

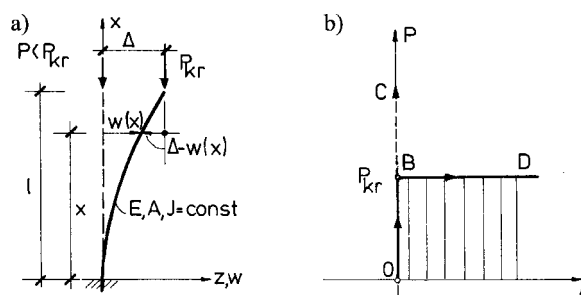
19. PROBLEMY STATECZNOŚCI



19.1. WIADOMOŚCI WSTĘPNE

19.1.1. Bifurkacja stanu równowagi

Zagadnienia stateczności należą do najtrudniejszych, a zarazem kluczowych problemów mechaniki. Naszkicujemy je wstępnie na przykładzie idealnie sprężystego pręta pryzmatycznego poddanego działaniu osiowej siły ściskającej (rys. 19.1a). Pod wpływem dostatecznie małej siły ściskającej pręt ulega jedynie skróceniu, a oś pręta pozostaje prostoliniowa (odcinek OB na rys. 19.1b). Z doświadczenia wiemy jednak, że przy większym obciążeniu pojawia się pewien stan równowagi chwiejnej, kryjący w sobie niebezpieczeństwo, że wskutek jakiejś drobnej przyczyny (wstrząs, przypadkowe uderzenie) pręt zmieni nagle swą prostoliniową postać i przyjmuje położenie wygięte. Tę nagłą zmianę nazywamy wyboczeniem pręta. Zjawisko wyboczenia jest jedną z form utraty stateczności. Utrata stateczności może nastąpić wówczas, gdy siła osiowa P osiągnie pewną wartość krytyczną $P_{kr.}$. Wartości tej towarzyszą zatem dwa stany równowagi odpowiadające prostoliniowej lub krzywoliniowej osi pręta. Na wykresie $P - \Delta$ (rys. 19.1b) jest to punkt B . W punkcie tym następuje więc „rozwidlenie” stanu równowagi, czyli tzw. bifurkacja.



Rys. 19.1

19.1.2. Zagadnienie Eulera

Podjmiemy próbę wyznaczenia siły krytycznej na podstawie analizy wygiętej postaci równowagi pręta. Jedyną przyczyną wygięcia osi pręta jest moment zginający $M(x) = -P \cdot [\Delta - w(x)]$ (rys. 19.1a), obliczony po odstawieniu od zasady zeszytnienia. Tak ustaloną funkcję momentu wprowadzimy do równania różniczkowego linii ugięcia. Założymy dodatkowo, że:

- krzywizny wygiętej osi pręta są małe,
- pomijamy wpływ sił poprzecznych,
- pomijamy wpływ skrócenia osi pręta.

Wszystkie wyżej wymienione założenia odpowiadają teorii wyboczenia pręta sprężystego, zbudowanej przez *Eulera* w połowie XVIII wieku.

Równanie różniczkowe linii ugięcia przyjmuje zatem następującą postać:

$$EJ \cdot w'' = -M(x) = P(\Delta - w),$$

skąd

$$(a) \quad w'' + \alpha^2 w = \alpha^2 \Delta,$$

gdzie $\alpha^2 = P/(EJ)$. Ogólnym rozwiązaniem tego równania jest funkcja:

$$w(x) = C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x + \Delta.$$

Z warunków brzegowych mamy:

$$\begin{aligned} w(0) &= 0, & C_1 + \Delta &= 0, & C_1 &= -\Delta, \\ w'(0) &= 0, & C_2 &= 0. \end{aligned}$$

