2$.

Przypadek b

$$\sigma_x = 2097000 \cdot y + 1200000 \cdot z - 133455000 \cdot \omega$$

- Punkt A ($y = -0,0375 \text{ m}$, $z = -0,05 \text{ m}$, $\omega = 0,001565 \text{ m}^2$):
 $\sigma_x = -78640 - 60000 - 208860 = -347500 \text{ kN/m}^2$.
- Punkt B ($y = 0,0125 \text{ m}$, $z = -0,05 \text{ m}$, $\omega = -0,000935 \text{ m}^2$):
 $\sigma_x = 26210 - 60000 + 124780 = 90990 \text{ kN/m}^2$.
- Punkt C ($y = -0,0375 \text{ m}$, $z = 0,05 \text{ m}$, $\omega = -0,001565 \text{ m}^2$):
 $\sigma_x = -78640 + 60000 - 208860 = -227500 \text{ kN/m}^2$.
- Punkt D ($y = 0,0125 \text{ m}$, $z = 0,05 \text{ m}$, $\omega = 0,000935 \text{ m}^2$):
 $\sigma_x = 26210 + 60000 - 124780 = -38570 \text{ kN/m}^2$.

Porównanie naprężeń w obu przypadkach jest bardzo pouczające. Stwierdzamy, że odpowiednie ustawienie belki ceowej daje dużą redukcję naprężeń. Najlepiej byłoby tak przyłożyć obciążenie zewnętrzne, by wypadkowa sił obciążających przechodziła przez środek ścinania. Wówczas $m_S = 0$, $B = 0$, $M_\omega = 0$, a wszystkie dodatkowe naprężenia charakterystyczne dla pręta cienkościennego są równe zero.



Rys. 13.38

Obliczenie naprężeń stycznych τ_v pominiemy, gdyż założyliśmy, że $GJ_s = 0$. Poprzestaniemy jedynie na analizie naprężeń τ_ω dla przypadku *b*. Stosownie do wzoru (13.43), w którym jest uwzględniona zależność (13.36)₂, mamy:

$$\tau_\omega = -\frac{Q_y \cdot S_z(c)}{J_z \cdot g(c)} - \frac{Q_z \cdot S_y(c)}{J_y \cdot g(c)} + \frac{\mathcal{M}_\omega \cdot S_\omega(c)}{J_\omega \cdot g(c)}.$$

Z wykresów sił Q_y , Q_z i momentu \mathcal{M}_ω wynika, że ekstremalne naprężenia występują w przekrojach podporowych. Rozkład naprężeń stycznych będących składnikami wzoru na τ_ω ilustruje rys. 13.38. Jak widać, znalezienie ekstremalnych naprężeń stycznych τ_ω jest dość skomplikowane. Dla orientacji obliczymy tylko największe wartości poszczególnych składników:

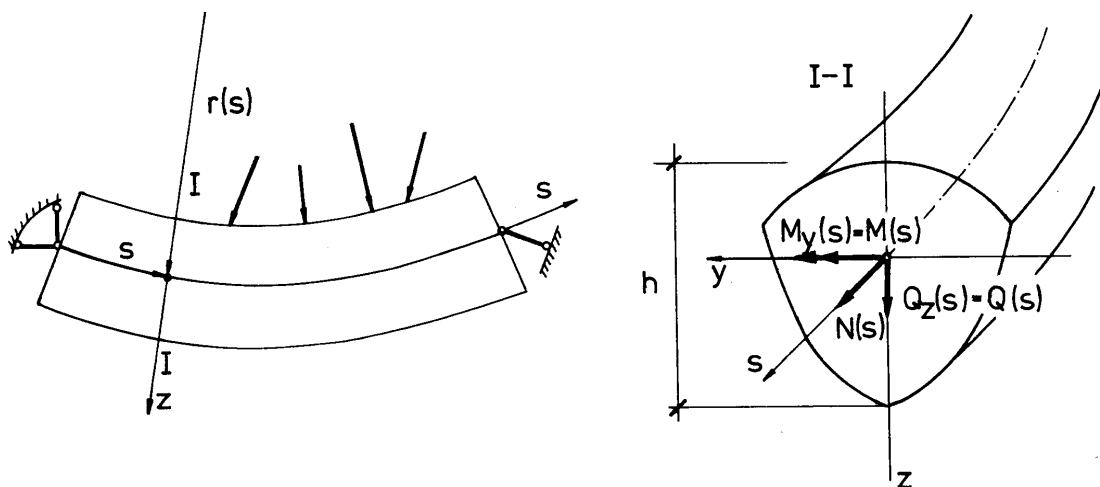
$$\begin{aligned} \max |\tau_\omega(Q_y)| &= \frac{0,13 \cdot 0,422 \cdot 10^{-6}}{3,1 \cdot 10^{-8} \cdot 0,006} = 296 \text{ kN / m}^2, \\ \max |\tau_\omega(Q_z)| &= \frac{0,48 \cdot 2,25 \cdot 10^{-6}}{20 \cdot 10^{-8} \cdot 0,006} = 900 \text{ kN / m}^2, \\ \max |\tau_\omega(\mathcal{M}_\omega)| &= \frac{0,0145 \cdot 2 \cdot 1,47 \cdot 10^{-8}}{2 \cdot 54,7 \cdot 10^{-12} \cdot 0,006} = 650 \text{ kN / m}^2. \end{aligned}$$

Obliczone wartości są bardzo małe. Dlatego wyznaczanie naprężeń stycznych zazwyczaj pomijamy.

13.3. PRĘTY SILNIE ZAKRZYWIONE

13.3.1. Definicje

Prętem zakrzywionym nazywamy pręt, którego oś jest krzywą płaską lub przestrzenną. Pręty zakrzywione dzielimy na słabo i silnie zakrzywione. Rozgraniczenie to wynika stąd, że rozkład odkształceń w obrębie przekroju prętów silnie zakrzywionych odbiega w istotny sposób od rozkładu liniowego przyjmowanego w prętach prostych i słabo zakrzywionych. Miarą zakrzywienia jest stosunek h/r , gdzie h oznacza wymiar poprzeczny pręta, a r początkowy promień krzywizny pręta nieodkształconego.



Rys. 13.39

Rozważymy jeszcze zmianę krzywizny osi pręta

$$k = \frac{1}{r_a} - \frac{1}{r},$$

gdzie $1/r_a$ jest krzywizną aktualną, a $1/r$ – krzywizną pierwotną osi pręta. Umawiamy się, że dodatnia zmiana krzywizny odpowiada powiększeniu krzywizny pierwotnej. Aktualny promień krzywizny określimy na podstawie rys. 13.40:

$$r_a = \frac{ds(0) + du_s(0)}{d\varphi + \Delta d\varphi} = \frac{ds(0)(1 + \lambda)}{d\varphi(1 + r\eta)} = r \frac{1 + \lambda}{1 + r\eta}.$$

Wobec powyższego

$$k = \frac{1}{r} \cdot \frac{1 + \eta r}{1 + \lambda} - \frac{1}{r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{r\eta - \lambda}{1 + \lambda}.$$

Ponieważ rozważamy małe odkształcenia, więc $1 + \lambda \approx 1$, skąd

$$k = \frac{r\eta - \lambda}{r}, \quad (13.54)$$

gdzie

$$\eta = \frac{\Delta d\varphi}{ds(0)} = \frac{\Delta d\varphi}{rd\varphi} \quad \text{i} \quad \lambda = \varepsilon_s(0).$$

Po uwzględnieniu zależności (13.54) we wzorze na $\varepsilon_s(z)$ otrzymujemy ostatecznie

$$\varepsilon_s(z) = \lambda + k \cdot \frac{r \cdot z}{r + z}. \quad (13.55)$$

Uzyskana wyżej zależność dowodzi, że rozkład odkształceń na wysokości przekroju jest nieliniowy (hiperboliczny). Jeśli z/r jest małe w porównaniu z jednością, to

$$\varepsilon_s(z) = \lambda + k \frac{z}{1 + (z/r)} \approx \lambda + z \cdot k,$$

co pokrywa się ze wzorem na $\varepsilon_x(z)$ w przecie prostym.

