

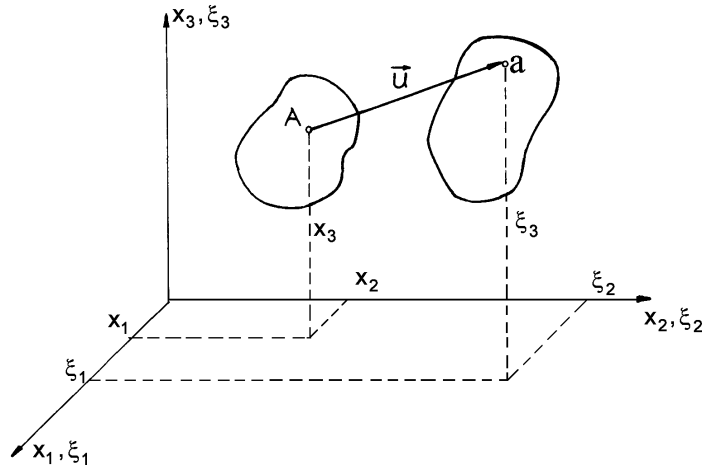
## 2.



## STAN ODKSZTAŁCENIA

## 2.1. WEKTOR PRZEMIESZCZENIA

Rozważmy ciało odkształcalne wypełnione szczelnie materią (rys. 2.1). Pod wpływem czynników zewnętrznych (sił powierzchniowych, sił masowych, zmiany temperatury itp.) ciało to z konfiguracji pierwotnej (przed odkształceniem) przejdzie do konfiguracji aktualnej (po odkształceniu).



Rys. 2.1

Przypiszemy dowolnemu punktowi materialnemu  $A$  ciała nieodkształconego współrzędne  $x_1, x_2, x_3$ . Ten sam punkt ciała po odkształceniu przejdzie w położenie  $a$  o współrzędnych  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ . Wektor

$$\mathbf{u} = (\xi_1 - x_1)\mathbf{e}_1 + (\xi_2 - x_2)\mathbf{e}_2 + (\xi_3 - x_3)\mathbf{e}_3 \quad (2.1)$$

nazywamy **wektorem przemieszczenia**. Jego współrzędne mierzymy w jednostkach długości (np. w metrach). Ze wzoru (2.1) wynika, że za wektor  $\mathbf{u}$  możemy uważać:

- wektor wyrażający przemieszczenie punktu **materialnego**, zajmującego przed odkształceniem położenie  $A(x_1, x_2, x_3)$ , lub
- wektor wyrażający przemieszczenie punktu materialnego, który po odkształceniu ciała zajmuje w **przestrzeni** położenie pokrywające się z punktem  $a(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ .

W pierwszym przypadku mówimy, że stosujemy **opis materialny** (tzw. opis *Lagrange'a*), w drugim – **opis przestrzenny** (tzw. opis *Eulera*). W obu opisach trzeba znać funkcje jednoznacznie wiążące ze sobą współrzędne  $\xi_i$  oraz  $x_i$ :

$$\xi_i = \xi_i(x_1, x_2, x_3), \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.2)$$

$$\text{lub} \quad x_i = x_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.3)$$

Korzystając ze wzorów (2.1), (2.2) i (2.3), możemy napisać:

- we współrzędnych materialnych

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = \xi_i(x_1, x_2, x_3) - x_i, \quad (2.4)$$

- we współrzędnych przestrzennych

$$u_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \xi_i - x_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3). \quad (2.5)$$

Współrzędne wektora przemieszczenia  $u_1, u_2, u_3$  są funkcjami położenia (współrzędnych  $x_i$  lub  $\xi_i$ ). Zatem wektory  $\mathbf{u}$  tworzą pole wektorowe przemieszczeń.

## 2.2. TENSOR ODKSZTAŁCENIA. ZWIĄZKI KINEMATYCZNE

Rozpatrzmy przemieszczenia dwóch dowolnie wybranych punktów  $A$  i  $B$ , które w konfiguracji końcowej przyjmą położenia  $a$  i  $b$ . Jeżeli długość odcinka  $AB$  jest równa długości odcinka  $ab$  dla dowolnej pary punktów ciała, to ciało przemieszcza się jako bryła sztywna, nieodkształcalna. **Odkształcenie** ciała charakteryzuje więc **zmiana odległości** między poszczególnymi punktami ciała.

Przyjmijmy zatem, że odległość pomiędzy dwoma punktami materialnymi w konfiguracji nieodkształconej jest nieskończenie mała i wynosi  $ds_0$ . Wskutek odkształcenia ciała odległość ta zmienia się i wynosi  $ds$ . Miarą odkształcenia w danym punkcie jest zatem różnica tych odległości lub – co jest wygodniejsze – różnica kwadratów tych odległości. Rozważmy przykładowo opis materialny pamiętając, że  $\xi_k = \xi_k(x_1, x_2, x_3)$ . Wówczas

$$\begin{aligned} ds^2 - ds_0^2 &= d\xi_k(x_1, x_2, x_3)d\xi_k(x_1, x_2, x_3) - dx_r dx_r = \\ &= \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} dx_i \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} dx_j - \delta_{ir} \delta_{jr} dx_i dx_j = \left( \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} - \delta_{ij} \right) dx_i dx_j. \end{aligned}$$

Stosownie do wzoru (2.3)  $\xi_k(x_1, x_2, x_3) = u_k(x_1, x_2, x_3) + x_k$ . Mamy zatem

$$\frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} dx_i = \frac{\partial u_k}{\partial x_i} dx_i + \delta_{ki} dx_i \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} dx_j = \frac{\partial u_k}{\partial x_j} dx_j + \delta_{kj} dx_j.$$