Wobec tego

$$w(x) = \Delta \cdot (1 - \cos \alpha x).$$

Ponieważ na swobodnym końcu pręta $w(l) = \Delta$, więc musi zachodzić warunek:

$$\Delta \cdot \cos \alpha l = 0.$$

Z równania tego wynika, że albo $\Delta = 0$, albo $\cos \alpha l = 0$. Jeżeli $\Delta = 0$, to $w \equiv 0$, a zatem nie ma wyboczenia. Jeżeli natomiast $\cos \alpha l = 0$, to musi być spełniona zależność:

$$(b) \quad \alpha l = (2n-1) \cdot \frac{\pi}{2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Z tego równania wyznaczmy wartości α , dla których może wystąpić wyboczenie. Ugięcie Δ pozostaje jednak nieokreślone. Uwzględnivszy, że $\alpha^2 = P / (EJ)$, na podstawie równania (b) otrzymujemy:

$$\sqrt{\frac{P^{(n)}}{EJ}} \cdot l = (2n-1) \cdot \frac{\pi}{2},$$

skąd

$$(c) \quad P^{(n)} = \frac{(2n-1)^2 \pi^2 EJ}{4l^2}.$$

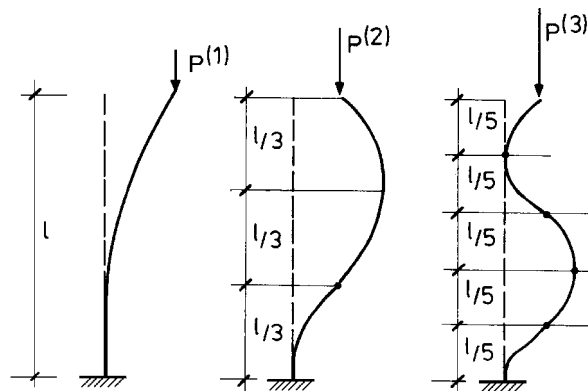
Otrzymaliśmy zatem nieskończenie wiele rozwiązań. Z praktycznego punktu widzenia interesuje nas jednak tylko najmniejsza siła $P^{(n)}$, występująca dla $n = 1$. Jest to poszukiwana siła krytyczna:

$$(d) \quad P_{kr} = P^{(1)} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}.$$

Wartości tej odpowiada tak zwana pierwsza postać wyboczenia ($n = 1$), którą określa równanie:

$$w^{(1)} = \Delta \cdot \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right).$$

Trzy pierwsze postacie wyboczenia odpowiadające wartościom $n = 1$, $n = 2$ i $n = 3$ ilustruje rys. 19.2.



Rys. 19.2

19.1.3. Uwzględnienie dużych przemieszczeń

Opisana wyżej uproszczona teoria wyboczenia pozwala obliczyć jedynie siłę krytyczną i odpowiadającą jej postać wyboczenia. Jest to tak zwana „liniowa” teoria wyboczenia, gdyż zastosowano liniowe równanie różniczkowe linii ugięcia. Trzeba jednak podkreślić, że problemy stateczności są zawsze nieliniowe i nie obowiązuje tu zasada superpozycji. Odstąpimy obecnie od założenia, że krzywizny są małe i zastosujemy dokładny wzór na skończoną krzywiznę. Ugięcia pręta mogą być wówczas dowolnie duże. Równanie różniczkowe linii ugięcia jest nieliniowe i przybiera postać:

$$(e) \quad \frac{w''}{(1+w'^2)^{3/2}} = \alpha^2 \cdot (\Delta - w) \quad \text{lub} \quad \frac{t''}{(1+t'^2)^{3/2}} = -\alpha^2 \cdot t,$$

gdzie $t = \Delta - w$ (por. rys. 19.3a). Zauważmy, że zachodzą tożsamości:

$$\frac{1}{2} d(t^2) \equiv t \cdot t' \cdot dx = t(t' dx), \quad \frac{1}{2} d(t'^2) \equiv t' \cdot t'' \cdot dx = t''(t' dx).$$

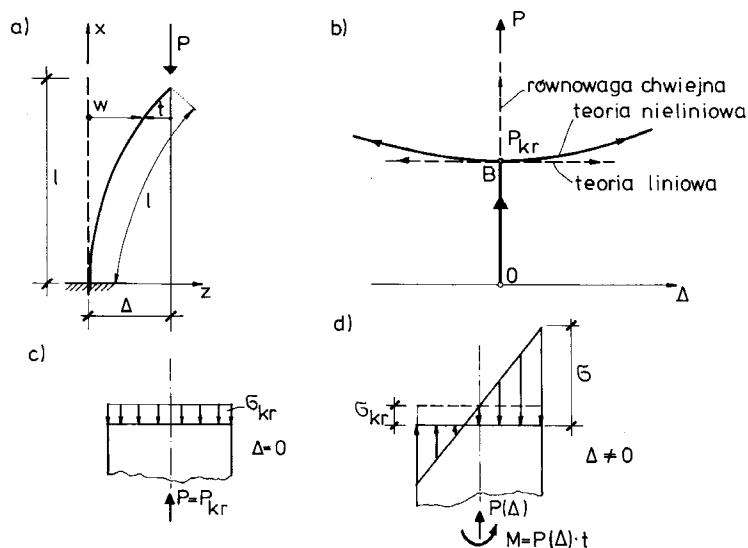
Po pomnożeniu obu stron równania (e)₂ przez $t' dx$ otrzymujemy:

$$\frac{d(t'^2)}{(1+t'^2)^{3/2}} = -\alpha^2 \cdot d(t^2),$$

skąd po scałkowaniu:

$$(f) \quad (1+t'^2)^{-1/2} = \frac{1}{2} \alpha^2 \cdot t^2 + C_1.$$

Stałą C_1 wyznaczmy z warunków brzegowych na końcu utwierdzonym ($x = 0$), gdzie $w = 0$ i $w' = 0$, czyli $\Delta - t = 0$ i $-t' = 0$. Wynika stąd, że dla $t = \Delta$ pochodna $t' = 0$. Uwzględnivszy ten warunek stwierdzamy, że $C_1 = 1 - \alpha^2 \Delta^2 / 2$.



Rys. 19.3

Dalsze zadanie polega więc na rozwiązaniu nieliniowego równania różniczkowego pierwszego rzędu:

$$(g) \quad \sqrt{1+t'^2} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \alpha^2 (\Delta^2 - t^2)}.$$

Po prostych przekształceniach równanie to można doprowadzić do postaci:

$$dx = \pm \frac{\left[1 - \frac{1}{2}\alpha^2(\Delta^2 - t^2)\right] \cdot dt}{\alpha \sqrt{(\Delta^2 - t^2) \cdot \left[1 - \frac{1}{4}\alpha^2(\Delta^2 - t^2)\right]}},$$

lub po wykorzystaniu równania wyjściowego $(g)_2$ – do postaci:

$$\sqrt{1+t^2} dx = \frac{dt}{\pm \alpha \sqrt{(\Delta^2 - t^2) \cdot \left[1 - \frac{1}{4}\alpha^2(\Delta^2 - t^2)\right]}}.$$

Lewa strona tego równania przedstawia element długości zdeformowanej osi pręta $dl = \sqrt{1+t^2} \cdot dx$, co po obustronnym scałkowaniu prowadzi do zależności:

$$(h) \quad \alpha \int_0^l dl = \left| \int_0^\Delta \frac{dt}{\sqrt{\Delta^2 - t^2} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{4}\alpha^2(\Delta^2 - t^2)}} \right|.$$

Ponieważ założenie o nieściśliwości osi pręta jest nadal aktualne, lewa strona równania (h) daje w wyniku wartość αl . Prawą stronę można by przedstawić w postaci nieelementarnej całki eliptycznej (por. np. *Timoshenko, Gere* [48], *Naleszkiewicz* [30]). Wybierzemy jednak nieco inną drogę, prowadzącą do postaci nadającej się do bezpośrednich obliczeń (por. np. *Ballenstedt* [2]). W tym celu zauważmy, że

$$(i) \quad \alpha^2 = \frac{P}{EJ} = p \cdot \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2,$$

gdzie $p = P / P_{kr}$, przy czym $P_{kr} = \pi^2 EJ / (2l)^2$ i stosownie do wzoru (d) oznacza siłę krytyczną (tzw. eulerowską) obliczoną według teorii liniowej.

