

21.



WYBRANE WIADOMOŚCI Z MATEMATYKI

21.1. ZAPIS WSKAŹNIKOWY I WZÓR GREENA-OSTROGRADSKIEGO-GAUSSA

W układzie kartezjańskim x, y, z wersory oznaczamy zazwyczaj symbolami: $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. Dużą zwartość i czytelność oraz łatwość zapamiętania wzorów zapewnia tzw. zapis wskaźnikowy, w którym osie układu oznaczają się następująco: $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$, a wersory $\mathbf{e}_1 = \mathbf{i}, \mathbf{e}_2 = \mathbf{j}, \mathbf{e}_3 = \mathbf{k}$. Dla wskaźników (indeksów) rezerwuje się litery alfabetu łacińskiego, np. x_i ($i = 1, 2, 3$). Stosownie do tej umowy współrzędne wektora \mathbf{A} : A_x, A_y, A_z oznaczają się przez A_1, A_2, A_3 lub krótko A_j ($j = 1, 2, 3$).

W przestrzeni trójwymiarowej bardzo często powtarza się sumowanie od 1 do 3 względem pewnych wskaźników. Dlatego – zgodnie z umową sumacyjną wprowadzoną przez *Einsteina* – opuszczamy znak sumy w jednomianie, jeśli indeks sumowania występuje w nim **dwa razy**. Na przykład:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \sum_{i=1}^3 A_i \mathbf{e}_i = A_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2 + A_3 \mathbf{e}_3 = A_i \mathbf{e}_i, \\ \sum_{i=1}^3 T_{ij} B_j &= T_{i1} B_1 + T_{i2} B_2 + T_{i3} B_3 = T_{ij} B_j, \\ \sum_{i=1}^3 \delta_{pp} &= \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = \delta_{pp}. \end{aligned}$$

Powtarzający się indeks (tzw. wskaźnik niemy) można oznaczyć dowolną literą alfabetu (np. $\delta_{pp} = \delta_{rr} = \delta_{ii}$).

Pochodną cząstkową względem współrzędnej x_i zaznaczamy przecinkiem na poziomie wskaźnika według wzoru:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} () = ()_{,i}.$$

Na przykład

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_j} &= F_{,j}; \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = u_{j,i}; \quad \frac{\partial^2 G_i}{\partial x_k \partial x_l} = G_{i,kl} \\ \frac{\partial}{\partial x_p} (A_i B_{kj}) &= (A_i B_{kj})_{,p} = A_{i,p} B_{kj} + A_i B_{kj,p}. \end{aligned}$$

Tensorem w przestrzeni 3-wymiarowej nazywamy taki obiekt, którego współrzędne przy obrocie układu osi x_i do położenia $x_{i'}$, transformują się według następującego prawa:

$$T_{p'r'...s'} = T_{ij...k} a_{ip'} a_{jr'} \dots a_{ks'},$$

gdzie $a_{ip'} = \cos(x_i, x_{p'}) = a_{p'i}$, a liczba wskaźników określa rząd (walencję) tensora.

Transformacja wektora (tensora I rzędu)

$$A_{p'} = A_i a_{ip'} \quad (i = 1, 2, 3; p' = 1', 2', 3').$$

Identycznie transformują się współrzędne punktów:

$$x_{p'} = x_j a_{jp'}.$$

Transformacja tensora II rzędu

$$\sigma_{p'q'} = \sigma_{ij} a_{ip'} a_{jq'} \quad (i, j = 1, 2, 3, \quad p', q' = 1', 2', 3')$$

Dodawanie tensorów i macierzy

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}: \quad C_i = A_i + B_i,$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{T} + \mathbf{S}: \quad P_{ij} = T_{ij} + S_{ij}.$$

Mnożenie tensorów

$$C_{ijk} = A_i B_{jk},$$

$$P_{ijr} = T_{ijk} S_{kr},$$

$$\Phi = R_{ij} U_{ij},$$

Mnożenie macierzy

$$\underset{m \times n}{\mathbf{C}} = \underset{m \times s}{\mathbf{A}} \underset{s \times n}{\mathbf{B}}: \quad C_{ij} = A_{ir} B_{rj}, (i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n, r = 1, 2, \dots, s),$$

$$\underset{m \times 1}{\mathbf{u}} = \underset{m \times s}{\mathbf{D}} \underset{s \times 1}{\mathbf{x}}: \quad u_i = D_{ir} x_r, (i = 1, 2, \dots, m, r = 1, 2, \dots, s),$$

$$f = \underset{1 \times n}{\mathbf{x}}^T \underset{n \times 1}{\mathbf{z}}: \quad f = x_i z_i, (i = 1, 2, \dots, n).$$

Iloczyn skalarny wektorów

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \varphi = A_i B_i.$$

Delta Kroneckera

$$\delta_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Zamiana wskaźnika za pomocą delty Kroneckera

$$P_j \delta_{jr} = P_r,$$

na przykład

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_i B_j \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = A_i (B_j \delta_{ij}) = A_i B_i.$$

Symbol permutacyjny

$$e_{ijk} = \begin{cases} 0, & \text{gdy } i=j, i=k \text{ lub } j=k, \\ +1, & \text{gdy } i, j, k \text{ przedstawiają permutację cykliczną liczb } 1,2,3 \\ -1, & \text{gdy } i, j, k \text{ przedstawiają permutację cykliczną liczb } 3,2,1. \end{cases}$$

Iloczyn wektorowy

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = e_{ijk} \mathbf{e}_i A_j B_k.$$

Jednostkowy wektor normalny do powierzchni S

$$\mathbf{n} = n_1 \mathbf{e}_1 + n_2 \mathbf{e}_2 + n_3 \mathbf{e}_3 = n_i \mathbf{e}_i,$$

$|\mathbf{n}| = 1$, a współrzędne tego wektora są kosinusami kierunkowymi normalnej do powierzchni S :
 $n_i = \cos(\mathbf{n}, x_i)$, przy czym $n_i \cdot n_i = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$.

Twierdzenie Greena-Ostrogradskiego-Gaussa na zamianę całki powierzchniowej na objętościową:

Jeśli w obszarze o objętości V ograniczonym powierzchnią S określone jest pole wektorowe $\mathbf{F}(x_1, x_2, x_3)$, ciągle wraz z pierwszymi pochodnymi, to obowiązuje wzór:

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \operatorname{div} \mathbf{F} dV$$

lub w zapisie wskaźnikowym

$$\int_S F_i n_i dS = \int_V F_{i,i} dV.$$

Twierdzenie to jest słuszne również dla pola skalarnego $\Phi(x_1, x_2, x_3)$:

$$\int_S \Phi n_j dS = \int_V \Phi_{,j} dV; \quad (j = 1, 2, 3).$$

21.2. O WEKTORACH WŁASNYCH I WARTOŚCIACH WŁASNYCH TENSORA SYMETRYCZNEGO*)

Tensor σ_{jk} można traktować jako operator liniowy przyporządkowujący wektorowi n_k wektor m_i z tej samej przestrzeni, stosownie do transformacji:

$$(a) \quad m_i = \sigma_{jk} n_k.$$

Jeśli wektor m_i jest równoległy do wektora n_k , to wektor n_k nazywamy **wektorem własnym tensora** σ_{jk} . W tym przypadku transformacja (a) przybiera postać:

$$(b) \quad \sigma_{jk} n_k = \sigma n_j.$$

Liczbę σ nazywamy **wartością własną** (główną) **tensora** σ_{jk} .