Wobec tego

$$ds^2 - ds_0^2 = \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \delta_{ki} \right) \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \delta_{kj} \right) dx_i dx_j - \delta_{ij} dx_i dx_j = 2\varepsilon_{ij}^G dx_i dx_j.$$

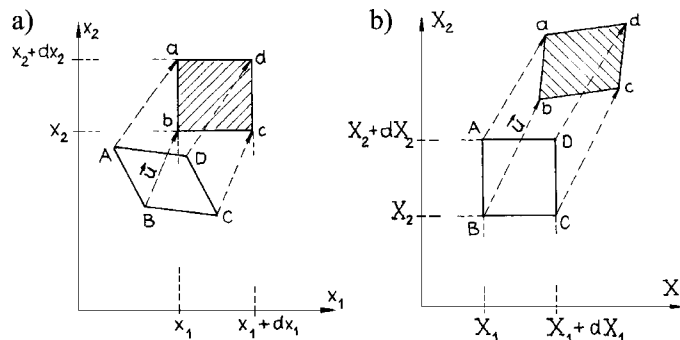
Wielkość  $\varepsilon_{ij}^G$  to **tensor odkształcenia Greena**. Ostateczny wzór opisujący ten tensor otrzymujemy po wykonaniu mnożenia obu nawiasów, uwzględnieniu własności delty *Kroneckera* jako operatora zamiany wskaźnika oraz redukcji wyrazów podobnych:

$$(a) \quad \varepsilon_{ij}^G = \varepsilon_{ji}^G = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right).$$

Postępując podobnie w przypadku opisu przestrzennego otrzymujemy **tensor odkształcenia Almansięgo**:

$$(b) \quad \varepsilon_{ij}^A = \varepsilon_{ji}^A = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial u_j}{\partial \xi_i} - \frac{\partial u_k}{\partial \xi_i} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial \xi_j} \right).$$

Z postaci wzorów (a) i (b) wynika, że oba tensory odkształcenia są symetryczne.



Rys. 2.2

Pewnego komentarza wymaga interpretacja kinematyczna odkształceń w obu opisach. Przypomnimy najpierw, jak definiowaliśmy stan naprężenia. Elementarną kostkę naprężeń wycinaliśmy myślowo **po odkształceniu** ciała. Stosowaliśmy więc **opis przestrzenny** (przed odkształceniem kostka nie była prostopadłością). Opis ten ma zastosowanie w mechanice płynów. W teorii konstrukcji bardziej przydatny jest jednak **opis materialny**, gdyż warunki podparcia ciała (warunki brzegowe) są znane właśnie w konfiguracji nieodkształconej. W opisie tym w konfiguracji pierwotnej (przed odkształceniem) elementarna kostka jest prostopadłością. Ilustracją powyższych wywodów jest rys. 2.2, na którym przedstawiono sens obu opisów dla elementu płaskiego we współrzędnych prostokątnych  $\xi_1, \xi_2$  oraz  $x_1, x_2$  (rys. 2.2a – opis przestrzenny rys. 2.2b – materialny).

Wyprowadzone formuły (a) i (b) opisujące tensory *Greena* i *Almansię* odnoszą się do odkształceń dowolnie dużych, czyli tzw. odkształceń skończonych, będących nieliniowymi funkcjami **gradientów przemieszczeń**, czyli pochodnych  $\partial u_i / \partial x_j$  lub  $\partial u_i / \partial \xi_j$ . Nieliniowość ta jest źródłem bardzo dużych trudności obliczeniowych. Odkształcenia skończone wykazują podatne materiały gumopodobne (np. guma, niektóre tworzywa sztuczne, organiczne tkanki miękkie). W materiałach budowlanych, nie licząc gumowych konstrukcji pneumatycznych i pewnych przypadków konstrukcji cięgowych, odkształcenia są bardzo małe i stosowanie skończonych miar deformacji nie jest konieczne<sup>\*)</sup>. Wówczas iloczyny gradientów przemieszczeń, występujące we wzorach (a) i (b), jako małe wielkości wyższego rzędu można pominąć. Przyjęcie, że gradienty przemieszczeń są małe, nie usuwa niestety kłopotów związanych z nieliniowością. Może się bowiem zdarzyć, że badany układ wykazuje duże przemieszczenia (np. duże ugięcia stalowej żyłki), mimo że odkształcenia materiału są małe. Wtedy zależności między obciążeniem i przemieszczeniem są nieliniowe nadal nastroczają wielu trudności obliczeniowych. Polegają one na tym, że w równaniach równowagi w dalszym ciągu muszą wystąpić człony zawierające funkcje przemieszczeń, co odpowiada bardzo złożonej teorii **kinematycznie nieliniowej**. Teoria ta w ogólności wymaga wprowadzenia nowych definicji tensora naprężenia (tensory *Pioli-Kirchhoffa*). Wykracza to poza klasyczny kurs mechaniki ciał odkształcalnych. Dlatego w dalszym ciągu założymy, że przemieszczenia w porównaniu z wymiarami ciała są bardzo małe, tzn.  $\xi_i \approx x_i$ . Wtedy różnice pomiędzy opisem przestrzennym i materialnym znikają, a definicja tensora odkształcenia upraszcza się do postaci:

$$\varepsilon_{ij}^C = \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (2.6)$$

Wzór (2.6) definiuje tzw. **tensor małych odkształceń Cauchy'ego**. Tensor ten – podobnie jak tensory *Greena* i *Almansię* – jest **symetryczny**, a wzór (2.6) przedstawia **równania geometryczne** (kinematyczne) teorii małych odkształceń. Tensor odkształcenia  $\varepsilon = [\varepsilon_{ij}]$  tworzy pole tensorowe, ponieważ jego współrzędne są funkcjami położenia.