Jeżeli składnik $\alpha^2(\Delta^2 - t^2) / 4$ jest mniejszy od jedności, tzn. gdy

$$\frac{1}{4}\alpha^2(\Delta^2 - t^2) = p \cdot \left(\frac{\pi}{4l}\right)^2 \cdot (\Delta^2 - t^2) < 1,$$

to

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}\alpha^2(\Delta^2 - t^2)}} = 1 + \frac{1}{2}p\left(\frac{\pi}{4l}\right)^2 \cdot (\Delta^2 - t^2) + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}p^2\left(\frac{\pi}{4l}\right)^4 \cdot (\Delta^2 - t^2)^2 + \dots$$

Rozwinięcie to pozwala kolejno scałkować składniki prawej strony równania (h). Po scałkowaniu otrzymujemy:

$$\alpha l = \sqrt{p} \frac{\pi}{2l} \cdot l = \frac{\pi}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{\pi\Delta}{4l}\sqrt{p}\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \left(\frac{\pi\Delta}{4l}\sqrt{p}\right)^4 + \dots \right],$$

skąd

$$(j) \quad \sqrt{p} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{\pi\Delta}{4l}\sqrt{p}\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \cdot \left(\frac{\pi\Delta}{4l}\sqrt{p}\right)^4 + \dots$$

Wzór (j) określa zależność między siłą P a ugięciem Δ .

Jeżeli $\Delta = 0$, to siła P jest równa eulerowskiej sile krytycznej ($p = 1$). Większym wartościom siły P odpowiadają ściśle określone dwie wartości przemieszczenia Δ . Dla niedużych wartości Δ/l szereg po

prawej stronie wzoru (j) jest bardzo szybko zbieżny. Uwzględnivszy jedynie dwa wyrazy tego szeregu otrzymamy:

$$(k) \quad \frac{\Delta}{l} \approx \pm \frac{8}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{p-1}{p}}.$$

Nietrudno się przekonać, że niewielkiemu zwiększeniu obciążenia towarzyszą znaczny przyrost ugięć i katastrofalny wzrost naprężeń normalnych. Naprężenia te obliczamy ze wzoru na mimośrodowe ściskanie (por. rys. 19.3c, d):

$$|\sigma|_{\max} = \sigma = \frac{P}{A} + \frac{P\Delta}{W} = p \frac{P_{\text{kr}}}{A} \left(1 + \frac{\Delta}{r}\right) = \sigma_{\text{kr}} p \left(1 + \frac{\Delta}{r}\right),$$

gdzie $\sigma_{\text{kr}} = P_{\text{kr}} / A$, a r oznacza promień rdzenia przekroju ($r = W/A$). Zatem

$$(l) \quad \bar{\sigma} = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{kr}}} = p \left(1 + \frac{\Delta}{l} \cdot \frac{l}{r}\right).$$

Przyjmijmy przykładowo, że wysokość słupa $l = 5$ m, a przekrój słupa jest rurą o średnicy zewnętrznej 70 mm i grubości ścianki 3 mm. Promień rdzenia przekroju $r = 1,606$ cm, czyli $l/r = 311,4$. Dla tych danych ze wzorów (k) i (l) obliczono wartości zestawione w tablicy III.

Tablica III

$p = P/P_{\text{kr}}$	1	1,001	1,002	1,003	1,004
Δ/l	0	$\pm 0,0569$	$\pm 0,0804$	$\pm 0,0984$	$\pm 0,1136$
$\bar{\sigma}$	1	18,74	26,10	31,75	36,52

Wykres zależności $P(\Delta)$ ilustruje rys. 19.3b. Charakterystyczne jest to, że w rozważanym przypadku wykres ten jest symetryczny względem osi P . Obserwowany znaczny wzrost naprężeń po niewielkim przekroczeniu wartości siły krytycznej pozwala stwierdzić, że wyboczenie pręta jest równoznaczne z wyczerpaniem nośności konstrukcji. Z punktu widzenia bezpieczeństwa konstrukcji naprężenie krytyczne traktuje się zatem jako wartość niszczącą.

19.1.4. Wpływ sił poprzecznych i skrócenia osi pręta

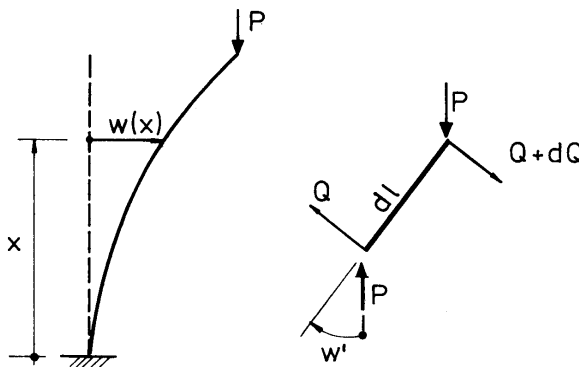
Omówimy obecnie konsekwencje odejścia od dalszych założeń teorii *Eulera*. Przedstawimy wpływ sił poprzecznych i skrócenia osi pręta na wartość siły krytycznej.