13.3.3. Wyznaczanie naprężeń

Poprzestaniemy jedynie na obliczeniu naprężeń normalnych $\sigma_s(z)$, odpowiadających odkształceniu $\varepsilon_s(z)$. Dla naprężeń stycznych τ_{sz} i τ_{sy} przyjmujemy, że wystarczająco dokładne są znane wzory dla pręta o osi prostoliniowej. W odniesieniu do pozostałych naprężeń normalnych σ_z i σ_y założymy na razie, że są one równe zeru, a poszukiwane naprężenia σ_s obliczymy z równania fizycznego:

$$\sigma_s(z) = E\varepsilon_s(z) = E\lambda + Ek \frac{r \cdot z}{r + z}. \quad (13.56)$$

Definicje sił wewnętrznych N i M mają postać:

$$N = \int_A \sigma_s dA \quad \text{i} \quad M = M_y = \int_A \sigma_s z dA.$$

Obliczymy najpierw moment zginający:

$$M = E \int_A \left(\lambda + k \frac{r z}{r + z} \right) z dA = E \lambda \int_A z dA + E k \int_A \frac{r z^2}{r + z} dA.$$

Pierwsza całka przedstawia moment statyczny całego przekroju względem osi środkowej S_y ; jest więc równa zero. Druga całka jest zmodyfikowanym momentem bezwładności przekroju względem osi y .

Moment ten oznaczmy przez J_y^* lub krócej przez J^* :

$$J_y^* = J^* = r \int_A \frac{z^2}{r + z} dA. \quad (13.57)$$

Jeżeli z/r jest małe w stosunku do jedności, to $J_y^* \approx J_y$.

Po uwzględnieniu wzoru (13.57) otrzymujemy zależność między momentem zginającym a zmianą krzywizny k :

$$M = E J^* k. \quad (13.58)$$

Obliczymy teraz siłę normalną N :

$$\begin{aligned} N &= \int_A \sigma_s dA = E \int_A \left(\lambda + k \frac{r z}{r + z} \right) dA = E A \lambda + E k \int_A \frac{z(r + z - z)}{r + z} dA = \\ &= E A \lambda + E k \left[\int_A z dA - \frac{1}{r} \int_A \frac{r z^2}{r + z} dA \right]. \end{aligned}$$

Pierwsza całka równa się zero, natomiast druga wynosi J_y^* / r , skąd

$$N = E A \lambda - E J_y^* \frac{k}{r}. \quad (13.59)$$

Ze wzorów (13.58) i (13.59) obliczymy zmianę krzywizny k oraz wydłużenie λ :

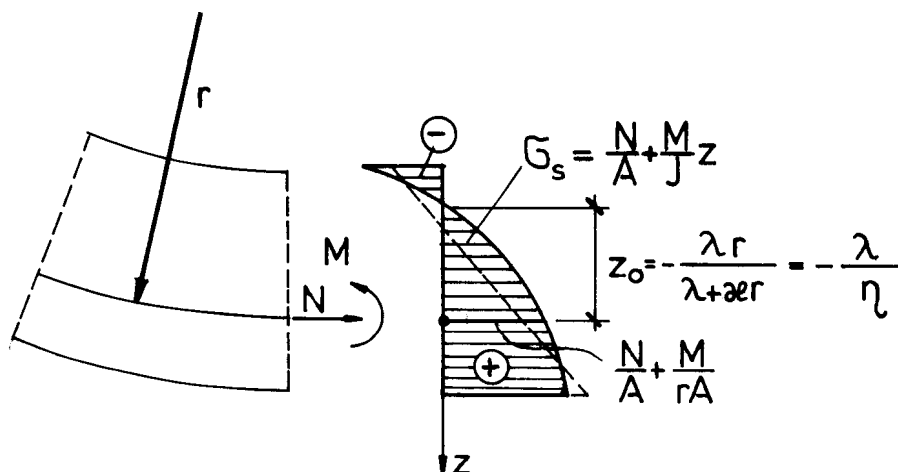
$$k = \frac{M_y}{E J_y^*}, \quad \lambda = \frac{N}{E A} + \frac{M_y}{r E A}, \quad (13.60)$$

co po podstawieniu do zależności (13.56) daje wzór na naprężenia normalne:

$$\sigma_s(z) = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{r A} + \frac{M_y}{J_y^*} \frac{r z}{r + z}. \quad (13.61)$$