Zwróćmy uwagę na to, że zachodzi tożsamość:

$$(c) \quad u_{i,j} \equiv \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) + \frac{1}{2} (u_{i,j} - u_{j,i}) = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}.$$

Widzimy zatem, że tensor małych odkształceń *Cauchy'ego*  $\varepsilon_{ij}$  (dla uproszczenia zapisu pomijamy dalej indeks C) jest symetryczną częścią gradientu przemieszczeń, natomiast symbol  $\omega_{ij}$  jest antysymetryczną częścią gradientu przemieszczeń i nazywa się **tensorem obrotu**:

$$\omega_{ij} = -\omega_{ji} = \frac{1}{2} (u_{i,j} - u_{j,i}). \quad (2.7)$$

Tensor obrotu  $\omega_{ij}$  jest zatem **skośnie symetryczny**. Jego nazwa pochodzi stąd, że ciało nieodkształcone ( $\varepsilon_{ij} \equiv 0$ ) może poruszać się jako bryła sztywna wykonując jedynie obrót.

Pokażemy teraz, że współrzędne  $\varepsilon_{ij}$  rzeczywiście tworzą tensor. Zbadamy najpierw, jak wyrażają się gradienty przemieszczeń  $u_{k,p}$  w układzie obróconym

$x_1', x_2', x_3'$  przez gradienty przemieszczeń  $u_{i,j}$  w układzie pierwotnym  $x_1, x_2, x_3$ :

<sup>\*)</sup> Założenie o małych wartościach pochodnych przemieszczeń jest fizycznie usprawiedliwione, gdyż przykładowo wydłużenie pręta stalowego zamontowanego w konstrukcji sięga ułamka procenta.

$$(d) \quad u_{k',p'} = \frac{\partial u_{k'}}{\partial x_{p'}} = \frac{\partial u_{k'}}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x_{p'}}.$$

Współrzędne  $u_{k'}$  transformują się jak współrzędne wektora (tzn.  $u_{k'} = u_i a_{ik'}$ ), zatem

$$(e) \quad \frac{\partial u_{k'}}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} a_{ik'} = u_{i,j} a_{ik'}.$$

Podobnie transformują się współrzędne punktów w obu układach:  $x_j = x_{p'} a_{jp'}$ . Wobec tego

$$(f) \quad \frac{\partial x_j}{\partial x_{p'}} = a_{jp'}.$$

Po podstawieniu równań (e) i (f) do zależności (d) otrzymujemy:

$$(g) \quad u_{k',p'} = u_{i,j} a_{ik'} a_{jp'}.$$

Widzimy więc, że **gradienty przemieszczeń są tensorami** drugiego rzędu, bo transformują się tak jak tensor. Z równania (g) wynika również, że

$$(h) \quad u_{p',k'} = u_{j,i} a_{jp'} a_{ik'}.$$

Stosownie do równań (2.6)

$$\varepsilon_{k'p'} = \frac{1}{2} (u_{k',p'} + u_{p',k'}).$$

Podstawienie zależności (g) i (h) prowadzi do wyniku

$$(i) \quad \varepsilon_{k'p'} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) a_{ik'} a_{jp'} = \varepsilon_{ij} a_{ik'} a_{jp'}.$$

Zależność (i) dowodzi, że składowe stanu odkształcenia  $\varepsilon_{ij}$  rzeczywiście tworzą tensor.

Z symetrii tensora odkształcenia wynika, że ma on 6 niezależnych współrzędnych. Dodajmy, że **wszystkie współrzędne tensora odkształcenia**

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

**są bezwymiarowe.** W ramach kinematycznie liniowej teorii małych odkształceń współrzędne te mają klarowną interpretację geometryczną. Wykażemy, że współrzędne **równo-wskaźnikowe** są **odkształceniami liniowymi** wzdłuż odpowiednich osi, a współrzędne **różno-wskaźnikowe** są **odkształceniami kątowymi** mierzonymi w płaszczyznach określonych indeksami współrzędnych.

Aby się o tym przekonać, ograniczymy się do analizy płaskiej deformacji i zastosujemy opis materialny. Rozważmy w konfiguracji pierwotnej dwa elementarne prostopadłe do siebie odcinki  $BC$  i  $AB$  o mające odpowiednio długości  $dx_1$  i  $dx_2$  (por. rys. 2.3). Po odkształceniu punkty materialne  $A$ ,  $B$ , i  $C$  przemieszczają się i zajmą odpowiednio położenia  $a$ ,  $b$ , i  $c$ . Wobec tego odcinki  $BC$  i  $AB$  zmieniają swe pierwotne długości i nachylenia w stosunku do układu współrzędnych. Na podstawie rys. 2.3 określimy najpierw względne przyrosty długości boków, czyli tak zwane **odkształcenia liniowe**. Odkształcenia te wyrażają się stosunkiem przyrostu długości danego boku do jego pierwotnej długości. Obliczymy na przykład odkształcenia liniowe boku równoległego do osi  $X_1$  pamiętając, że odkształcenia są małe (tzn.  $\sin \alpha \approx \tan \alpha \approx \alpha$ ,  $\cos \alpha \approx 1$ ):