Rozważmy przypadek, gdy σ_{jk} jest tensorem symetrycznym, czyli $\sigma_{jk} = \sigma_{kj}$, a jego składowe są liczbami rzeczywistymi. Rozłożymy wektor n_j oraz liczbę σ na część rzeczywistą i urojoną:

$$(c) \quad \begin{cases} n_j = \operatorname{Re}(n_j) + i \operatorname{Im}(n_j), \\ \sigma = \operatorname{Re}(\sigma) + i \operatorname{Im}(\sigma), \quad i = \sqrt{-1}. \end{cases}$$

Po podstawieniu (c) do zależności (b) otrzymujemy:

$$\sigma_{jk} [\operatorname{Re}(n_k) + i \operatorname{Im}(n_k)] = [\operatorname{Re}(\sigma) + i \operatorname{Im}(\sigma)] \cdot [\operatorname{Re}(n_j) + i \operatorname{Im}(n_j)].$$

Ponieważ współrzędne σ_{jk} są rzeczywiste, zachodzą zależności:

$$\begin{aligned} \sigma_{jk} \operatorname{Re}(n_k) &= \operatorname{Re}(\sigma) \operatorname{Re}(n_j) - \operatorname{Im}(\sigma) \operatorname{Im}(n_j), \\ \sigma_{jk} \operatorname{Im}(n_k) &= \operatorname{Re}(\sigma) \operatorname{Im}(n_j) + \operatorname{Im}(\sigma) \operatorname{Re}(n_j). \end{aligned}$$

Po pomnożeniu pierwszej z tych zależności przez $\operatorname{Im}(n_j)$, a drugiej przez $\operatorname{Re}(n_j)$ otrzymujemy:

*) Według [52].

$$(d) \quad \begin{cases} \sigma_{jk} \operatorname{Re}(n_k) \operatorname{Im}(n_j) = \operatorname{Re}(\sigma) \operatorname{Re}(n_j) \operatorname{Im}(n_j) - \operatorname{Im}(\sigma) \operatorname{Im}(n_j) \operatorname{Im}(n_j), \\ \sigma_{jk} \operatorname{Im}(n_k) \operatorname{Re}(n_j) = \operatorname{Re}(\sigma) \operatorname{Im}(n_j) \operatorname{Re}(n_j) + \operatorname{Im}(\sigma) \operatorname{Re}(n_j) \operatorname{Re}(n_j). \end{cases}$$

Drugie z powyższych równań, dzięki symetrii tensora σ_{jk} , można zapisać następująco:

$$(e) \quad \sigma_{kj} \operatorname{Re}(n_k) \operatorname{Im}(n_j) = \operatorname{Re}(\sigma) \operatorname{Im}(n_j) \operatorname{Re}(n_j) + \operatorname{Im}(\sigma) \operatorname{Re}(n_j) \operatorname{Re}(n_j).$$

Odejmując stronami równanie (d)₁ od równania (e) mamy:

$$(f) \quad (\sigma_{kj} - \sigma_{jk}) \operatorname{Re}(n_k) \operatorname{Im}(n_j) = \operatorname{Im}(\sigma) \cdot [\operatorname{Re}(n_j) \operatorname{Re}(n_j) + \operatorname{Im}(n_j) \operatorname{Im}(n_j)].$$

Lewa strona równania (f) jest równa zeru, bo $\sigma_{kj} = \sigma_{jk}$. Wynika stąd, że:

$$(g) \quad \operatorname{Im}(\sigma) = 0.$$

Wynika stąd, że **wartości własne tensora symetrycznego są rzeczywiste**.

Oznaczmy przez $n_k^{(1)}$ oraz $n_k^{(2)}$ dwa różne wektory własne, a przez σ_1 i σ_2 dwie odpowiadające im wartości własne tensora symetrycznego σ_{jk} . Stosownie do zależności (b) zachodzą równania:

$$\sigma_{jk} n_k^{(1)} = \sigma_1 n_j^{(1)}, \quad \sigma_{jk} n_k^{(2)} = \sigma_2 n_j^{(2)}.$$

Pierwsze z nich mnożymy przez $n_j^{(2)}$, a drugie przez $n_j^{(1)}$ i odejmujemy stronami. Prowadzi to do zależności:

$$(h) \quad (\sigma_{jk} - \sigma_{kj}) n_k^{(1)} n_j^{(2)} = (\sigma_1 - \sigma_2) n_j^{(1)} n_j^{(2)}.$$

Lewa strona tego równania jest równa zeru, bo $\sigma_{jk} = \sigma_{kj}$. Jeżeli $\sigma_1 \neq \sigma_2$, to

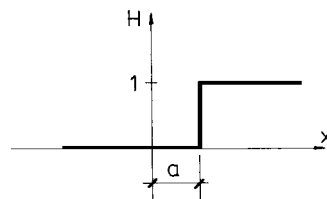
$$(i) \quad n_j^{(1)} \cdot n_j^{(2)} = 0.$$

Wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym tensora symetrycznego **są** zatem **wzajemnie prostopadłe**.

21.3. FUNKCJA HEAVISIDE'A I FUNKCJA DIRACA

W praktyce występuje wiele funkcji, które trzeba definiować przedziałami. Rozważmy np. następującą funkcję:

$$(a) \quad H(x-a) = \frac{1}{2} \cdot [\operatorname{sgn}(x-a) + 1] = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{1}{2}, & x = a, \\ 1, & x > a. \end{cases}$$

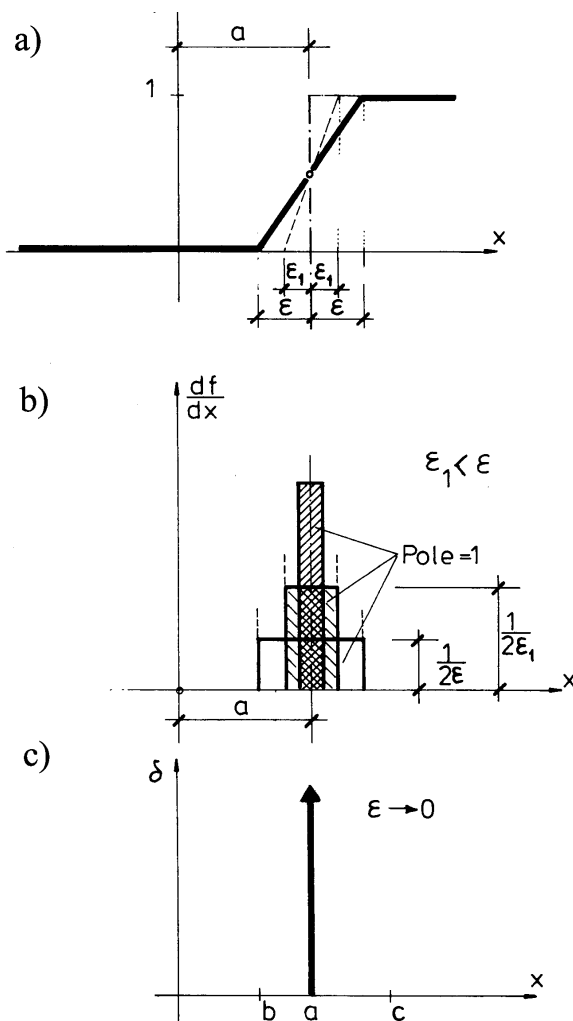


Rys. 21.1

Jest to tzw. funkcja skoku jednostkowego lub funkcja *Heaviside'a* (rys. 21.1). W punkcie $x = a$ funkcja $H(x-a)$ jest ściśle biorąc nieciągła. Rozwijając ją jednak w szereg Fouriera dla $x = a$, zakłada się niekiedy, że jej wartość – stosownie do wzoru (a) – wynosi 1/2.

Pochodna funkcji *Heaviside'a* w tradycyjnym sensie nie istnieje. Pewien pogląd na tę sprawę daje analiza pochodnej funkcji ciągłej, będącej przybliżeniem funkcji $H(x-a)$. Rozważmy mianowicie funkcję przedstawioną na rys. 21.2a i zapisaną następująco:

$$(b) \quad f(x-a) = \begin{cases} 0, & x < a-\varepsilon, \\ \frac{x-(a-\varepsilon)}{2\varepsilon}, & a-\varepsilon < x < a+\varepsilon, \\ 1, & x > a+\varepsilon. \end{cases}$$



Rys. 21.2

Pochodna tej funkcji jest określona zależnością (por. rys. 21.2b):

$$(c) \quad \frac{df}{dx} = f'(x-a) = \begin{cases} 0, & x < a-\varepsilon, \\ \frac{1}{2\varepsilon}, & a-\varepsilon < x < a+\varepsilon, \\ 0, & x > a+\varepsilon. \end{cases}$$

Zwróćmy uwagę na bardzo istotną własność. Chodzi o to, że pole prostokąta odpowiadającego wykresowi pochodnej jest zawsze równe 1, niezależnie od wartości ε . W miarę zmniejszania ε rzędna funkcji $f(x-a)$ rośnie, by dla $\varepsilon = 0$ osiągnąć wartość nieskończoną (rys. 21.2c). Ten graniczny przypadek możemy uważać za pochodną funkcji $H(x-a)$. Nazywamy ją funkcją *Diraca* (delta) i definiujemy następująco:

$$(d) \quad \delta(x-a) = H'(x-a) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{df}{dx} = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \infty, & x = a, \\ 0, & x > a. \end{cases}$$