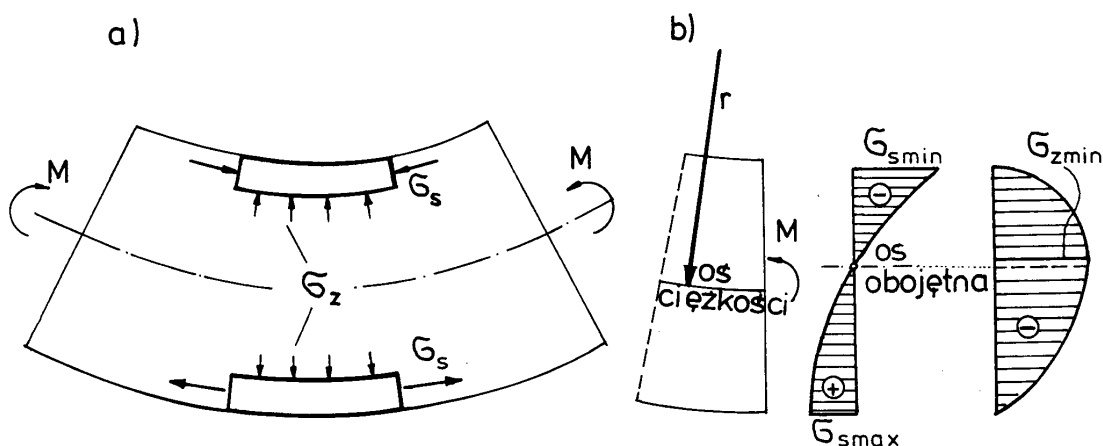
Wykres naprężeń $\sigma_s(z)$ przedstawia rys. 13.41.

Z zależności (13.60) widać, że przy czystym zginaniu ($M = \text{const}$, $N = 0$) obok zmiany krzywizny k występuje również wydłużenie osi pręta $\lambda = M/(rEA)$. Towarzyszy temu przesunięcie osi obojętnej w kierunku środka krzywizny pręta oraz pojawienie się naprężeń normalnych w środku ciężkości $\sigma_s(0) = M/(rA)$. Zjawiska te są charakterystyczne dla prętów silnie zakrzywionych. Trzeba dodać, że hiperboliczny rozkład naprężeń $\sigma_s(z)$ daje wyniki tylko nieznacznie różniące się od wartości ścisłych.



Rys. 13.41

Powróćmy jeszcze do promieniowych naprężeń normalnych σ_z . Z rysunku 13.42a wnioskujemy, że równowaga zakrzywionych elementów leżących we włóknaх ściskanych i rozciąganych wymaga pojawienia się naprężeń $\sigma_z(z)$. Jeżeli moment zginający jest dodatni, tak jak na rys. 13.42, to naprężenia promieniowe są zawsze ujemne (ściskające). Rozkład tych naprężeń na wysokości przekroju ilustruje rys. 13.42b. Największa bezwzględna wartość σ_z wypada w pobliżu osi obojętnej. Przykładowo, w przekroju prostokątnym dla $r/h = 0,4$ $\sigma_{z \min} = 0,05 \sigma_{s \min}$, a dla $r/h = 1$ naprężenie $\sigma_{z \min} = 0,19 \sigma_{s \min}$ (por. Timoshenko, Goodier [49], str. 72).