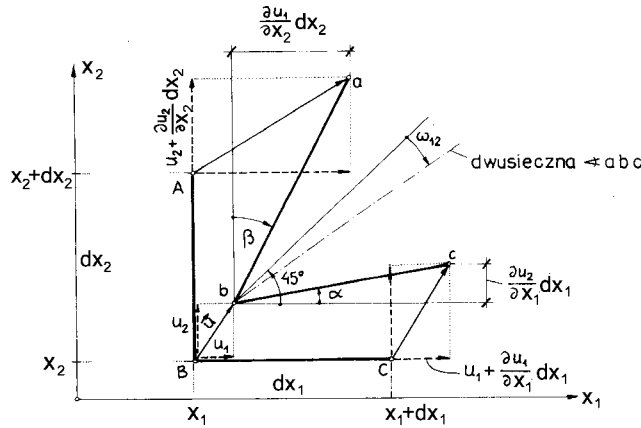
$$(j) \quad \frac{\Delta_{BC}}{|BC|} = \frac{|bc| - |BC|}{|BC|} = \frac{1}{dx_1} \left[ \frac{1}{\cos \alpha} \left( dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 \right) - dx_1 \right] \approx \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = u_{1,1} = \varepsilon_{11}.$$

Podobnie można wykazać, że  $\varepsilon_{22} = u_{2,2}$  oraz – analogicznie w przypadku trójwymiarowym – że  $\varepsilon_{33} = u_{3,3}$ .

Wyznamy jeszcze całkowity kąt odkształcenia  $\gamma = \alpha + \beta$  ( $u_{1,1} \ll 1$  oraz  $u_{2,2} \ll 1$ ):

$$(k) \quad \alpha + \beta \approx \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1}{dx_1(1+u_{1,1})} + \frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2}{dx_2(1+u_{2,2})} \approx \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = u_{2,1} + u_{1,2} = 2\varepsilon_{12}.$$

Uogólniając wynik wzoru (k) na pozostałe płaszczyzny układu współrzędnych wnioskujemy, że odkształcenia różno-wskaźnikowe są równe **połowie kąta odkształcenia**  $\gamma$  danego elementu.



Rys. 2.3

Odształcenia liniowe i kątowe nie dają pełnej informacji o deformacji. Do kompletu brakuje bowiem kąt obrotu dwusiecznej zawarty między bokami badanego elementu (por. rys. 2.3):

$$(l) \quad \frac{\beta - \alpha}{2} \approx \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} (u_{1,2} - u_{2,1}) = \omega_{12}.$$

Wzór (l) potwierdza zatem, że współrzędna tensora  $\omega$  odpowiada kątowi obrotu przekątnej czworoboku utworzonego z odcinków elementarnych. Podobny wniosek dotyczący współrzędnych tensora obrotów można sformułować dla pozostałych płaszczyzn układu.

Na koniec powstaje pytanie, dlaczego jako miarę odkształceń kątowych przyjmuje się połowę a nie całkowity kąt odkształcenia  $\gamma$ . Otóż okazuje się, że wielkości zawarte w macierzy

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \varepsilon_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

nie transformują się zgodnie z definicją tensora (1.16). Między odkształceniami kątowymi  $\varepsilon_{12}$ ,  $\varepsilon_{23}$  i  $\varepsilon_{31}$  a całkowitymi kątami odkształcenia  $\gamma_{12}$ ,  $\gamma_{23}$  i  $\gamma_{31}$  występują zależności:

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \gamma_{12}, \quad \varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \gamma_{23}, \quad \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \gamma_{13} \quad (2.10)$$

W większości starszych podręczników stan odkształcenia opisuje się za pomocą macierzy (2.9), przy czym najczęściej wprowadza się sposób oznaczania składowych analogiczny do tradycyjnego, stosowanego w teorii stanu naprężenia, tzn.:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{11}, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_{22}, \quad \varepsilon_z = \varepsilon_{33}, \quad \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{12}, \quad \gamma_{yz} = 2\varepsilon_{23}, \quad \gamma_{zx} = 2\varepsilon_{31}.$$

Wskaźnikowy zapis tensorowy stosują Nowacki [32], Derski [8], tradycyjny zaś Jastrzębski, Mutermilch i Orłowski [22]. Dodać należy, że obecnie często używa się obu zapisów równolegle (por. Piechnik [34] i Życzkowski [56]).

### 2.3. RÓWNANIA NIEROZDZIELNOŚCI

W równaniach geometrycznych (2.6) trzy ciągłe funkcje  $u_i(x_1, x_2, x_3)$  opisujące pole przemieszczeń służą do obliczania sześciu funkcji  $\varepsilon_{ij}(x_1, x_2, x_3)$  opisujących pole odkształceń. Wynika stąd wniosek, że funkcje  $\varepsilon_{ij}(x_1, x_2, x_3)$  nie mogą być zupełnie dowolne i powinny spełniać trzy dodatkowe warunki.

Różniczkujemy dwukrotnie równania geometryczne (2.6) i zmieniamy kolejno wskaźniki. W efekcie otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij,kl} &= \frac{1}{2}(u_{i,jkl} + u_{j,ikl}), \\ \varepsilon_{kl,ij} &= \frac{1}{2}(u_{k,l ij} + u_{l, kij}), \\ \varepsilon_{ik,jl} &= \frac{1}{2}(u_{i,kjl} + u_{k,ijl}), \\ \varepsilon_{jl,ik} &= \frac{1}{2}(u_{j,lik} + u_{l,jik}).\end{aligned}$$

Następnie pierwsze dwa równania dodajemy stronami, a pozostałe odejmujemy. Po wykorzystaniu własności, że dla funkcji ciągłych różniczkowanie cząstkowe nie zależy od kolejności różniczkowania (np.  $g_{,ij} = g_{,ji}$ ) uzyskujemy  $3^4 = 81$  równań:

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3. \quad (2.11)$$

Z analizy wszystkich permutacji wskaźników  $i, j, k, l$  wynika, że spośród tych równań tylko 6 różni się między sobą:

$$\begin{aligned}1) i = k = 1, j = l = 2: & \quad 2\varepsilon_{12,12} - \varepsilon_{11,22} - \varepsilon_{22,11} = 0, \\ 2) i = k = 2, j = l = 3: & \quad 2\varepsilon_{23,23} - \varepsilon_{22,33} - \varepsilon_{33,22} = 0, \\ 3) i = k = 3, j = l = 1: & \quad 2\varepsilon_{31,31} - \varepsilon_{33,11} - \varepsilon_{11,33} = 0, \\ 4) i = j = 1, k = 2, l = 3: & \quad \varepsilon_{11,23} + \varepsilon_{23,11} - \varepsilon_{12,13} - \varepsilon_{13,12} = 0, \\ 5) i = j = 2, k = 3, l = 1: & \quad \varepsilon_{22,31} + \varepsilon_{31,22} - \varepsilon_{23,21} - \varepsilon_{21,23} = 0, \\ 6) i = j = 3, k = 1, l = 2: & \quad \varepsilon_{33,12} + \varepsilon_{12,33} - \varepsilon_{31,32} - \varepsilon_{32,31} = 0.\end{aligned} \quad (2.12)$$

Sześć niezależnych równań można również uzyskać przez przyjęcie we wzorach (2.11), że  $l = k$ :

$$\varepsilon_{ij,kk} + \varepsilon_{kk,ij} - \varepsilon_{ik,jk} - \varepsilon_{jk,ik} = 0. \quad (2.12a)$$

Wówczas dla  $i \neq j$  otrzymujemy równania (2.12)<sub>4,5,6</sub>, a przypadkom  $i = j$  odpowiadają dalsze trzy niezależne równania będące kombinacją liniową równań (2.12)<sub>1,2,3</sub>.

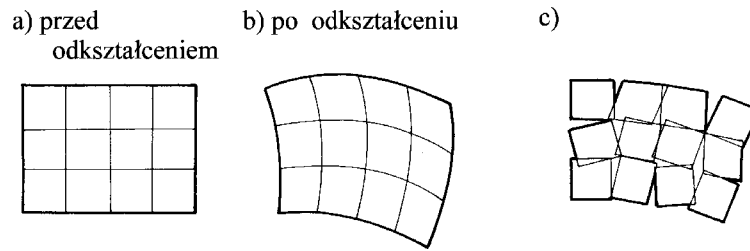
Zapis równań (2.12) można również uprościć przez wprowadzenie trójwskaźnikowego symbolu permutacyjnego  $e_{ijk}$  (por. p.21.1):

$$\eta_{ij} = \eta_{ji} = e_{ikm} e_{jln} \varepsilon_{kl,mn} = 0. \quad (2.12b)$$

Tensor  $\eta_{ij}$  nosi nazwę **tensora niespójności**. Równania (2.12b) z uwagi na symetrię względem wskaźników  $i, j$  przedstawiają tylko sześć interesujących nas równań (2.12). Równania nierozdzielności można także przedstawić w postaci macierzowej:

$$\eta_{ij} = \begin{bmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{13} \\ \eta_{21} & \eta_{22} & \eta_{23} \\ \eta_{31} & \eta_{32} & \eta_{33} \end{bmatrix} = 0. \quad (2.12c)$$

Współrzędne równowskaźnikowe odpowiadają pierwszym trzem równaniom (2.12), pozostałe trzy równania to współrzędne różnowskaźnikowe.



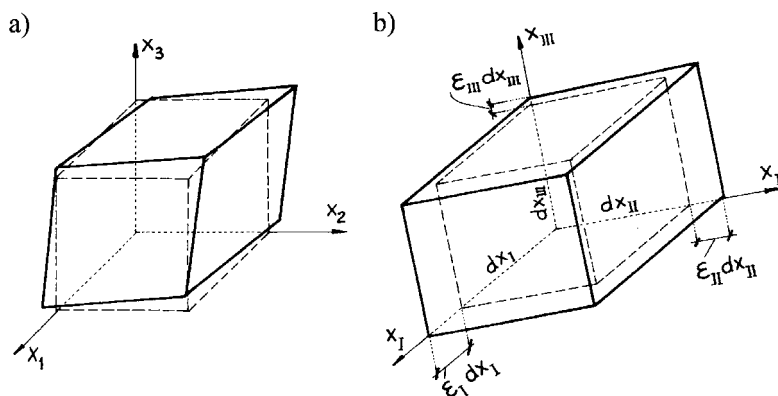
Rys. 2.4

Podstawą powyższych rozważań było założenie ciągłości funkcji  $u_i$  oraz ich pochodnych. Spełnienie równań (2.12) oznacza, że ośrodek ciągły przed deformacją jest również ciągły po deformacji, a każdemu punktowi materialnemu ośrodka w konfiguracji pierwotnej odpowiada dokładnie jeden punkt w konfiguracji końcowej z zachowaniem sąsiedztwa elementów. Mamy zatem gwarancję, że po odkształceniu w ośrodku nie powstaną „dziury” lub że myślowo wycięte elementy ciała nie będą się przenikały, jak to uwidoczniło na rys. 2.4c. Dlatego równania (2.12) noszą nazwę **równań nierozdzielności** (zgodności) lub **równań spójności**. Przypadek przedstawiony na rysunku 2.4b odpowiada sytuacji, w której równania nierozdzielności są spełnione; myślowo wycięte elementy ciała w całym procesie deformacji szczelnie do siebie przylegają. Oznacza to, że współrzędne tensora niespójności  $\eta_{ij}$  są tożsamościowo równe zero.