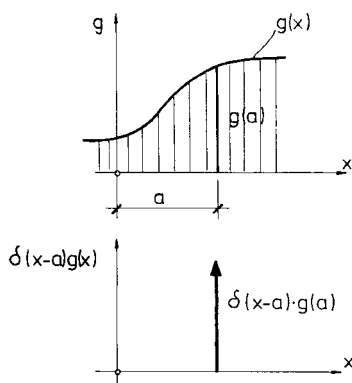
Funkcję *Diraca* można sobie wyobrazić jako prostokąt o nieskończonej wysokości i zerowej szerokości oraz o polu równym jedności. Tę ostatnią własność można zapisać następująco:

$$(e) \quad \int_b^c \delta(x-a) dx = 1, \quad b < a < c.$$

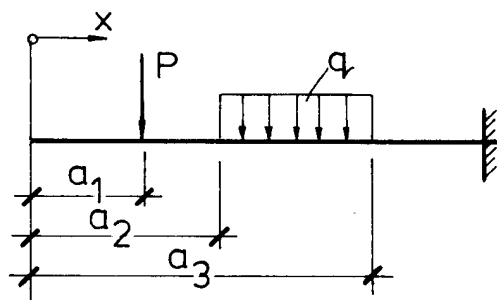
Drugą bardzo ważną cechą funkcji delta jest własność filtracji. Polega ona na tym, że zachodzi zależność (por. rys. 21.3):

$$(f) \quad \int_b^c \delta(x-a) \cdot g(x) \cdot dx = g(a).$$

Własność filtracji wynika bezpośrednio z zależności (e).



Rys. 21.3



Rys. 21.4

Wprowadzenie funkcji *Heaviside'a* i *Diraca* dało początek tzw. teorii dystrybucji, czyli teorii funkcji uogólnionych. Podstawy teorii dystrybucji powstały już w drugiej połowie XIX wieku, jakkolwiek kompletną teorię i spójny aparat pojęciowy zbudowano w latach czterdziestych obecnego stulecia. Dystrybucje $H(x-a)$ i $\delta(x-a)$ pozwalają w zwarty sposób zapisać i wykonywać całkowanie funkcji nieciągłych. Na przykład obciążenie belki z rys. 21.4 można wyrazić następująco:

$$q(x) = P \cdot \delta(x-a_1) + q \cdot [H(x-a_2) - H(x-a_3)].$$

Praktyczny sens bezpośredniego całkowania funkcji nieciągłych poznamy przy omawianiu metody zaproponowanej przez *Clebscha* już w 1862 roku (por. p. 21.4). Użyteczność zapisu dystrybucyjnego można również zaobserwować przy formułowaniu równań pracy wirtualnej, tam, gdzie występują skupione siły lub odkształcenia.

21.4. CAŁKOWANIE RÓWNIANIA RÓŻNICZKOWEGO LINII UGIĘCIA METODĄ CLEBSCHA

Metodę *Clebscha* zilustrujemy na przykładzie belki pryzmatycznej z rys. 21.5a. Równanie różniczkowe linii ugięcia ma postać:

$$(a) \quad -EJ \cdot w'' = M(x),$$

przy czym równanie $M(x)$ jest opisane ośmioma różnymi funkcjami w każdym z przedziałów: 0–1, 1–2, ..., 7–8. W każdym z nich obciążenie belki jest ciągłe.

W podejściu klasycznym należałoby rozwiązać osiem równań różniczkowych (a), a szesnaście stałych

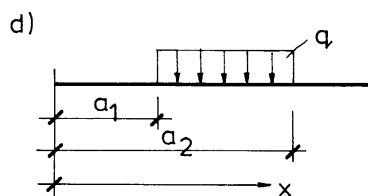
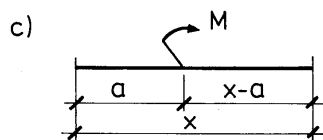
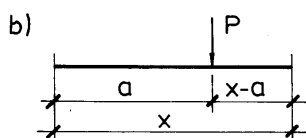
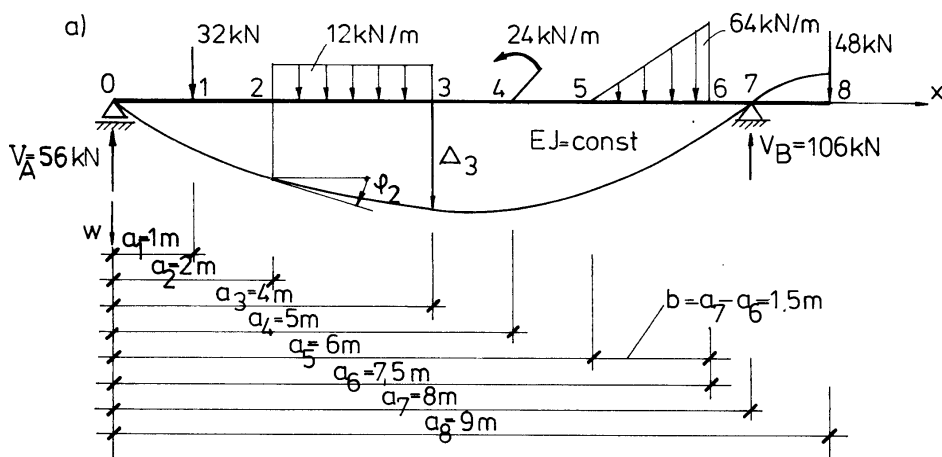
całkowania obliczyć z warunków brzegowych i równań ciągłości funkcji $w(x)$ oraz $w'(x)$ na granicy przedziałów.

Sens metody *Clebscha* polega na odpowiednim zapisaniu równania momentów $M(x)$ w postaci jednej funkcji. Daje to tę korzyść, że niezależnie od charakteru funkcji obciążenia $q(x)$ liczba stałych całkowania odpowiada rzędowi równania różniczkowego (a) i jest zawsze równa dwa.

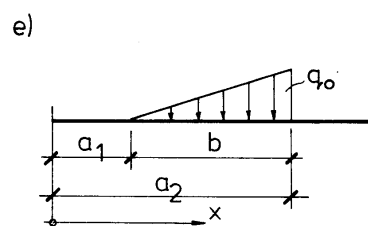
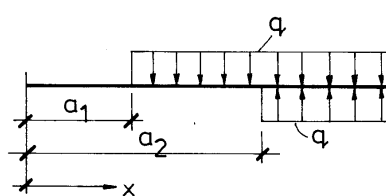
Zasady zapisu funkcji momentów i sposobu całkowania są w istocie rzeczy efektem zastosowania podejścia właściwego teorii dystrybucji. Zasady te można streścić w następujących punktach:

- początek układu współrzędnych (x, w) przyjmuje się na lewym końcu belki,
- wszystkie składowe wyrażenia na moment zginający w przedziale poprzednim muszą powtórzyć się bez zmian w przedziale następnym,
- wszystkie człony wyrażenia na moment zginający powinny zawierać mnożnik $(x - a_i)^n$, gdzie a_i oznacza odległość początku danego przedziału od początku układu współrzędnych, a n – liczbę naturalną,
- całkowanie równania powinno przebiegać bez rozwijania wyrażen w nawiasach według schematu:

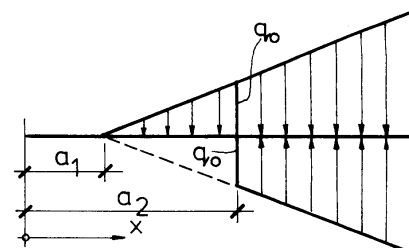
$$(b) \quad \frac{1}{n!} \int (x - a_i)^n dx = \frac{(x - a_i)^{n+1}}{(n+1)!} + C.$$



≡



≡



Rys. 21.5

Pewnego komentarza wymaga spełnienie zasad b) i c). Przy działaniu siły skupionej mnożnik $(x - a_i)^n$ występuje w sposób naturalny, gdyż dla $x > a_i$ mamy $M(x) = -P(x - a_i)^1$ (rys. 21.5b). Wpływ momentu skupionego M_0 należy zapisać w postaci wyrażenia $M(x) = M_0(x - a_i)^0$ (rys. 21.5c). Dla najczęściej występujących obciążeń ciągłych wyrażenie na moment zginający układamy, jak następuje:

– obciążenie równomiernie rozłożone q (rys. 21.5d):

$$(c) \quad M(x) = \begin{cases} -q \frac{(x - a_1)^2}{2!}, & a_1 \leq x \leq a_2, \\ -q \frac{(x - a_1)^2}{2!} \Big| + q \frac{(x - a_2)^2}{2!}, & x \geq a_2. \end{cases}$$

– obciążenie trójkątne (rys. 21.5e):

$$(d) \quad M(x) = \begin{cases} -\frac{q_o}{b} \cdot \frac{(x - a_1)^3}{3!}, & a_1 \leq x \leq a_2, \\ -\frac{q_o}{b} \cdot \frac{(x - a_1)^3}{3!} \Big| + q_o \frac{(x - a_2)^2}{2!} + \frac{q_o}{b} \cdot \frac{(x - a_2)^3}{3!}, & x \geq a_2. \end{cases}$$

gdzie $b = a_2 - a_1$.