Rys. 13.42

13.3.4. Zależności energetyczne

W prętach silnie zakrzywionych ściśle wyrażenie energii przez siły wewnętrzne i wielkości kinematyczne natrafia na pewne trudności (por. np. *Huber* [17], cz. III). Przekonamy się o tym, rozpisując całkę:

$$\int_A \sigma_s \varepsilon_s dA = \int_A \sigma_s \left(\lambda + k \frac{r z}{r + z} \right) dA = \lambda \int_A \sigma_s dA + k \int_A \frac{\sigma_s z r}{r + z} dA.$$

Pierwsza całka przedstawia siłę normalną N , natomiast druga nie ma odpowiednika w znanych definicjach sił wewnętrznych.

Możemy jednak odwołać się do poznanych już wcześniej faktów. Wiemy, że siła normalna N wykonuje pracę na przyroście wydłużenia osi $du_s(0) = \lambda ds$, a moment zginający M na przyroście kąta obrotu przekroju $\Delta d\varphi = \eta ds$. Wobec tego można przyjąć, że

$$\int_S \left[\int_A \sigma_s \cdot \varepsilon_s \right] dA ds = \int_S (N\lambda + M\eta) ds, \quad (13.62)$$

gdzie stosownie do wzoru (13.54):

$$\eta = k + \frac{\lambda}{r}.$$

Zależność (13.62) jest słuszna dla dowolnego materiału. W przypadku pręta liniowo-sprężystego możemy zbudować funkcje energii sprężystej właściwej $W_\sigma(N, M)$ i $W_\varepsilon(\lambda, \eta)$ wykazujące własności potencjału. Funkcje te pozwalają określić energie całkowite U_σ oraz U_ε :

$$\left. \begin{aligned} U_\sigma &= \int_s W_\sigma(N, M) ds, \\ U_\varepsilon &= \int_s W_\varepsilon(\lambda, \eta) ds. \end{aligned} \right\} \quad (13.63)$$

Jeśli w równaniach (13.62) uwzględnimy, że

$$\lambda = \frac{1}{E} \left(\frac{N}{A} + \frac{M}{rA} \right) \quad \text{oraz} \quad \eta = k + \frac{\lambda}{r} = \frac{1}{E} \cdot \left(\frac{M}{J^*} + \frac{N}{Ar} + \frac{M}{Ar^2} \right),$$

to otrzymamy:

$$\begin{aligned} W_\sigma(N, M) &= \frac{1}{2} \int_A \sigma_s \cdot \varepsilon_s(\sigma_s) dA = \frac{1}{2} \cdot [N \cdot \lambda(N, M) + M \cdot \eta(N, M)] = \\ &= \frac{N}{2E} \left(\frac{N}{A} + \frac{M}{rA} \right) + \frac{M}{2E} \left(\frac{M}{J^*} + \frac{N}{Ar} + \frac{M}{Ar^2} \right). \end{aligned}$$

Po uporządkowaniu

$$W_{\sigma}(N, M) = \frac{N^2}{2EA} + \frac{NM}{EAr} + \frac{M^2}{2EAr^2} + \frac{M^2}{2EJ^*} = \frac{1}{2EA} \left(N + \frac{M}{r} \right)^2 + \frac{M^2}{2EJ^*} > 0. \quad (13.64)$$

Nietrudno sprawdzić, że istotnie funkcja $W_{\sigma}(N, M)$ jest potencjałem dla wielkości kinematycznych λ i η :

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_{\sigma}}{\partial N} &= \frac{N}{EA} + \frac{M}{EAr} = \lambda, \\ \frac{\partial W_{\sigma}}{\partial M} &= \frac{M}{EJ^*} + \frac{M}{EAr^2} + \frac{N}{EAr} = \eta. \end{aligned}$$

Podobnie znajdziemy funkcję $W_{\varepsilon}(\lambda, \eta)$:

$$\begin{aligned} W_{\varepsilon}(\lambda, \eta) &= \frac{1}{2} [N(\lambda, \eta) \cdot \lambda + M(\lambda, \eta) \cdot \eta] = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[EA\lambda - \frac{EJ^*}{r} \cdot k(\lambda, \eta) \right] \cdot \lambda + \frac{1}{2} EJ^* \cdot k(\lambda, \eta) \cdot \eta = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[EA\lambda - \frac{EJ^*}{r} \left(\eta - \frac{\lambda}{r} \right) \right] \cdot \lambda + \frac{1}{2} EJ^* \left(\eta - \frac{\lambda}{r} \right) \cdot \eta. \end{aligned}$$