Powstaje pytanie, dlaczego jest sześć równań nierozdzielności odkształceń, a nie trzy. Okazuje się, że współrzędne tensora niespójności nie są niezależne. *Hellinger* [16] wykazał, że wystarczy, by wewnątrz ciała były spełnione równania, odpowiadające znikaniu tylko współrzędnych równowsażnikowych lub tylko różnowsażnikowych. Natomiast na powierzchni ciała o dowolnych warunkach brzegowych muszą być spełnione wszystkie 6 równań.

## 2.4. WŁASNOŚCI TENSORA ODKSZTAŁCENIA

Z faktu, że wielkości  $\varepsilon_{ij}$  są współrzędnymi tensora symetrycznego drugiego rzędu, wynikają wszystkie wyprowadzone własności, takie jak **istnienie wartości i kierunków głównych odkształceń** oraz **niezmienników**. Należy tylko zamiast naprężeń normalnych  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{33}$  wstawić odkształcenia liniowe  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{22}$ ,  $\varepsilon_{33}$ , a zamiast naprężeń stycznych  $\sigma_{23}$ ,  $\sigma_{31}$ ,  $\sigma_{12}$  odkształcenia kątowe  $\varepsilon_{23}$ ,  $\varepsilon_{31}$ ,  $\varepsilon_{12}$ . Jest oczywiste, że konstrukcja kół *Mohra* jest taka sama jak dla naprężeń. Wnioskujemy stąd, że dowolny stan odkształcenia (rys. 2.5a) można przedstawić w układzie osi głównych odkształceń w postaci deformacji, w której wszystkie zmiany kątów są równe zero (rys. 2.5b); poszczególne ściany elementarnej kostki pozostają prostokątami i ulegają tylko przesunięciu równoległemu.



Rys. 2.5

Pokażemy teraz, jak oblicza się zmianę objętości i zmianę postaci. Rozpatrzmy **odkształcenie objętościowe** elementarnego prostopadłościanu w układzie głównych osi odkształcenia (rys. 2.5b). Pierwotna objętość prostopadłościanu

$$dV = dx_I dx_{II} dx_{III}.$$

Objętość prostopadłościanu po odkształceniu

$$dV + \Delta dV = (1 + \varepsilon_I)(1 + \varepsilon_{II})(1 + \varepsilon_{III}) dx_I dx_{II} dx_{III}.$$

Względna zmiana objętości

$$\frac{\Delta dV}{dV} = (1 + \varepsilon_I)(1 + \varepsilon_{II})(1 + \varepsilon_{III}) - 1 = 1 + \varepsilon_I + \varepsilon_{II} + \varepsilon_{III} + \varepsilon_I \varepsilon_{II} + \varepsilon_{II} \varepsilon_{III} + \varepsilon_{III} \varepsilon_I + \varepsilon_I \varepsilon_{II} \varepsilon_{III} - 1.$$

Po pominięciu małych wielkości wyższego rzędu (tj. wszystkich iloczynów odkształceń głównych) otrzymujemy:

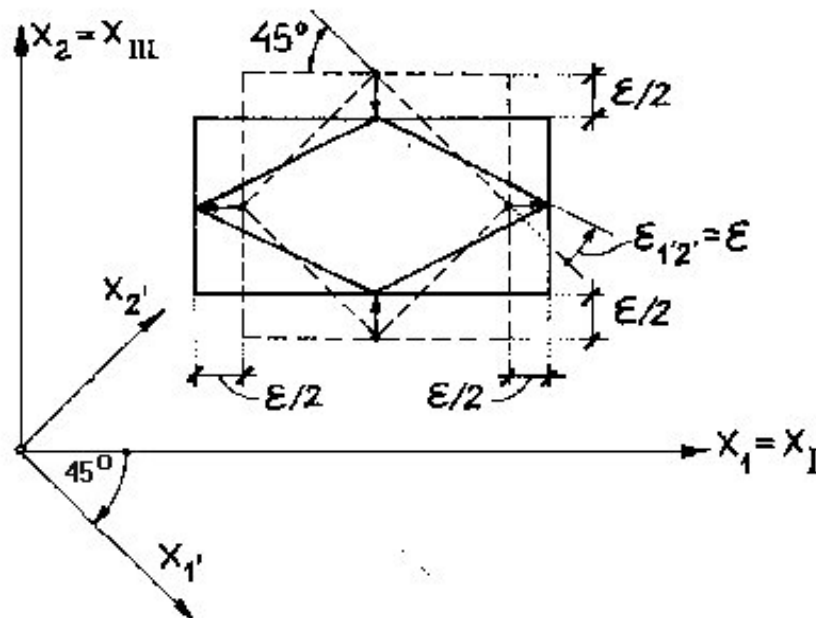
$$\frac{\Delta dV}{dV} \approx \varepsilon_I + \varepsilon_{II} + \varepsilon_{III} = I_1(\varepsilon) = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = 3\varepsilon_0, \quad (2.13)$$

gdzie  $\varepsilon_0$  oznacza średnie odkształcenie liniowe. Względna zmiana objętości (tzw. dylatacja) jest równa pierwszemu niezmiennikowi tensora małych odkształceń  $I_1(\varepsilon)$ . Ponieważ  $I_1^{(d)} = 0$ , zatem za **odkształcenia objętościowe** jest „odpowiedzialny” aksjator tensora odkształcenia.