Dla $x \geq a_2$ po lewej stronie kreski pionowej zapisano wyrażenie powtórzone z przedziału poprzedniego. Po prawej stronie kreski pionowej podano wpływ obciążenia „wygaszającego”, likwidującego wpływ obciążenia zapisanego w przedziale poprzednim (por. rys. 21.5d,e). Całkowanie w rozważanej belce przebiega następująco:

$$\begin{aligned} -EJ \cdot w'''' &= 56 \cdot \frac{(x-0)^1}{1!} \Big|_0^1 - 32 \cdot \frac{(x-1)^1}{1!} \Big|_1^2 - 12 \cdot \frac{(x-2)^2}{2!} \Big|_2^3 + 12 \cdot \frac{(x-4)^2}{2!} \Big|_3^4 - \\ &- 24 \cdot \frac{(x-5)^0}{0!} \Big|_4^5 - \frac{64}{1,5} \cdot \frac{(x-6)^3}{3!} \Big|_5^6 + 64 \cdot \frac{(x-7,5)^2}{2!} + \frac{64}{1,5} \cdot \frac{(x-7,5)^3}{3!} \Big|_6^7 + 106 \cdot \frac{(x-8)^1}{1!} \Big|_7^8, \\ -EJ \cdot w''' &= C + 56 \cdot \frac{(x-0)^2}{2!} \Big|_0^1 - 32 \cdot \frac{(x-1)^2}{2!} \Big|_1^2 - 12 \cdot \frac{(x-2)^3}{3!} \Big|_2^3 + 12 \cdot \frac{(x-4)^3}{3!} \Big|_3^4 - \\ &- 24 \cdot \frac{(x-5)^1}{1!} \Big|_4^5 - \frac{64}{1,5} \cdot \frac{(x-6)^4}{4!} \Big|_5^6 + 64 \cdot \frac{(x-7,5)^3}{3!} + \frac{64}{1,5} \cdot \frac{(x-7,5)^4}{4!} \Big|_6^7 + 106 \cdot \frac{(x-8)^2}{2!} \Big|_7^8, \\ -EJ \cdot w'' &= Cx + D + 56 \cdot \frac{(x-0)^3}{3!} \Big|_0^1 - 32 \cdot \frac{(x-1)^3}{3!} \Big|_1^2 - 12 \cdot \frac{(x-2)^4}{4!} \Big|_2^3 + 12 \cdot \frac{(x-4)^4}{4!} \Big|_3^4 - \\ &- 24 \cdot \frac{(x-5)^2}{2!} \Big|_4^5 - \frac{64}{1,5} \cdot \frac{(x-6)^5}{5!} \Big|_5^6 + 64 \cdot \frac{(x-7,5)^4}{4!} + \frac{64}{1,5} \cdot \frac{(x-7,5)^5}{5!} \Big|_6^7 + 106 \cdot \frac{(x-8)^3}{3!} \Big|_7^8, \end{aligned}$$

Na uwagę zasługuje fakt, że stałe całkowania C i D obowiązują dla wszystkich przedziałów, a wartości prawych stron w danym przedziale otrzymuje się po uwzględnieniu wartości ze wszystkich poprzednich przedziałów. Stałe całkowania obliczamy z warunków brzegowych:

$$w(0) = 0, \quad w(8) = 0.$$

Z pierwszego z nich (przedział 0–1) wynika, że

$$-EJ w(0) = C \cdot 0 + D = 0, \quad \text{skąd } D = 0.$$

Z drugiego otrzymujemy (przedział 7–8):

$$-EJ \cdot w(8) = C \cdot 8 + 56 \cdot \frac{8^3}{6} - 32 \cdot \frac{7^3}{6} - 12 \cdot \frac{6^4}{24} + 12 \cdot \frac{4^4}{24} - 24 \cdot \frac{3^2}{2} - \frac{64}{1,5} \cdot \frac{2^5}{120} + 64 \cdot \frac{0,5^4}{24} + \frac{64}{1,5} \cdot \frac{0,5^5}{125} = 0,$$

skąd $C = -288,9 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$.

Wykorzystując powyższe rezultaty obliczymy dla przykładu ugięcie w punkcie 3 ($x = 4 \text{ m}$) i kąt obrotu w punkcie 2 ($x = 2 \text{ m}$):

$$\Delta_3 = w(4) = -\frac{1}{EJ} \cdot \left[-288,9 \cdot 4 + 56 \cdot \frac{4^3}{6} - 32 \cdot \frac{3^3}{6} - 12 \cdot \frac{2^4}{24} \right] = \frac{709,9}{EJ},$$

$$\varphi_2 = w'(2) = -\frac{1}{EJ} \cdot \left[-288,9 + 56 \cdot \frac{2^2}{2} - 32 \cdot \frac{1^2}{2} \right] = \frac{192,8}{EJ}.$$

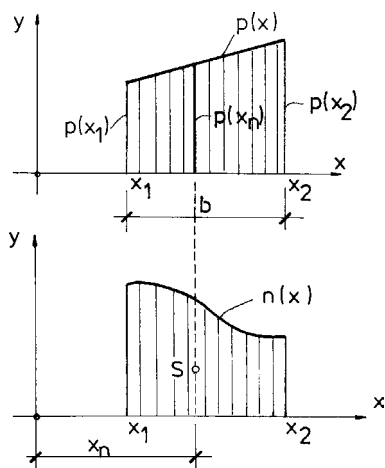
21.5. CAŁKOWANIE GRAFICZNE

Rozważmy całkę oznaczoną z iloczynu dwóch funkcji ciągłych:

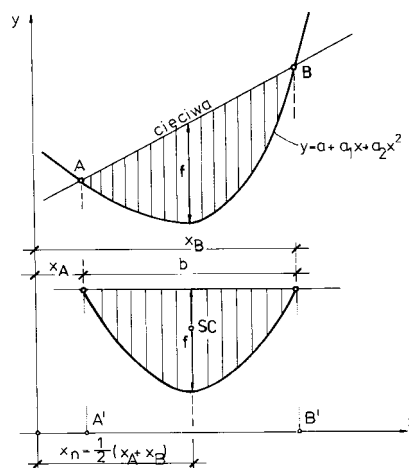
$$(a) \quad I = \int_{x_1}^{x_2} p(x)n(x) dx,$$

gdzie $p(x)$ jest funkcją liniową, a $n(x)$ jest funkcją nieliniową zmiennej x . Z rysunku 21.6 wynika, że:

$$(b) \quad p(x) = p_1 + \frac{p_2 - p_1}{b} \cdot x.$$



Rys. 21.6



Rys. 21.7

Wobec tego

$$I = p_1 \int_{x_1}^{x_2} n(x) dx + \frac{p_2 - p_1}{b} \int_{x_1}^{x_2} x n(x) dx.$$

Pierwsza z całek przedstawia pole wykresu nieliniowego A_n . Druga całka jest równa momentowi statycznemu tego pola względem osi y i wynosi $A_n \cdot x_n$, gdzie x_n oznacza odległość środka ciężkości wykresu nieliniowego od osi y . Całkę (a) można zatem zapisać następująco:

$$I = p_1 A_n + \frac{p_2 - p_1}{b} x_n A_n = A_n \left(p_1 + \frac{p_2 - p_1}{b} x_n \right) = A_n p(x_n),$$

