

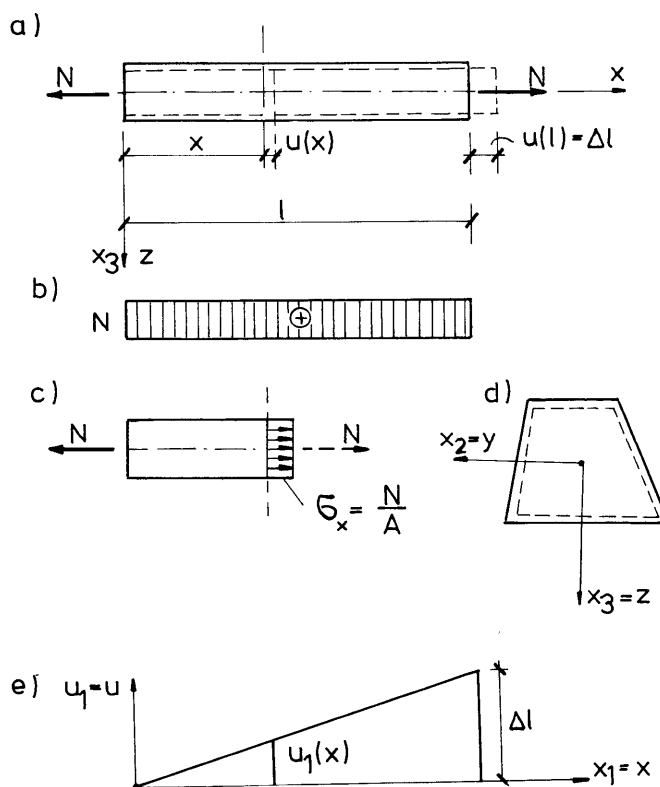


9. DZIAŁANIE SIŁY NORMALNEJ

9.1. ZALEŻNOŚCI PODSTAWOWE

Przyjmijmy, że materiał pręta jest jednorodny i izotropowy. Jeśli ponadto założymy, że pręt jest pryzmatyczny, to słuszne są wzory podane przy omawianiu próby rozciągania i ściskania dla zakresu linowo-sprężystego. Przyjęliśmy wówczas hipotezę płaskich przekrojów i założenie o pokrywaniu się głównych osi naprężeń i odkształceń z układem osi przechodzących przez geometryczną oś pręta.

Zanim przejdziemy do wzorów na naprężenia, odkształcenia i przemieszczenia, wprowadzimy zamiast układu osi x_1, x_2, x_3 układ osi x, y, z . Współrzędne wektora przemieszczenia u_1, u_2, u_3 oznaczmy odpowiednio u, v, w .



Rys. 9.1

Rozważmy pręt o długości l , poddany czystemu rozciąganiu (rys. 9.1). Oznacza to, że na długości pręta wykres sił normalnych jest stały, a pozostałe siły wewnętrzne są równe zero. Zgodnie z zasadą *de Saint-Venanta* nie precyzujemy bliżej sposobu przyłożenia siły N i pominiemy analizę ewentualnych zaburzeń na końcach pręta. Założymy ponadto, że oś pręta na lewym końcu jest unieruchomiona, a na końcu prawym może się przesuwać tylko wzdłuż osi x . Geometrię odkształcenia ilustrują linie przerywane na rys. 9.1a, d.

Stosownie do wzorów (8.1) siłę normalną definiujemy następująco:

$$N \stackrel{\text{def}}{=} \int_A \sigma_x(y, z) dA, \quad \text{gdzie } \sigma_x = \sigma_{11}. \quad (9.1)$$

Definicja ta jest słuszna dla dowolnego prawa rozkładu naprężeń normalnych σ_x . Jeśli jednak obowiązuje hipoteza płaskich przekrojów, a materiał pręta jest jednorodny, to ze związków fizycznych wynika równomierny rozkład naprężeń σ_x w obrębie przekroju A . Wobec tego σ_x można wyłączyć przed znak całki:

$$N = \sigma_x \int_A dA = \sigma_x \cdot A,$$

stąd

$$\sigma_x = \frac{N}{A}. \quad (9.2)$$

Pozostałe współrzędne tensora naprężenia są równe zero, a stan naprężenia związany z osiami x, y, z obrazuje macierz:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.3)$$