Po uporządkowaniu otrzymujemy ostatecznie

$$W_{\varepsilon}(\lambda, \eta) = \frac{1}{2} EA\lambda^2 + \frac{1}{2} EJ^* \left(\eta - \frac{\lambda}{r} \right)^2 > 0. \quad (13.65)$$

Zbadamy jeszcze, czy funkcja W_{ε} jest potencjałem dla sił wewnętrznych N i M :

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_{\varepsilon}}{\partial \lambda} &= EA\lambda - EJ^* \cdot \left(\eta - \frac{\lambda}{r} \right) \cdot \frac{1}{r} = EA\lambda - EJ^* \frac{k}{r} = N, \\ \frac{\partial W_{\varepsilon}}{\partial \eta} &= EJ^* \left(\eta - \frac{\lambda}{r} \right) = EJ^* \cdot k = M. \end{aligned}$$

Zwracamy uwagę na to, że obie funkcje energii W_{σ} i W_{ε} są zawsze dodatnie. Spełniają więc wymagania stawiane funkcjom wyrażającym energię sprężystą właściwą. Rolę uogólnionych naprężeń odgrywają tu siły wewnętrzne N i M , a rolę uogólnionych odkształceń wielkości kinematyczne λ i η .

W przypadku uwzględnienia wpływu sił poprzecznych w równaniach (13.62), (13.64) i (13.65) pojawia się dodatkowe człony omówione w rozdziale 4:

$$\int_s \left[\int_A \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dA \right] ds = \int_s (N\lambda + M\eta + Q\beta) ds, \quad (13.66)$$

$$W_{\sigma}(N, M, Q) = \frac{N^2}{2EA} + \frac{NM}{EAr} + \frac{M^2}{2EAr^2} + \frac{M^2}{2EJ^*} + \frac{Q^2}{2(GA/k)}, \quad (13.67)$$

$$W_{\varepsilon}(\lambda, \eta, \beta) = \frac{1}{2} EA\lambda^2 + \frac{1}{2} EJ^* \left(\eta - \frac{\lambda}{r} \right)^2 + \frac{1}{2} (GA/k) \beta^2, \quad (13.68)$$

gdzie Q jest siłą poprzeczną, G – modułem ścinania, a β – średnim kątem odkształcenia postaciowego.

13.3.5. Przykład

Obliczyć naprężenia normalne w przekroju I–I sprężystego pręta silnie zakrzywionego. Przekrój pręta jest prostokątem o szerokości b i wysokości h , a oś pręta jest łukiem kołowym o promieniu r (rys. 13.43a). Siły wewnętrzne w przekroju I–I:

$$N = P, \quad M = -P \cdot r (1 - \cos \varphi_0), \quad 0^\circ \leq \varphi_0 \leq 90^\circ.$$

Naprężenia styczne są równe zeru, a naprężenia normalne $\sigma_s(z)$ obliczamy ze wzoru:

$$\sigma_s(z) = \frac{P}{A} - \frac{Pr(1 - \cos \varphi_0)}{Ar} - \frac{Pr(1 - \cos \varphi_0)rz}{J^* \cdot (r + z)} = \frac{P}{A} \cdot \cos \varphi_0 - \frac{Pr^2(1 - \cos \varphi_0)}{J^* \cdot (r + z)} \cdot z.$$

Pole przekroju A wynosi bh , a zmodyfikowany moment bezwładności J^* określa całka:

$$J^* = \int_A \frac{r \cdot z^2}{r + z} dA = rb \int_{-h/2}^{h/2} \frac{z^2 dz}{r + z} = br^2 \cdot \left(r \cdot \ln \left| \frac{2r + h}{2r - h} \right| - h \right).$$