W celu zobrazowania tzw. **odkształcenia czysto postaciowego** rozważymy deformację elementarnego płaskiego kwadratu. Przyjmiemy szczególny przypadek odkształcenia, w którym  $\varepsilon_{11} = \varepsilon$ ,  $\varepsilon_{22} = -\varepsilon$ ,  $\varepsilon_{33} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{31} = \varepsilon_{12} = 0$  (rys. 2.6). Stan odkształcenia opisuje macierz:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Jest on **odpowiednikiem czystego ścinania** w teorii stanu naprężenia. Odkształcenie czysto postaciowe z uwagi na to, że  $I_1(\varepsilon) = \varepsilon - \varepsilon + 0 = 0$ , ma cechę **dewiatora**.



Rys. 2.6

Ponieważ w przyjętym układzie osi odkształcenia objętościowe są równe zero, więc układ ten jest układem głównych osi odkształcenia. Wobec tego ekstremalne odkształcenia kątowe wystąpią w układzie obróconym o kąt  $-45^\circ$  (osie  $x_1'$ ,  $x_2'$ ):

$$\varepsilon_{1'2'} = \frac{1}{2} \gamma_{\max} = \frac{\varepsilon_I - \varepsilon_{III}}{2} = \frac{\varepsilon - (-\varepsilon)}{2} = \varepsilon,$$

a odkształcenia liniowe

$$\varepsilon_{1'1'} = \varepsilon_{2'2'} = \frac{\varepsilon_I + \varepsilon_{III}}{2} = \frac{\varepsilon + (-\varepsilon)}{2} = 0.$$

W układzie osi obróconych  $x_1', x_2'$  stan odkształcenia jest wobec tego określony macierzą:

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

Macierz ta charakteryzuje odkształcenie czysto postaciowe, w którym różne od zera są tylko dwie współrzędne odkształceń kątowych.

Nawiązując do wyników teorii stanu naprężenia, w podsumowaniu stwierdzamy, że dowolny stan odkształcenia składa się ze zmian objętościowych i zmian postaciowych. Zmiany objętościowe opisuje tylko aksjator tensora odkształcenia (równomierne rozszerzenie lub skurczenie). Zmianę postaci wyraża z kolei dewiator tensora odkształcenia, na który składają się dwa odkształcenia czysto postaciowe. Ilustracją tych stwierdzeń są macierze:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_I & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{III} \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 \end{bmatrix}}_{\text{AKSJATOR}} + \\ &+ \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_I - \varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\varepsilon_I - \varepsilon_0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{odkształcenie czysto} \\ \text{postaciowe}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\varepsilon_{III} - \varepsilon_0) & 0 \\ 0 & 0 & (\varepsilon_{III} - \varepsilon_0) \end{bmatrix}}_{\substack{\text{odkształcenie czysto} \\ \text{postaciowe}}}. \\ &\quad \text{DEWIATOR} \end{aligned}$$

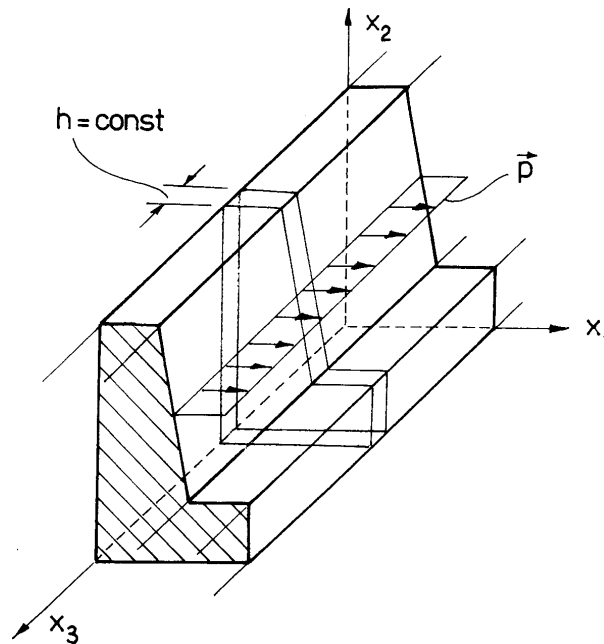
## 2.5. PŁASKI STAN ODKSZTAŁCENIA

Płaski stan odkształcenia występuje wówczas, gdy w każdym punkcie ośrodka współrzędne  $\varepsilon_{i3} = \varepsilon_{3i} = 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ), a pozostałe współrzędne tensora odkształcenia zależą tylko od zmiennych  $x_1, x_2$ . Wobec tego tensor odkształcenia odniesiony do współrzędnych kartezjańskich  $x_1, x_2, x_3$  jest zobrazowany macierzą:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

przy czym  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}(x_1, x_2)$ . Wynika stąd, że składowe wektora przemieszczenia są opisane wzorami:

$$u_1 = u_1(x_1, x_2), \quad u_2 = u_2(x_1, x_2), \quad u_3 = \text{const}. \quad (2.17)$$



Rys. 2.7

Warunki charakterystyczne dla płaskiego stanu odkształcenia występują np. w bardzo długiej ścianie wykonanej z materiału izotropowego i poddanej obciążeniom, które nie zmieniają się wzdłuż osi  $x_3$ , równoległej do podłużnych krawędzi ściany (rys. 2.7). Grubość wyciętego myślowo „plasterka” ściany w trakcie deformacji pozostaje zawsze taka sama, a oś  $x_3$  jest główną osią odkształcenia, odpowiadającą wartości głównej  $\varepsilon_3 = \varepsilon_{33} = 0$ .