Ponieważ osie x, y, z są głównymi osiami odkształceń, więc odkształcenia kątowe są równe zero, a odkształcenia liniowe oblicza się ze związków fizycznych (wzory (4.3)):

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{N}{EA}, \quad (9.4)$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \cdot \varepsilon_x = -\frac{\nu N}{EA}. \quad (9.5)$$

Iloczyn EA nazywa się **sztywnością rozciągania (ściskania) przekroju**. Macierz $\boldsymbol{\varepsilon}$ ma postać:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & -\nu \varepsilon_x & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \varepsilon_x \end{bmatrix}. \quad (9.6)$$

Przemieszczenia obliczymy ze związków geometrycznych. Z hipotezy płaskich przekrojów wnioskujemy, że współrzędna $u_1 = u$ jest tylko funkcją x . Wobec tego mamy:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u(x)}{\partial x} = \frac{du}{dx}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z},$$

stąd:

$$u = u(x) = \int \varepsilon_x dx + C_1 = \frac{N}{EA} \cdot x + C_1,$$

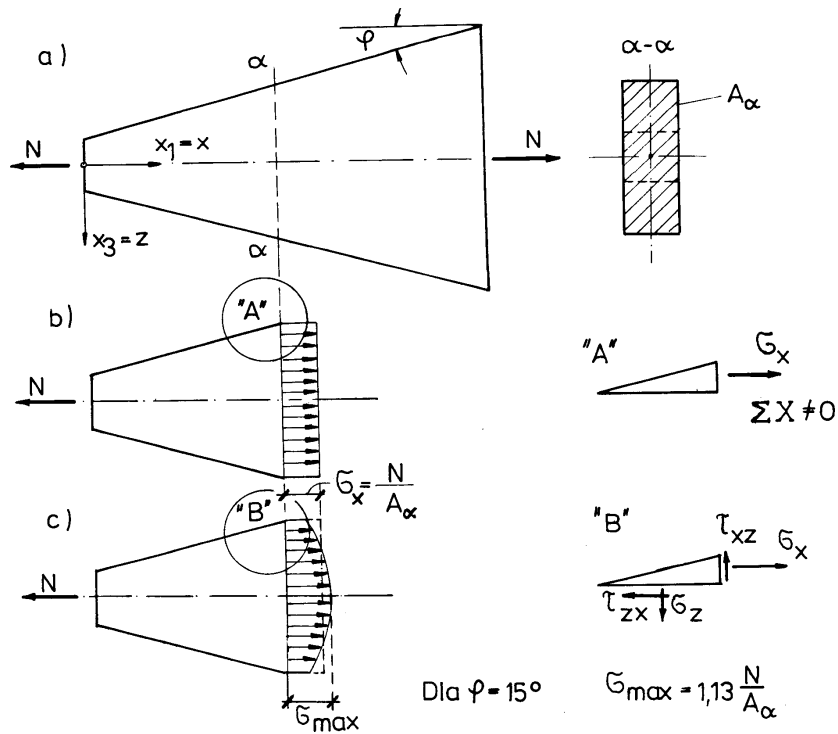
$$v = v(x, y, z) = \int \varepsilon_y dy + C_2(x, z) = -\frac{\nu N}{EA} \cdot y + C_2(x, z),$$

$$w = w(x, y, z) = \int \varepsilon_z dz + C_3(x, y) = -\frac{\nu N}{EA} \cdot z + C_3(x, y).$$

Stałe całkowania trzeba obliczyć z warunków brzegowych oraz przyjętej kinematyki odkształcenia. Najbardziej interesują nas oczywiście przemieszczenia $u(x)$. Ponieważ $u(0) = 0$ (lewy koniec pręta jest unieruchomiony), więc $C_1 = 0$. Okazuje się, że stałe C_2 i C_3 też są równe zero. Ostatecznie otrzymujemy:

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, z) &= u(x) = \frac{N}{EA} \cdot x, \\ v(x, y, z) &= v(y) = -\nu \frac{N}{EA} \cdot y, \\ w(x, y, z) &= w(z) = -\nu \frac{N}{EA} \cdot z. \end{aligned} \right\} \quad (9.7)$$

Pełne wyprowadzenie wzorów (9.7) zawiera podręcznik *Piechnika* [34].