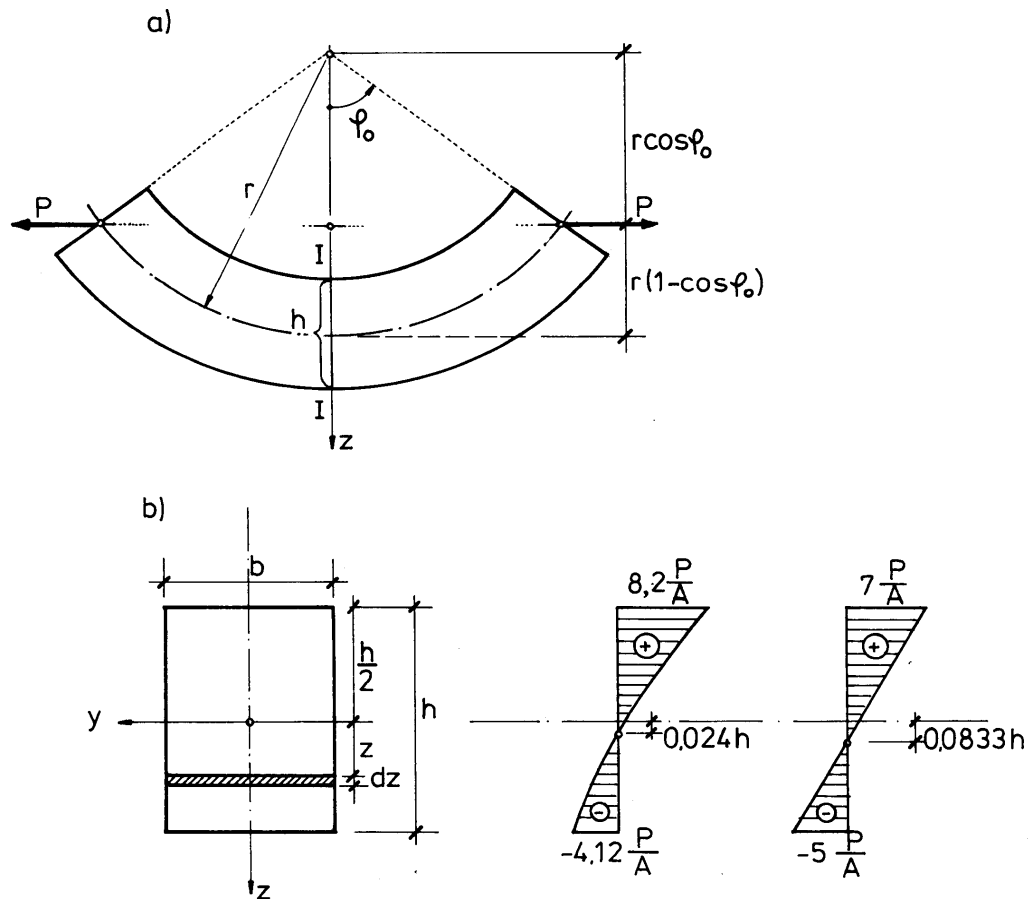
Wartości J^* dla dowolnych kształtów przekroju wyznacza się najczęściej w sposób przybliżony, przez rozwinięcie wyrażenia podcałkowego w szereg potęgowy:

$$(a) \quad J^* = \int_A \frac{r \cdot z^2}{r + z} dA = \int_A \frac{z^2}{1 + \frac{z}{r}} dA = \int_A z^2 \cdot \left[1 - \frac{z}{r} + \left(\frac{z}{r} \right)^2 - \left(\frac{z}{r} \right)^3 + \dots \right] dA.$$

Dla przekroju prostokątnego uzyskujemy wyrażenie:

$$(b) \quad \begin{aligned} J^* &= b \int_{-h/2}^{h/2} \left(z^2 + \frac{z^4}{r^2} + \frac{z^6}{r^4} + \dots \right) dz = \\ &= \frac{bh^3}{12} \cdot \left[1 + \frac{3}{20} \left(\frac{h}{r} \right)^2 + \frac{3}{112} \left(\frac{h}{r} \right)^4 + \frac{1}{192} \left(\frac{h}{r} \right)^6 + \dots \right] = J\mu(\chi) \end{aligned}$$

gdzie $\chi = h/r$.