Wpływ **siły poprzecznej** przeanalizujemy na gruncie teorii liniowej. Z równania równowagi elementu dl , wyciętego w konfiguracji odkształconej (rys. 19.4b) wynika, że

$$Q = P \sin \varphi \approx P \cdot w'(x),$$

gdzie

$$w(x) = w_M(x) + w_Q(x).$$



Rys. 19.4

Funkcja $w_M(x)$ spełnia równanie różniczkowe

$$w_M''(x) = -\frac{M}{EJ},$$

a pochodna funkcji $w_Q(x)$ jest średnim kątem ścinania:

$$w_Q'(x) = \frac{k}{GA} \cdot Q,$$

skąd

$$w_Q''(x) = \frac{k}{GA} \cdot \frac{dQ}{dx} = \frac{k}{GA} \cdot Pw''.$$

Ponieważ $w'' = w_M'' + w_Q''$, więc

$$w''(x) = -\frac{M}{EJ} + \frac{P \cdot k}{GA} \cdot w''.$$

Po uwzględnieniu, że $M = -P(\Delta - w)$, otrzymujemy równanie różniczkowe:

$$(m) \quad w'' + \alpha_1^2 w = \alpha_1^2 \Delta,$$

gdzie

$$\alpha_1^2 = \frac{P}{EJ \left(1 - \frac{kP}{GA} \right)}.$$

Postępując podobnie jak w zadaniu *Eulera* otrzymujemy warunek:

$$\alpha_1 l = (2n-1) \cdot \frac{\pi}{2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Dla $n = 1$

$$\frac{P^{(1)}}{EJ \left(1 - \frac{kP^{(1)}}{GA} \right)} = \frac{\pi^2}{4l^2}.$$

Uwzględniając, że siła eulerowska krytyczna wynosi $P_E = \pi^2 EJ / (2l)^2$ dostajemy:

$$P^{(1)} = P_E \cdot \left(1 - \frac{kP^{(1)}}{GA} \right),$$

skąd

$$(n) \quad P_{kr} = P^{(1)} = \frac{P_E}{1 + \frac{k}{GA} \cdot P_E}.$$

Ze wzoru (n) wynika, że uwzględnienie wpływu sił poprzecznych powoduje zmniejszenie wartości siły krytycznej. Wartość ta jest zazwyczaj niewiele mniejsza od P_E . Istotne różnice mogą wystąpić w prętach złożonych połączonych przewiązkami lub krzyżulcami. Warto dodać, że wzór (n) obowiązuje również dla innych warunków podparcia pręta.

W przypadku stosunkowo krótkich prętów wykonanych z materiału o bardzo wysokiej granicy sprężystości istotny wpływ może mieć **skrócenie osi pręta** przed utratą stateczności (por. Życzkowski, [57]). Ostateczny wzór na siłę krytyczną uwzględniający to skrócenie ma postać:

$$(o) \quad P_{kr} = \frac{2P_E}{1 + \sqrt{1 - \frac{4P_E}{EA}}},$$

gdzie P_E oznacza siłę krytyczną obliczoną według teorii *Eulera*. Odnotować trzeba, że dla $P_E > EA/4$ wyboczenie pręta w ogóle nie występuje.

19.1.5. Wpływ imperfekcji

Do tej pory zakładaliśmy, że obciążenie pręta jest przyłożone idealnie osiowo, a oś pręta jest idealnie prosta. W praktyce założenia te nigdy nie są spełnione. Wobec tego konieczne jest wyrobienie sobie poglądu na wpływ wyżej wymienionych imperfekcji.