Rys. 9.2

Wszystkie podane wyżej zależności są ściśle tylko dla pręta pryzmatycznego. W przypadku prętów o zmiennym przekroju nie są spełnione warunki brzegowe dla naprężeń. Łatwo się o tym przekonać, układając równania równowagi dla elementu położonego przy krawędzi przekroju (rys. 9.2b). Warunki na powierzchni ($p_i = \sigma_{ji}n_j$) wymagają, by w pobliżu krawędzi pręta występowały również naprężenia styczne τ_{xz} i normalne σ_z (rys. 9.2c). Przy łagodnej zmianie przekroju wartości te są jednak pomijalnie małe, a wykres naprężeń normalnych σ_x jest prawie równomierny (por. rys. 9.2c).

Przejdziemy obecnie do zagadnień energetycznych. Obliczymy najpierw wartość całki objętościowej z iloczynu tensorów naprężenia i odkształcenia przy działaniu siły normalnej. Jeśli przyjmiemy, że w każdym punkcie dowolnego przekroju pręta występują tylko naprężenia normalne $\sigma_{11} = \sigma_x$, to całkę tę można zapisać następująco:

$$\int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \int_V \sigma_x \varepsilon_x dV.$$

Całkę względem objętości V zamienimy na całkę iterowaną:

$$\int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \int_s \left(\int_A \sigma_x \varepsilon_x dA \right) ds,$$

gdzie s jest długością pręta (może to być również pręt słabo zakrzywiony), a ds – elementem łuku mierzonym na osi pręta.

Gdy obowiązuje prawo płaskich przekrojów, to odkształcenie ε_x w obrębie danego przekroju jest stałe, co pozwala wyłączyć je przed całkę względem A . Zatem:

$$\int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \int_s \varepsilon_x \left(\int_A \sigma_x dA \right) ds = \int_s \lambda \left(\int_A \sigma_x dA \right) ds,$$

gdzie $\lambda = \varepsilon_x$, i oznacza wydłużenie względne osi pręta.

Całka w nawiasie, stosownie do definicji (9.1), jest siłą normalną N . Należy podkreślić, że definicja ta jest słuszna dla zupełnie dowolnego rozkładu naprężeń normalnych $\sigma_x(s, y, z)$. Wobec tego

$$\int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV = \int_s N(s) \lambda(s) ds. \quad (9.8)$$

Aby powyższe równanie było prawdziwe, wystarcza tylko, że jest spełniona hipoteza płaskich przekrojów. Materiał pręta może być nieliniowo-sprężysty lub niesprężysty i w obrębie przekroju niejednorodny. Wielkości N i λ są w ogólności zmienne na długości pręta.

Obliczymy teraz energię sprężystą U , zmagazynowaną wewnątrz pręta. Stosownie do wzoru (6.8) oraz na podstawie wzoru (9.8) otrzymujemy:

$$U = \int_V \left(\frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} \right) dV = \frac{1}{2} \int_s N \lambda ds. \quad (9.9)$$

Przy działaniu siły normalnej na jednorodny, izotropowy pręt sprężysty odkształcenie $\epsilon_x = \lambda$ możemy wyrazić przez siłę N oraz sztywność EA według wzoru (9.4). Wówczas

$$U_N = \frac{1}{2} \int_s \frac{N^2}{EA} ds \quad \text{lub} \quad U_\lambda = \frac{1}{2} \int_s EA \lambda^2 ds. \quad (9.10)$$

Zależność (9.8) służy również do obliczenia pracy rzeczywistej siły N na wirtualnym wydłużeniu $\bar{\lambda}$ (por. prawa strona wzoru (3.2)):