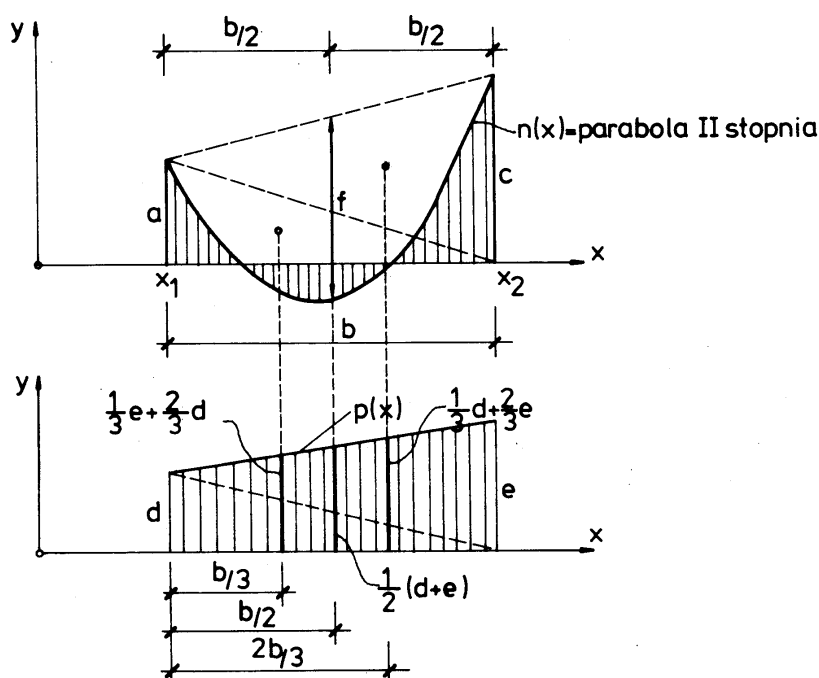
przy czym $p(x_n)$ jest rzędną wykresu liniowego dla odciętej $x = x_n$, określającej położenie środka ciężkości wykresu nieliniowego. Ostatecznie uzyskujemy bardzo użyteczną formułę, stanowiącą treść tzw. całkowania graficznego i zwanego czasami sposobem *Wiereszczagina*:

$$(c) \quad \int_{x_1}^{x_2} p(x) n(x) dx = A_n p(x_n).$$

Aby obliczyć całkę (a), trzeba znać wzór na pole funkcji krzywoliniowej i położenie środka ciężkości. Wzór (c) obowiązuje oczywiście również wtedy, gdy funkcja $n(x)$ jest liniowa.

W mechanice konstrukcji bardzo często wykresem krzywoliniowym jest parabola drugiego stopnia, będąca wykresem momentów pochodzących od obciążenia równomiernego, $q = \text{const}$. Parabola drugiego stopnia ma pewną interesującą własność, którą warto wykorzystać. Okazuje się, że fragment paraboli odcięty dowolnie poprowadzoną cięciwą po „wyprostowaniu” daje zawsze parabolę o wierzchołku leżącym w połowie odcinka $A'B'$ o odciętej $x_n = (x_A + x_B) / 2$ (por. rys. 21.7). Łatwo sprawdzić, że pole takiego odcinka $A_n = (2/3)bf$, gdzie b jest podstawą, a f wysokością odcinka paraboli.

Wszystkie wyżej stwierdzone fakty wykorzystamy do obliczenia całki z funkcji będącej wynikiem przemnożenia wykresów podanych na rys. 21.8:



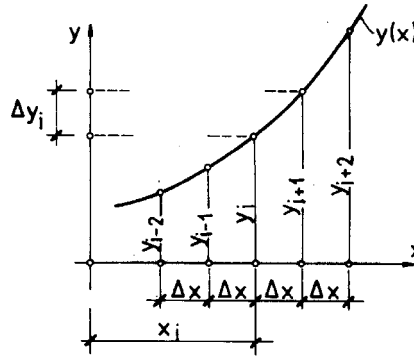
Rys. 21.8

$$(d) \quad \int_{x_1}^{x_2} p(x) n(x) dx = -\frac{2}{3}bf \frac{(d+e)}{2} + \frac{ab}{2} \left(\frac{1}{3}e + \frac{2}{3}d \right) + \frac{cb}{2} \left(\frac{1}{3}d + \frac{2}{3}e \right).$$

Jeżeli parabola jest wykresem momentów pochodzących od obciążenia $q = \text{const}$, to wiadomo, że $f = qb^2/8$. Wówczas do obliczenia całki nie trzeba nawet pisać równania funkcji momentów. Funkcję liniową najwygodniej jest potraktować jako sumę dwóch trójkątów. Ten właśnie sposób przyjęto przy układaniu wzoru (d).

21.6. METODA RÓŻNIC SKOŃCZONYCH

Metoda różnic skończonych służy do przybliżonego rozwiązywania równań różniczkowych. Zasadniczy sens tej metody polega na zastąpieniu pochodnych przez ilorazy różnicowe.



Rys. 21.9

Rozważmy ciągłą i różniczkowalną funkcję $y(x)$. Pierwszą pochodną funkcji $y(x)$ w punkcie $x = x_i$ można w przybliżeniu określić kilkoma sposobami (por. rys. 21.9):

$$(a) \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_i} \approx \Delta \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)_i^+ = \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}$$

$$(b) \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_i} \approx \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)_i^- = \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x}$$

$$(c) \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_i} \approx \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)_i = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)_i^+ + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)_i^- \right] = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\Delta x}.$$

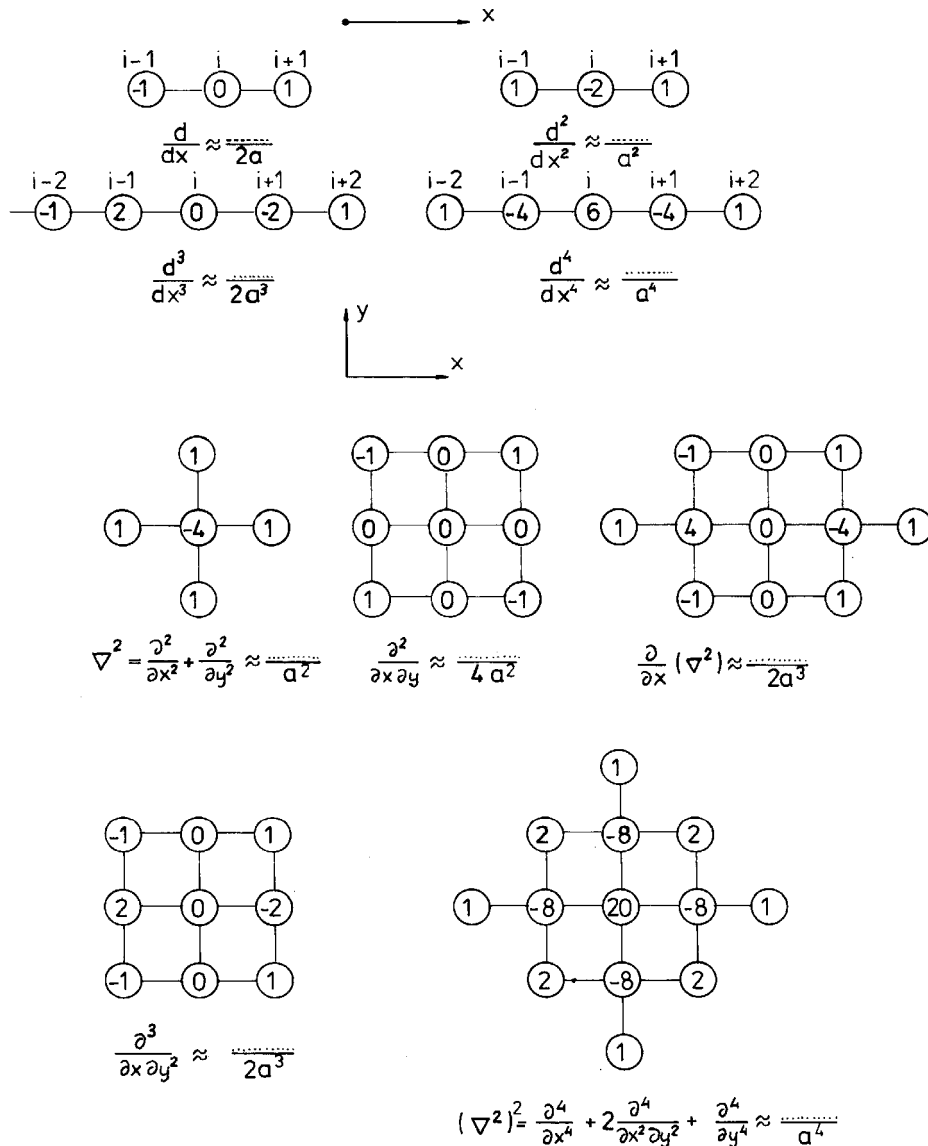
Wzór (a) opisuje tzw. różnicę prawostronną („w przód”), wzór (b) – różnicę lewostronną („w tył”) a wzór (c) – różnicę centralną. Jeżeli poprzestaniemy na wyrażeniach liniowych, to zgodnie z twierdzeniem o wartości średniej najlepsze przybliżenie pierwszej pochodnej stanowi różnica centralna. W istocie rzeczy różnica prawostronna jest najlepszym przybliżeniem nie dla $x = x_i$, lecz dla $x = x_i + \Delta x / 2$. Podobnie różnica lewostronna jest najlepszym przybliżeniem liniowym dla $x = x_i - \Delta x / 2$.