Przyjmijmy przykładowo, że siła P działa na pewnym mimośrodku e (por. rys. 19.5a). Jeśli ograniczymy się do bardzo małych ugięć, otrzymamy następujące równanie różniczkowe linii ugięcia:

$$EJw'' = P \cdot (\Delta + e - w).$$

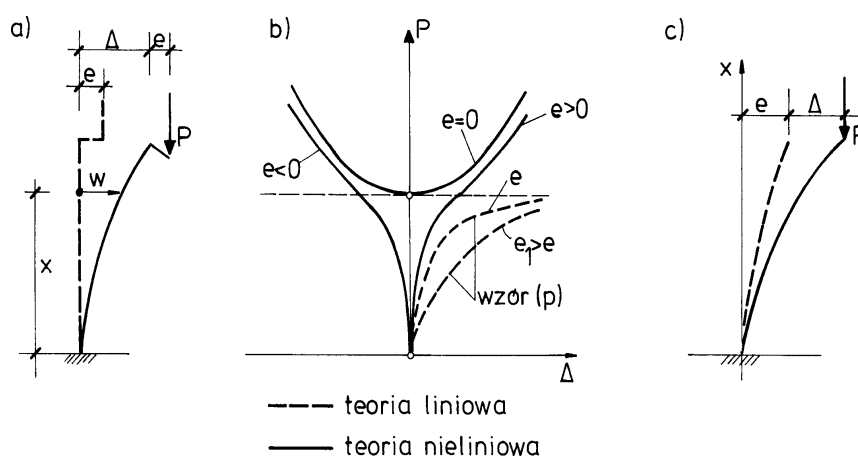
Rozwiązanie tego równania ma postać:

$$w(x) = e \cdot \frac{1 - \cos \alpha x}{\cos \alpha x},$$

gdzie $\alpha = \sqrt{P/(EJ)}$. Dla $x = l$ sumę maksymalnego ugięcia Δ i wstępnego mimośrodu e wyraża wzór:

$$(p) \quad \Delta_c = \Delta(P) + e = e \cdot \frac{1}{\cos[\alpha(P) \cdot l]} = e \cdot f(P).$$

Wykresy funkcji $\Delta(P)$ ilustruje rys. 19.5b (linie przerywane).



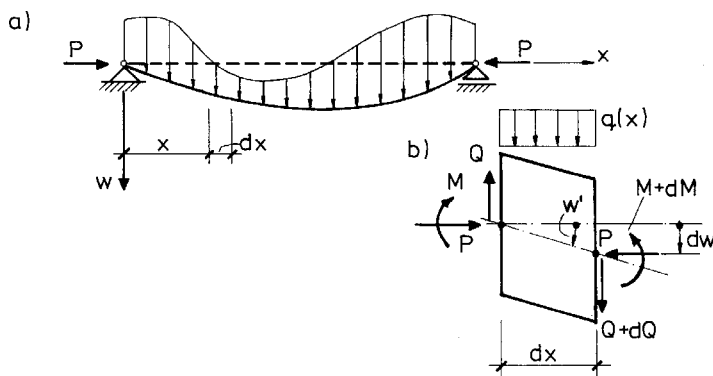
Rys. 19.5

Łatwo zauważyć, że Δ dąży do nieskończoności, gdy $\cos(\alpha l)$ dąży do zera, czyli gdy αl dąży do $\pi/2$. Widzimy zatem, że asymptotą funkcji $P(\Delta)$ jest wartość siły P wynikająca z warunku: $\alpha l = \pi/2$, skąd $P = P_E = \pi^2 EJ / (2l)^2$. Z powyższego wynika, że gdy siła P działająca na pewnym mimośrodku jest

bliska eulerowskiej wartości krytycznej, następuje gwałtowny przyrost poprzecznego ugięcia. Zwróćmy uwagę na to, że całkowite ugięcie Δ_c można przedstawić jako iloczyn wstępnego mimośrod e i pewnej funkcji $f(P)$ uzależnionej od aktualnej wartości siły ściskającej. Powiększanie mimośrodu powoduje jedynie większe ugięcie, nie wpływa ono jednak na położenie asymptoty (por. rys. 19.5b). Bardziej ściśle rozwiązanie nieliniowe ilustrują wykresy zaznaczone na rys. 19.5b liniami ciągłymi. Warto dodać, że analogiczne wnioski wypływają z analizy ściskania pręta o początkowej krzywiźnie (por. rys. 19.5c).

19.1.6. Wpływ obciążeń poprzecznych

Omówimy jeszcze wpływ obciążenia poprzecznego na charakter wykresów $P(\Delta)$.