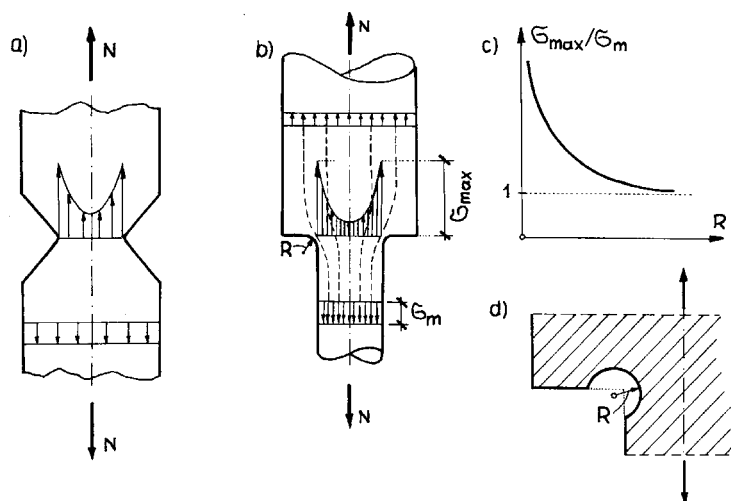
$$\int_V \sigma_{ij} \bar{\epsilon}_{ij} dV = \int_s N \bar{\lambda} ds. \quad (9.11)$$

Podobnie uzyskujemy wyrażenie na pracę wirtualnej siły \bar{N} na rzeczywistym odkształceniu $\epsilon_x = \lambda$:

$$\int_V \bar{\sigma}_{ij} \epsilon_{ij} dV = \int_s \bar{N} \lambda ds. \quad (9.12)$$

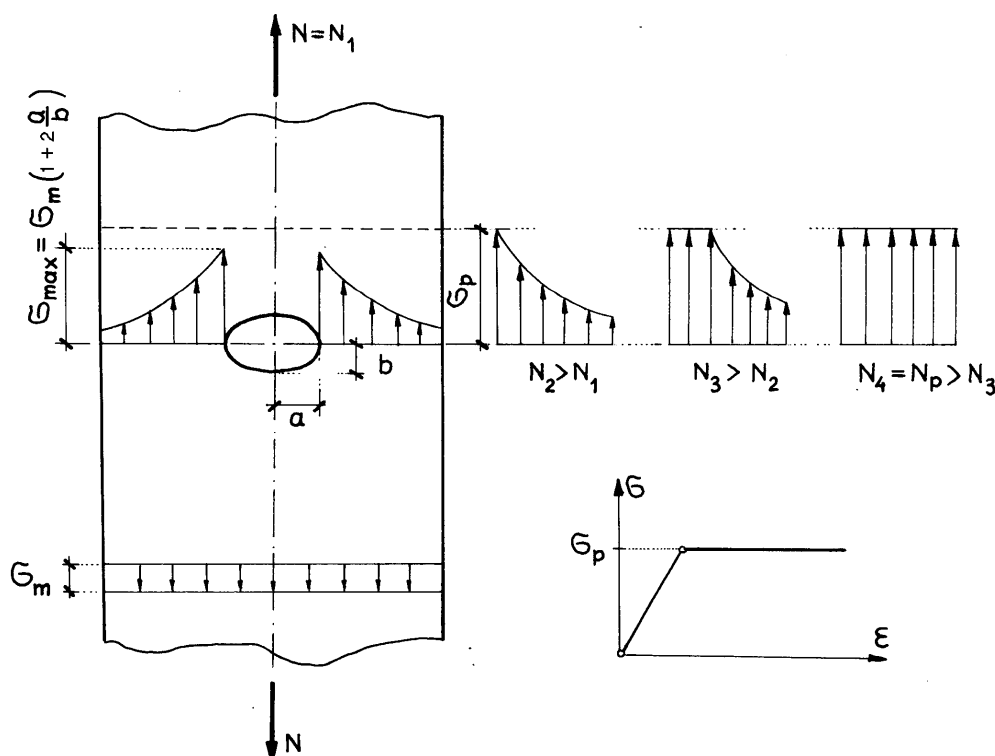
9.2. NAGŁE ZMIANY PRZEKROJU. KONCENTRACJA NAPRĘŻEŃ

W przypadku nagłych zmian przekroju pręta przyjęcie równomiernego rozkładu naprężeń normalnych σ_x jest już niewłaściwe. W miejscach zmian przekroju składowe naprężenia stycznych i normalnych w pozostałych kierunkach są znaczne. Na krawędziach otworów i wcięć powstają bardzo duże naprężenia normalne σ_x (rys. 9.3), wielokrotnie większe od naprężeń średnich, obliczonych dla równomiernego rozkładu. Obliczenia dla takich prętów należy przeprowadzać na gruncie teorii sprężystości i plastyczności. Wpływ promienia krzywizny zaokrąglenia krawędzi w miejscu zmiany przekroju ilustruje rys. 9.3b c.