## 2.6. PRZYKŁADY <sup>\*)</sup>

### Przykład 1

Dane jest pole wektorowe przemieszczeń:

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = Ax_2x_3 + Bx_1,$$

$$u_2(x_1, x_2, x_3) = -Cx_1x_3,$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = Cx_1x_2,$$

gdzie  $A, B, C$  oznaczają pewne stałe. Wyznaczyć pole tensorowe odkształceń  $\varepsilon_{ij}(x_1, x_2, x_3)$  i pole tensorowe obrotów  $\omega_{ij}(x_1, x_2, x_3)$ .

### Rozwiązanie

Z równań (2.6) otrzymujemy współrzędne tensora odkształcenia:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2}(u_{1,1} + u_{1,1}) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = B,$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) = \frac{1}{2}(Ax_3 - Cx_3) = \frac{x_3}{2}(A - C),$$

<sup>\*)</sup> Dużo przykładów zawiera podręcznik [28].

$$\begin{aligned}\varepsilon_{13} &= \frac{1}{2}(u_{1,3} + u_{3,1}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) = \frac{1}{2}(Ax_2 - Cx_2) = \frac{x_2}{2}(A + C), \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{2}(u_{2,2} + u_{2,2}) = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0, \\ \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2}(u_{2,3} + u_{3,2}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) = \frac{1}{2}(-Cx_1 + Cx_1) = 0, \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1}{2}(u_{3,3} + u_{3,3}) = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0.\end{aligned}$$

Zatem

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} B & \frac{A-C}{2}x_3 & \frac{A+C}{2}x_2 \\ \frac{A-C}{2}x_3 & 0 & 0 \\ \frac{A+C}{2}x_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Współrzędne tensora obrotów obliczamy według zależności (2.10):

$$\begin{aligned}\omega_{11} &= \omega_{22} = \omega_{33} = 0, \\ \omega_{12} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) = -\omega_{21} = \frac{1}{2}(A + C)x_3, \\ \omega_{23} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) = -\omega_{32} = -Cx_1, \\ \omega_{31} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) = -\omega_{13} = \frac{1}{2}(-A + C)x_2,\end{aligned}$$

skąd

$$\boldsymbol{\omega} = [\omega_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{A+C}{2}x_3 & \frac{A-C}{2}x_2 \\ -\frac{A+C}{2}x_3 & 0 & -Cx_1 \\ -\frac{A-C}{2}x_2 & Cx_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

## Przykład 2

Dane są składowe stanu odkształcenia:  $\varepsilon_{11} = 4\text{‰}$ ,  $\varepsilon_{12} = 2\text{‰}$ ,  $\varepsilon_{13} = 0\text{‰}$ ,  $\varepsilon_{22} = 0\text{‰}$ ,  $\varepsilon_{23} = 1\text{‰}$ ,  $\varepsilon_{33} = -1\text{‰}$ . Obliczyć zmianę objętości oraz maksymalne odkształcenie liniowe i maksymalne odkształcenie kątowe.

## Rozwiązanie

Tensor odkształcenia można przedstawić w postaci macierzy:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} [\%].$$

Największe odkształcenie liniowe to największe odkształcenie główne  $\varepsilon_I$ . Do obliczenia wartości głównych służy równanie charakterystyczne (por. teoria stanu naprężenia – p. 1.6, wzór (1.19)):

$$\varepsilon^3 - I_1 \varepsilon^2 + I_2 \varepsilon - I_3 = 0,$$

gdzie  $I_1, I_2, I_3$  oznaczają niezmienniki tensora odkształcenia:

$$\begin{aligned} I_1 &= \varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \frac{\Delta dV}{dV} = 4 + 0 - 1 = 3 \text{ ‰}, \\ I_2 &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -1 - 4 - 4 = -9 [\%]^2, \\ I_3 &= \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 0 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 0 - 0 \cdot 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \cdot 4 - (-1) \cdot 2 \cdot 2 = 0 [\%]^3. \end{aligned}$$

Poszukiwana wartość  $\varepsilon_I$  jest największym pierwiastkiem równania:

$$\varepsilon^3 - 3\varepsilon^2 - 9\varepsilon - 0 = 0,$$

skąd

$$\varepsilon(\varepsilon^2 - 3\varepsilon - 9) = 0.$$

Jeden z pierwiastków  $\varepsilon = \varepsilon_3 = 0$ , a pozostałe wyliczymy z równania kwadratowego:

$$\varepsilon^2 - 3\varepsilon - 9 = 0,$$

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 + 4 \cdot 9}}{2} = 1,5 \pm 3,35,$$

$$\varepsilon_1 = 1,5 + 3,35 = 4,85; \varepsilon_2 = 1,5 - 3,35 = -1,85.$$

Uporządkowane wartości główne są następujące:

$$\begin{aligned} \varepsilon_I &= \varepsilon_1 = 4,85 \text{ ‰}, \quad \varepsilon_{II} = \varepsilon_3 = 0, \quad \varepsilon_{III} = \varepsilon_2 = -1,85 \text{ ‰}, \\ \frac{1}{2} \gamma_{\max} &= \frac{\varepsilon_I - \varepsilon_{III}}{2} = \frac{4,85 - (-1,85)}{2} = 3,35 \text{ ‰}. \end{aligned}$$

Zmiana objętości wynosi więc 3‰, maksymalne odkształcenie liniowe  $\varepsilon_I = 4,85 \text{ ‰}$ , a największy całkowity kąt odkształcenia

$$\gamma_{\max} = 2 \cdot 0,00335 \cdot 180^\circ / \pi = 0,384^\circ.$$