Najlepsze liniowe przybliżenie drugiej pochodnej wyraża się następująco:

$$(d) \quad \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=x_i} \approx \left(\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} \right)_i = \frac{1}{\Delta x} \cdot \left[\left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)_i^+ - \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)_i^- \right] = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{(\Delta x)^2}.$$

Zależności (c) i (d) łatwo uogólnić na pochodne dowolnego rzędu (por. np. Pietrzak, Rakowski, Wrześniowski [35]):

$$(e) \quad \frac{d^n y}{dx^n} \Big|_{x=x_i} \approx \left(\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n} \right)_i = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n} \right)_i^+ + \left(\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n} \right)_i^- \right], & n = 2k-1, \\ \frac{1}{\Delta x} \left[\left(\frac{\Delta^{n-1} y}{\Delta x^{n-1}} \right)_i^+ - \left(\frac{\Delta^{n-1} y}{\Delta x^{n-1}} \right)_i^- \right], & n = 2k, \end{cases} \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

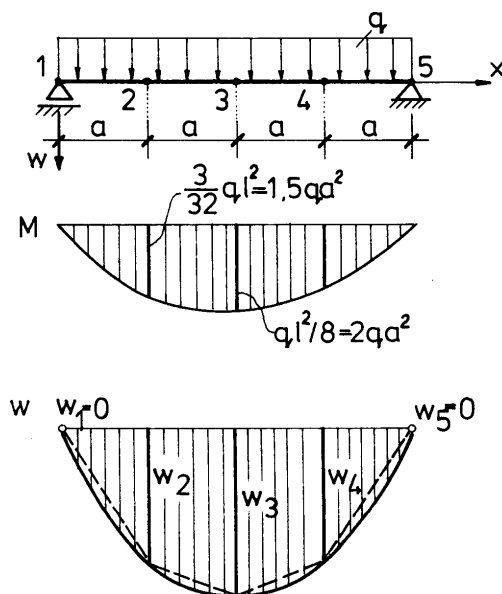


Rys. 21.10

Ogólnie biorąc problem najlepszego przybliżenia nie jest jednak tak prosty, jak wskazują powyższe rozważania. Dotyczy to w szczególności pochodnych cząstkowych funkcji wielu zmiennych lub złożonych operatorów różniczkowych. Chodzi bowiem o to, by błąd przybliżeń wszystkich operatorów różniczkowych występujących w równaniu różniczkowym i warunkach granicznych był tego samego rzędu. Analizę błędu przeprowadza się na podstawie rozwinięć funkcji w szereg *Taylora* lub za pomocą rachunku wariacyjnego.

Na rysunku 21.10 zestawiono najlepsze przybliżenia liniowe pochodnych funkcji jednej i dwóch zmiennych według monografii *Timoshenki i Woynowskiego-Kriegera*, [50]. Przyjęto tu, że siatka współrzędnych jest kwadratowa, przy czym $\Delta x = \Delta y = a$.

Dodamy jeszcze, że w ostatnich latach nastąpił znaczny rozwój metody różnic skończonych. Siatki współrzędnych mogą być zupełnie dowolne, a optymalne rozmieszczenie węzłów siatki ustala się na podstawie analizy błędów i charakteru przebiegu funkcji. Należy podkreślić, że metoda różnic skończonych, jak każda metoda przybliżona, daje w pełni wiarygodne wyniki tylko do funkcji regularnych (bez osobliwości, nieróżniczkowości, nieciągłości itp.).



Rys. 21.11

Zastosowanie metody różnic skończonych zilustrujemy kilkoma przykładami. Wyznamy najpierw przybliżony kształt linii ugięcia belki pryzmatycznej, swobodnie podpartej, obciążonej równomiernie (rys. 21.11). Ponieważ układ jest statycznie wyznaczalny (pole momentów jest znane), ugięcie $w(x)$ obliczymy z równania różniczkowego drugiego rzędu:

$$(f) \quad \frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EJ}$$

przy warunkach brzegowych $w(0) = w(l) = 0$. Belkę dzielimy przykładowo na cztery części ($\Delta x = a = 0,25l$) i dla każdego węzła wewnętrznego układamy równanie różnicowe:

$$\left(\frac{\Delta^2 w}{\Delta x^2} \right)_i = \frac{w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}}{a^2} = -\frac{M_i}{EJ}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Mamy zatem

$$\begin{aligned} i = 2: \quad w_1 - 2w_2 + w_3 &= -\frac{a^2}{EJ} \cdot 1,5qa^2, \\ i = 3: \quad w_2 - 2w_3 + w_4 &= -\frac{a^2}{EJ} \cdot 2qa^2, \\ i = 4: \quad w_3 - 2w_4 + w_5 &= -\frac{a^2}{EJ} \cdot 1,5qa^2. \end{aligned}$$

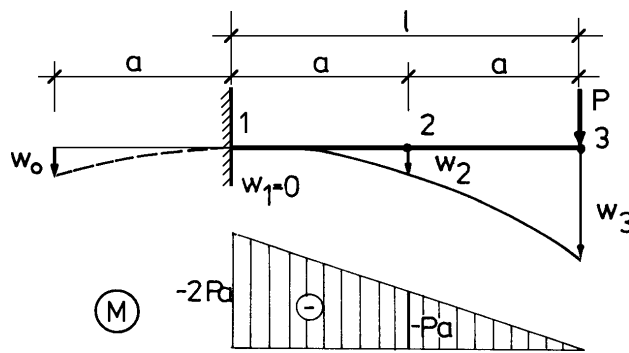
Z symetrii zadania wynika, że $w_2 = w_4$, a z warunków brzegowych, że $w(0) = w_1 = w(l) = w_5 = 0$. Wobec tego otrzymujemy ostatecznie dwa równania liniowe na w_2 i w_3 :

$$\begin{aligned} -2w_2 + w_3 &= -1,5 \cdot \frac{qa^2}{EJ}, \\ w_2 - w_3 &= -\frac{qa^2}{EJ}. \end{aligned}$$

Rozwiązaniem tego układu są wartości:

$$\begin{aligned} w_2 &= 2,5 \frac{qa^4}{EJ} = 0,00977 \cdot \frac{ql^4}{EJ}, \\ w_3 &= 3,5 \frac{qa^4}{EJ} = 0,01367 \cdot \frac{ql^4}{EJ} \approx \frac{5}{384} \cdot \frac{ql^4}{EJ} = 0,01302 \frac{ql^4}{EJ}. \end{aligned}$$

Widzimy, że maksymalne ugięcie w_3 różni się od wartości ścisłej tylko o około 5%. Dokładniejszy wynik otrzymamy przy gęstszym podziale belki.