Rys. 9.3

Gdy $R = 0$ (krawędź ostra), to naprężenia σ_x dążą do nieskończoności. Warto o tym pamiętać podczas projektowania konstrukcji. Zmniejszenie naprężeń uzyskujemy nawet wówczas, gdy „osłabimy” przekrój przez nawiercenie otworów na krawędzi zmiany przekroju (por. rys. 9.3d).



Rys. 9.4

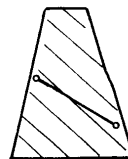
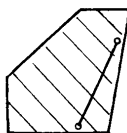
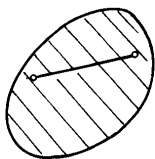
Jeżeli materiał pręta jest kruchy, to po osiągnięciu przez naprężenia normalne wytrzymałości na rozciąganie następuje pęknięcie rozdzielcze i nagłe zniszczenie konstrukcji. Jeżeli materiał jest ciągliwy, to obszar koncentracji naprężeń stopniowo uplastycznia się w miarę wzrostu siły (por. rys. 9.4). Widzimy więc, że dla materiału ciągliwego osiągnięcie przez naprężenia granicy plastyczności nie oznacza jeszcze zniszczenia. Jako zniszczenie przyjmuje się osiągnięcie tzw. nośności granicznej ($N = N_p$), kiedy nastąpi uplastycznienie całego przekroju osłabionego otworem lub wcięciem. Trzeba jednak pamiętać, że pod wpływem obciążeń dynamicznych materiał ciągliwy zwiększa swą kruchość. W tych przypadkach nieuwzględnienie koncentracji naprężeń może prowadzić do niespodziewanego zniszczenia.

Na zakończenie możemy sformułować następujące uwagi:

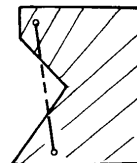
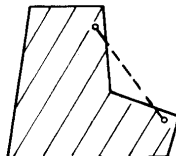
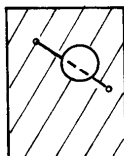
- w miejscach nagłych zmian przekroju występuje spiętrzenie naprężeń, które jest groźne dla materiałów kruchych lub obciążonych dynamicznie materiałów ciągliwych,
- gdy materiał jest ciągliwy, to przy statycznym obciążeniu następuje wyrównywanie naprężeń, a zniszczeniu towarzyszą widoczne deformacje,
- przekroje osłabione wcięciami (otworami) mają mniejszą zdolność do przenoszenia obciążeń, a o nośności pręta decyduje najmniejszy przekrój,
- duże złagodzenie efektu koncentracji uzyskuje się wówczas, gdy zmiana przekroju przebiega w sposób płynny, a zaokrąglenia mają możliwie duży promień krzywizny.

Wnioski dotyczące gwałtownych zmian przekroju mają charakter ogólny i obowiązują również podczas działania innych sił wewnętrznych.

Zbiory wypukłe



Zbiory niewypukłe



Rys. 9.5

Problem spiętrzenia naprężeń wiąże się z pojęciem wypukłości zbioru. Cechą zbioru wypukłego jest to, że odcinek łączący dwa dowolne punkty zbioru leży wewnątrz zbioru. Jeżeli można znaleźć takie odcinki, które nie mają tej własności, to dany zbiór jest niewypukły. Przykłady zbiorów wypukłych i niewypukłych podano na rysunku 9.5. Ogólnie biorąc, koncentracji naprężeń można się spodziewać tam, gdzie zbiór punktów tworzących ciało jest niewypukły. Do takich przypadków oprócz otworów lub wcięć zaliczamy również miejsca przyłożenia obciążeń skupionych. Wynika to stąd, że obciążenia skupione przekazywane są na niewielkich obszarach przez inne części konstrukcji (lub narzędzia), tworzące łącznie z daną konstrukcją zbiory niewypukłe.