Rys. 19.6

Na wstępie wyprowadzimy równanie różniczkowe linii ugięcia dla pręta ściskanego i jednocześnie obciążonego poprzecznie. W tym celu rozpatrzmy równowagę wyciętego elementu belki o długości dx (rys. 19.6b):

– warunek równowagi sił pionowych

$$Q - qdx - Q + dQ = 0,$$

skąd

$$q = -\frac{dQ}{dx}, \quad (19.1)$$

– warunek równowagi momentów

$$M + qdx \cdot \frac{dx}{2} + (Q + dQ) \cdot dx - (M + Md) + P \cdot dw = 0.$$

Po pominięciu małych wartości drugiego rzędu otrzymujemy:

$$\frac{dM}{dx} = Q + P \cdot \frac{dw}{dx}. \quad (19.2)$$

Równanie różniczkowe linii ugięcia ma postać:

$$EJw'' = -M. \quad (19.3)$$

Zróżniczkowanie tego równania względem x oraz wykorzystanie równania (19.2) prowadzi do rezultatu:

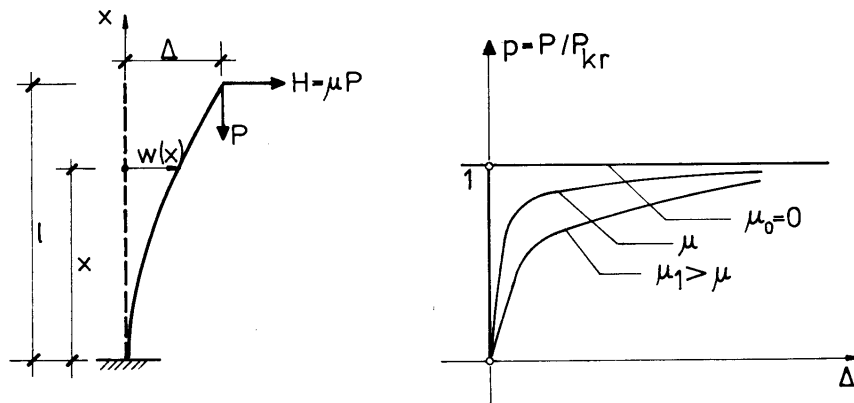
$$(EJw'')' + Pw' = -Q. \quad (19.4)$$

Po ponownym zróżniczkowaniu powyższego równania i wykorzystaniu zależności (19.1) otrzymujemy:

$$(EJw'')'' + Pw'' = q. \quad (19.5)$$

Wzory (19.3), (19.4) i (19.5) przedstawiają trzy postacie równania różniczkowego linii ugięcia pręta mimośrodowo ściskanego o dowolnych warunkach brzegowych. Są one słuszne również dla mimośrodowego rozciągania, jeżeli zmienimy znak siły P .

Dla ilustracji powyższych wywodów wyznaczmy funkcję ugięcia pręta wspornikowego obciążonego na swobodnym końcu dwoma siłami: pionową P i poziomą H (rys. 19.7). Przyjmijmy, że w czasie obciążenia stosunek obu sił jest stały i że



Rys. 19.7

$\mu = H / P$. Wykorzystamy tu równanie różniczkowe linii ugięcia (19.3), gdyż funkcja momentów zginających jest znana:

$$(r) \quad EJw'' = H(l - x) + P(\Delta - w).$$

Równanie to po przekształceniu można zapisać następująco:

$$w'' + \alpha^2 \cdot w = \alpha^2 \cdot [\Delta + \mu(l - x)],$$

gdzie $\alpha^2 = P / (EJ)$. Rozwiązaniem tego równania jest funkcja (por. *Ballenstedt* [2]):

$$w(x) = \mu \cdot \left[-x + \frac{\sin(\alpha l) - \sin[\alpha(l - x)]}{\alpha \cos(\alpha l)} \right].$$

Największe ugięcie $\Delta = w(l)$ określa wzór:

$$\Delta(P) = \mu l \cdot \left[\frac{\operatorname{tg}(\alpha l)}{\alpha l} - 1 \right].$$