Rys. 21.12

Dla belki wspornikowej z rys. 21.12 obowiązują warunki brzegowe:

$$\begin{cases} w(0) = 0, & \text{czyli } w_1 = 0, \\ w'(0) = 0, & \text{czyli } \left(\frac{\Delta w}{\Delta x}\right)_1 = \frac{w_2 - w_0}{2a} = 0, \text{ zatem } w_0 = w_2. \end{cases}$$

Równania różnicowe dla punktów 1 i 2 są następujące:

$$\begin{aligned} w_0 - 2w_1 + w_2 &= 2Pa^3 / (EJ), \\ w_1 - 2w_2 + w_3 &= Pa^3 / (EJ). \end{aligned}$$

Po uwzględnieniu warunków brzegowych równania te modyfikują się do postaci:

$$\begin{aligned} w_2 &= Pa^3 / (EJ) \\ -2w_2 + w_3 &= Pa^3 / (EJ), \end{aligned}$$

skąd

$$w_3 = 3Pa^3 / (EJ) = \frac{3}{8} Pl^3 / (EJ) = 0,375 Pl^3 / (EJ).$$

Uzyskany rezultat jest większy od wartości ścisłej o około 12%.

$$(w_{\max} = 0,333 pl^3 / (EJ).$$

Na zakończenie zbadamy skręcanie izotropowego pręta sprężystego o przekroju kwadratowym. W celu uzyskania zadowalających rezultatów należałoby wprowadzić bardzo gęstą siatkę współrzędnych. Z uwagi na wyłącznie ilustracyjne ujęcie metody różnic skończonych ograniczymy się do siatki, w której występują trzy niewiadome wartości funkcji naprężeń $F(y, z)$. Temat zadania objaśnia rys. 21.13. Funkcja naprężeń musi spełniać równanie różniczkowe cząstkowe:

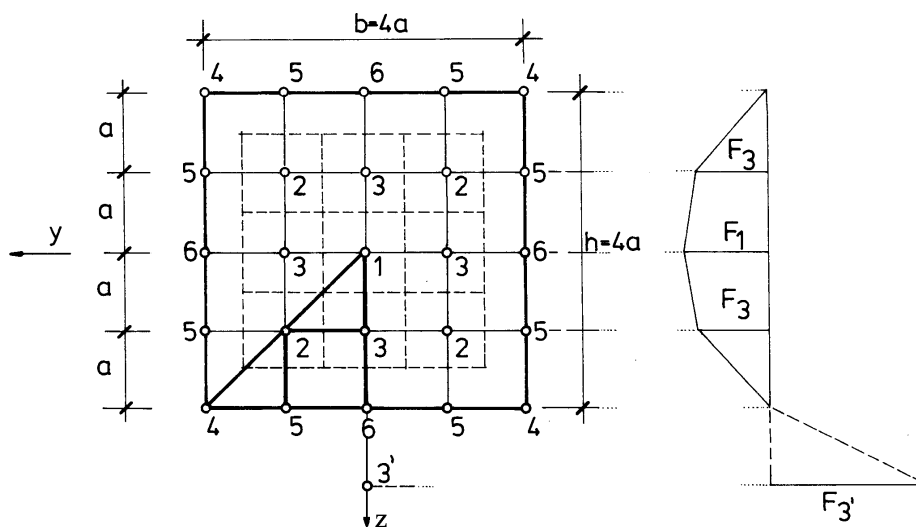
$$(g) \quad \nabla^2 F = -2G\theta, \quad \text{gdzie} \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

przy warunku brzegowym na konturze przekroju pręta $F_c = 0$. Objętość bryły zawartej między płaszczyzną przekroju a rzędnymi funkcji $F(y, z)$ jest związana z momentem skręcającym \mathfrak{M} zależnością

$$(h) \quad V = \frac{1}{2} \mathfrak{M},$$

a naprężenia τ_{xy} i τ_{xz} wynoszą:

$$(i) \quad \tau_{xy} = \frac{\partial F}{\partial z}, \quad \tau_{xz} = \frac{\partial F}{\partial y}.$$



Rys. 21.13

Na rysunku 21.13 uwzględniono własność symetrii funkcji $F(y, z)$ względem osi układu współrzędnych i uwidoczniono rzędne F_1 , F_2 i F_3 . Wartości brzegowe, stosownie do warunku $F_c = 0$, są równe zero: czyli $F_4 = F_5 = F_6 = 0$. Niewiadome wartości F_1 , F_2 i F_3 obliczymy z równań różnicowych ułożonych dla wewnętrznych punktów przekroju pręta (punkty 1, 2 i 3). Równania te są następujące (por. rys. 21.10 i rys. 21.13):

$$\begin{aligned} \text{punkt 1:} \quad & 4F_3 - 4F_1 = -\alpha, \\ \text{punkt 2:} \quad & 2F_3 + 2F_5 - 4F_2 = -\alpha, \\ \text{punkt 3:} \quad & 2F_2 + F_1 + F_6 - 4F_3 = -\alpha, \end{aligned}$$

gdzie $\alpha = 2G\theta a^2$.

Po uporządkowaniu tych równań oraz uwzględnieniu, że $F_5 = F_6 = 0$, otrzymujemy układ równań liniowych na wartości F_1 , F_2 i F_3 :

$$\begin{aligned} -4F_1 \quad & + 4F_3 = -\alpha, \\ -4F_2 + 2F_3 & = -\alpha, \\ F_1 + 2F_2 - 4F_3 & = -\alpha. \end{aligned}$$

Rozwiązaniem tego układu są wartości:

$$F_1 = \frac{9}{8}\alpha, \quad F_2 = \frac{11}{16}\alpha, \quad F_3 = \frac{7}{8}\alpha.$$

Obliczymy teraz objętość V występującą we wzorze (h). W tym celu każdemu punktowi wewnętrznemu przypiszemy pewną powierzchnię. Przyjmiemy, że będą to kwadraty o boku a i środku wypadającym w

danym węźle siatki współrzędnych. Przydział powierzchni zaznaczono liniami przerywanymi. Zakładamy dalej, że w obrębie powierzchni przypisanej każdemu punktowi rzędne funkcji naprężeń są stałe. Całkowita objętość będzie zatem sumą iloczynów pola podstawy a^2 i wysokości „słupka” F_i :

$$(j) \quad V \approx a^2 (F_1 + 4F_2 + 4F_3) = \frac{1}{2} \mathfrak{M}.$$

Po podstawieniu obliczonych wartości F_1 , F_2 i F_3 otrzymujemy:

$$a^2 \left(\frac{9}{8} + \frac{4 \cdot 11}{16} + \frac{4 \cdot 7}{8} \right) \alpha = \frac{1}{2} \mathfrak{M},$$

skąd

$$(k) \quad \alpha = 2G\theta a^2 = \frac{\mathfrak{M}}{14,74a^2}.$$

Bezpośrednio z zależności (k) można obliczyć przybliżoną wartość momentu bezwładności na skręcanie, gdyż:

$$G\theta = \frac{\mathfrak{M}}{J_s} = \frac{\mathfrak{M}}{29,5a^4},$$

czyli

$$J_s = 29,5a^4 = 29,5 \left(\frac{b}{4} \right)^4 = 0,115b^4.$$

Ponieważ wartość dokładna $J_s = 0,141b^4$, więc błąd uzyskanego rezultatu sięga 18%.

Maksymalne naprężenie styczne występuje w punkcie 6:

$$\tau_{\max} = \tau_{xy}(0,2a) = \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{F_3 - F_{3'}}{2a}.$$

Napotyka tu na istotną trudność, bo nie znamy wartości $F_{3'}$. Dla jej wyznaczenia należy ekstrapolować funkcję $F(y, z)$ poza kontur przekroju pręta, korzystając

z tego, że równanie różniczkowe problemu skręcania (g) jest słuszne również dla punktu 6:

$$-4F_6 + 2F_5 + F_3 + F_{3'} = -\alpha,$$

skąd ($F_5 = F_6 = 0$)

$$F_{3'} = -\alpha - F_3 = -\frac{15}{8}\alpha.$$

Wobec tego

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2a} \cdot \left(\frac{7}{8} + \frac{15}{8} \right) \alpha = \frac{1,375\alpha}{a}.$$

Stosownie do wzoru (k) współczynnik α można wyrazić albo przez jednostkowy kąt skręcenia θ , albo przez moment skręcający \mathfrak{M} . W pierwszym przypadku otrzymujemy:

$$(l) \quad \tau_{\max} = \frac{1,375 \cdot 2G\theta a^2}{a} = \frac{2,75G\theta b}{4} = 0,688 G\theta b,$$

w drugim:

$$(m) \quad \tau_{\max} = \frac{1,375 \cdot \mathfrak{M}}{14,75a^3} = \frac{1,375 \cdot 64}{14,75} \cdot \frac{\mathfrak{M}}{b^3} = \frac{\mathfrak{M}}{0,168b^3}.$$

Wartość wynikająca ze wzoru (l) jest mniejsza od wartości ścisłej tylko o około 1,4% ($\tau_{\max} = 0,878G\theta b$). Wykorzystanie tego wzoru jest jednak uwarunkowane znajomością ścisłej wartości jednostkowego kąta skręcenia. Wzór (m) prowadzi do wartości większej od wartości ścisłej aż o około 20% ($\tau_{\max} = \mathfrak{M} / (0,208b^3)$). W celu polepszenia wyników należy wprowadzić dużo gęstszą siatkę. Wpływ zmniejszenia oczek siatki jest jednak stosunkowo mały. Świadczy o tym np. wartość $J_s = 0,147b^4$, obliczona dla oczka $a = b/12$ (21 niewiadomych!), w dalszym ciągu obarczona dosyć znacznym błędem (4,2%).