Rys. 13.43

Zbieżność tego szeregu jest tym szybsza, im mniejsza jest wartość stosunku h/r . Na przykład dla $h/r = 1$ cztery wyrazy szeregu dają wartość $J^* = 1,182$ wobec wartości dokładnej $J^* = 1,183$, natomiast dla $h/r = 0,25$ uwzględnienie tylko dwóch wyrazów prowadzi do wyniku $J^* = 1,0094$, podczas gdy wartość dokładna

$J^* = 1,0095$. Poza tym wyraźnie widać, że dla $\chi \rightarrow 0$, $J^* \rightarrow J$.

Naprężenia normalne we włóknach skrajnych

$$(c) \quad \sigma_s\left(\pm \frac{h}{2}\right) = \frac{P}{A} \cdot \left[\cos \varphi_0 \mp \frac{12(1 - \cos \varphi_0)}{\chi \cdot \mu(\chi)} \cdot \frac{1}{(2 \pm \chi)} \right],$$

gdzie

$$\mu(\chi) = 1 + \frac{3}{20} \chi^2 + \frac{3}{112} \chi^4.$$

Przy założeniu liniowego rozkładu naprężeń ekstremalne naprężenia normalne określa zależność:

$$(d) \quad \sigma_s\left(\pm \frac{h}{2}\right) = \frac{N}{A} \mp \frac{M}{W} = \frac{P}{A} \cdot \left[1 \mp \frac{6(1 - \cos \varphi_0)}{\chi} \right].$$

Szczegółowe obliczenia przeprowadzono dla $\chi = h/r = 0,5$, $\varphi_0 = 60^\circ$, $\mu(\chi) = 1,039$. Naprężenia normalne obliczone według wzoru (c):

$$\sigma_{s \min} = \frac{P}{A} \cdot \left[0,5 - \frac{12(1-0,5)}{0,5 \cdot 1,039} \cdot \frac{1}{2+0,5} \right] = -4,12 \cdot \frac{P}{A},$$

$$\sigma_{s \max} = \frac{P}{A} \cdot \left[0,5 - \frac{12(1-0,5)}{0,5 \cdot 1,039} \cdot \frac{1}{2-0,5} \right] = 8,20 \cdot \frac{P}{A},$$

a naprężenia obliczone według wzoru (d) przy założeniu rozkładu liniowego:

$$\sigma_{s \min} = \frac{P}{A} \cdot \left[1 - \frac{6(1-0,5)}{0,5} \right] = -5 \frac{P}{A},$$

$$\sigma_{s \max} = \frac{P}{A} \cdot \left[1 + \frac{6(1-0,5)}{0,5} \right] = 7 \frac{P}{A}.$$

Wykresy naprężeń normalnych obliczonych dla rozkładu hiperbolicznego i liniowego podano na rys. 13.43b.

Wartości dokładne różnią się o około 17% od wartości przybliżonych. Dla $h/r = 0,05$ różnice te sięgają tylko 2,5%.

Wydłużenie λ , przyrost krzywizny k i odległość osi obojętnej od środka ciężkości przekroju z_0 wynoszą:

$$\lambda = \frac{1}{E} \cdot \left(\frac{N}{A} + \frac{M}{Ar} \right) = 0,5 \frac{P}{EA},$$

$$k = \frac{M}{EJ^*} = -\frac{12 \Pr}{EAh^2 \mu(\chi)} = -42,2 \frac{P}{EA r},$$

$$z_0 = -\frac{\lambda \cdot r}{\lambda + r k} = -\frac{0,5 \cdot r}{0,5 - 42,2} = 0,012r = 0,024h.$$

Interesujące jest, że w omawianym zadaniu dla $\varphi_0 = 90^\circ$ oś obojętna przechodzi przez środek ciężkości przekroju, gdyż

$$\frac{N}{A} - \frac{M}{Ar} = \frac{P}{A} - \frac{P \cdot r}{Ar} = 0.$$