21.7. METODA NEWTONA-RAPHSONA

Metoda ta jest uogólnieniem znanej metody *Newtona* na przypadek układu równań nieliniowych.

Sens metody *Newtona-Raphsona* wyjaśnimy na przykładzie układu dwóch równań nieliniowych, zapisanych następująco:

$$(a) \quad \begin{cases} g_1(x_1, x_2) = 0, \\ g_2(x_1, x_2) = 0. \end{cases}$$

Chodzi o obliczenie pierwiastków x_1^* i x_2^* , wyznaczających jeden z punktów przecięcia się krzywych g_1 i g_2 . Proces obliczania składa się z kolejnych iteracji (przybliżeń). W metodach iteracyjnych kluczowym zagadnieniem jest określenie „recepty” na polepszenie poprzedniego przybliżenia. Założymy zatem, że przybliżone wartości pierwiastków wynoszą x_1 i x_2 . Poszukujemy przyrostów Δx_1 i Δx_2 , które dodane odpowiednio do wartości x_1 i x_2 dadzą w wyniku wartości bliższe rozwiązaniu ścisłemu. Przyrosty te obliczamy, korzystając z rozwinięć funkcji $g_1(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2)$ i $g_2(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2)$ w szereg *Taylora*. Jeśli poprzestaniemy jedynie na składnikach liniowych tego szeregu oraz będziemy jednocześnie wymagać spełnienia układu równań (a), to otrzymamy:

$$(b) \quad \begin{cases} g_1(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2) = g_1(x_1, x_2) + g_{1,1}(x_1, x_2)\Delta x_1 + g_{1,2}(x_1, x_2)\Delta x_2 = 0, \\ g_2(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2) = g_2(x_1, x_2) + g_{2,1}(x_1, x_2)\Delta x_1 + g_{2,2}(x_1, x_2)\Delta x_2 = 0, \end{cases}$$

gdzie

$$g_{i,j} = \frac{\partial g_i}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, 2.$$

Zależności (b) tworzą układ dwóch równań liniowych o dwóch niewiadomych Δx_1 i Δx_2 :

$$(c) \quad \begin{cases} g_{1,1} \cdot \Delta x_1 + g_{1,2} \cdot \Delta x_2 = -g_1, \\ g_{2,1} \cdot \Delta x_1 + g_{2,2} \cdot \Delta x_2 = -g_2. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu są wartości:

$$(d) \quad \begin{cases} \Delta x_1 = \frac{-g_1 \cdot g_{2,2} + g_2 \cdot g_{1,2}}{g_{1,1} \cdot g_{2,2} - g_{1,2} \cdot g_{2,1}}, \\ \Delta x_2 = \frac{g_1 \cdot g_{2,1} - g_2 \cdot g_{1,1}}{g_{1,1} \cdot g_{2,2} - g_{1,2} \cdot g_{2,1}}. \end{cases}$$

Ogólnie biorąc, metoda *Newtona-Raphsona* w n -tej iteracji wymaga rozwiązania układu równań liniowych na przyrosty niewiadomych $\Delta x_i^{(n)}$, a recepta na polepszenie wyniku ma postać:

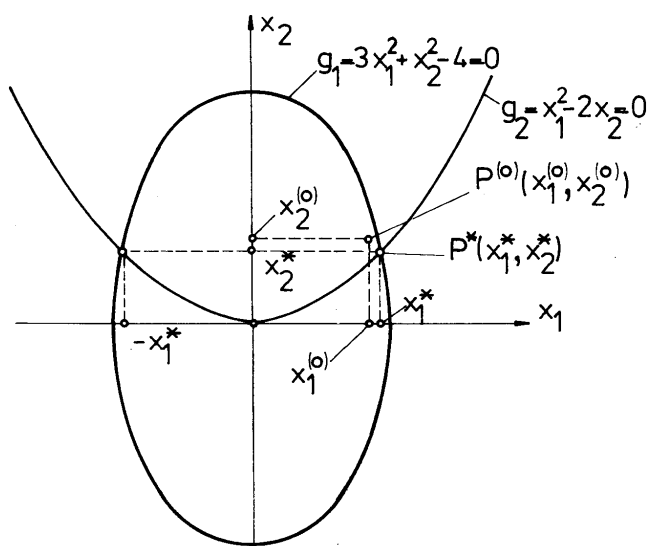
$$(e) \quad x_i^{(n+1)} = x_i^{(n)} + \Delta x_i^{(n)}, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

gdzie m jest liczbą niewiadomych.

Zbieżność metody i liczba iteracji zależy w istotny sposób od przyjęcia pierwszego rozwiązania bazowego, czyli tzw. punktu startowego o współrzędnych $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_m^{(0)}$.

Metodę *Newtona-Raphsona* zilustrujemy przykładem liczbowym. Rozważmy układ równań:

$$(f) \quad \begin{cases} g_1(x_1, x_2) = 3x_1^2 + x_2^2 - 4 = 0, \\ g_2(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_2 = 0. \end{cases}$$



Rys. 21.14

Funkcja $g_1(x_1, x_2) = 0$ przedstawia równanie elipsy, a funkcja $g_2(x_1, x_2) = 0$ – równanie paraboli. Poszukujemy jednego z dwóch punktów P^* , w którym przecinają się obie krzywe (rys. 21.14). Współrzędne tych punktów obliczone w sposób ścisły wynoszą: $x_1^* = \pm 1,10050$ i $x_2^* = 0,60555$.

O tym, który z powyższych punktów będzie wyznaczony metodą $N-R$, decyduje przyjęcie punktu startowego. Jeśli przyjmiemy, że $x_1^{(0)} = 1$ i $x_2^{(0)} = 0,70$, to otrzymamy punkt P leżący w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych x_1, x_2 . Pochodne funkcji g_1 i g_2 obliczamy na podstawie równań (f):

$$g_{1,1} = 6x_1, \quad g_{1,2} = 2x_2, \quad g_{2,1} = 2x_1, \quad g_{2,2} = -2,$$

natomiast przyrosty Δx_1 i Δx_2 na podstawie równań (d).

A oto kolejne przybliżenia:

$$\begin{aligned} x_1^{(0)} = 1,00000; \quad x_2^{(0)} = 0,70000; \quad g_1 = -0,51, \quad g_2 = -0,4, \\ g_{1,1} = 6, \quad g_{1,2} = 1,4, \\ g_{2,1} = 2, \quad g_{2,2} = -2,0, \\ \Delta x_1^{(0)} = 0,10676, \quad \Delta x_2^{(0)} = -0,09324, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} = 1,10676; \quad x_2^{(1)} = 0,60676; \quad g_1 = 0,04291, \quad g_2 = 0,01140, \\ g_{1,1} = 6,64056, \quad g_{1,2} = 1,21352, \\ g_{2,1} = 2,21352, \quad g_{2,2} = -2,0, \\ \Delta x_1^{(1)} = -0,0062, \quad \Delta x_2^{(1)} = -0,00121, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_1^{(2)} &= 1,10056; \quad x_2^{(2)} = 0,60555; \quad g_1 = 0,00039, \quad g_2 = 0,00013, \\g_{1,1} &= 6,60336, \quad g_{1,2} = 1,21110, \\g_{2,1} &= 2,20112, \quad g_{2,2} = -2,0, \\ \Delta x_1^{(2)} &= -0,00006, \quad \Delta x_2^{(2)} = 0.\end{aligned}$$

Trzy przybliżenia prowadzą do rozwiązania pokrywającego się w ramach przyjętej dokładności z rozwiązaniem dokładnym:

$$\begin{aligned}x_1^{(3)} &= x_1^* = 1,10050, \\x_2^{(3)} &= x_2^* = 0,60555.\end{aligned}$$