Równanie to opisuje zależność między przemieszczeniem Δ a siłą P . Przedstawimy je w postaci bezwymiarowej, uwzględnivszy stosownie do wzoru (i), że $\alpha l = (\pi / 2) \sqrt{P / P_{kr}} = (\pi / 2) \sqrt{p}$:

$$\delta(p) = \mu \cdot \left[\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{p}\right)}{\frac{\pi}{2} \sqrt{p}} - 1 \right],$$

gdzie $\delta = \Delta / l$. Nietrudno zauważyć, że dla $p = 1$, czyli dla $P = P_{kr}$, przemieszczenie $\delta \rightarrow \infty$. Widzimy zatem, że obecność obciążenia poprzecznego nie wpływa na wartość krytyczną siły ściskającej P . Wpływ obciążenia poprzecznego na przebieg wykresów $P(\Delta)$ jest podobny do wpływu imperfekcji. Stwierdzenie to ilustrują dodatkowe wykresy funkcji $p(\delta)$ zamieszczone na rys. 19.7b.

Na koniec wyprowadzimy jeszcze jeden bardzo użyteczny wzór przybliżony na obliczanie ugięć pręta zginanego i ściskanego. W rozważanym wyżej zadaniu dla $P = 0$ maksymalne ugięcie pręta wspornikowego

$$\Delta_0 = \frac{Hl^3}{3EJ}.$$

Wobec tego

$$\mu = H / P = \frac{3EJ}{l^3 p P_{kr}} \cdot \Delta_0 = \frac{12}{\pi^2 p} \cdot \delta_0,$$

gdzie $\delta_0 = \Delta_0 / l$. Po podstawieniu tej wartości do wzoru na $\delta(p)$ otrzymujemy:

$$\delta(p) = \delta_0 \cdot \frac{12}{\pi^2 p} \cdot \left[\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{p}\right)}{\frac{\pi}{2}\sqrt{p}} - 1 \right].$$

Wyrażenie w nawiasie można zapisać w sposób przybliżony, jeżeli uwzględnimy trzy wyrazy rozwinięcia funkcji $\operatorname{tg} \varphi$ w szereg potęgowy:

$$\operatorname{tg} \varphi \approx \varphi + \frac{1}{3}\varphi^3 + \frac{2}{15}\varphi^5.$$

Wówczas otrzymujemy:

$$\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{p}\right)}{\frac{\pi}{2}\sqrt{p}} - 1 \approx 1 + \frac{\pi^2}{12} \cdot p + \frac{\pi^4 p^2}{16} \cdot \frac{2}{15} - 1 = \frac{\pi^2 p}{12} \left(1 + \frac{\pi^2 p}{10} \right) \approx \frac{\pi^2 p}{12} \cdot \frac{1}{1-p}.$$

Po uwzględnieniu uzyskanego rezultatu we wzorze na $\delta(p)$ otrzymujemy przybliżoną formułę służącą do obliczania ugięć pręta z uwzględnieniem siły ściskającej:

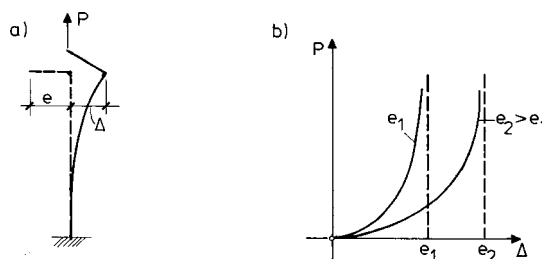
$$\delta(p) \approx \delta_0 \cdot \frac{1}{1-p}. \quad (19.6)$$

Łatwo sprawdzić, że wzór (19.6) daje bardzo dobre przybliżenie nawet dla dużych wartości p .

Na podstawie ogólnej analizy można pokazać, że wzór (19.6) ma charakter uniwersalny i obowiązuje dla dowolnych warunków brzegowych (por. *Timoshenko, Gere* [48]). Symbol δ_0 oznacza tu ugięcie bez udziału sił osiowych, a drugi człon $f(p) = 1/(1-p)$ oznacza współczynnik zwiększający, który zależy od stosunku $p = P/P_{kr}$. Warto dodać, że współczynnik ten można również stosować do szacowania wpływu imperfekcji, jakkolwiek dokładność takiego oszacowania bywa nieco gorsza (por. np. wzór (p)).

19.1.7. Rozciąganie mimośrodowe

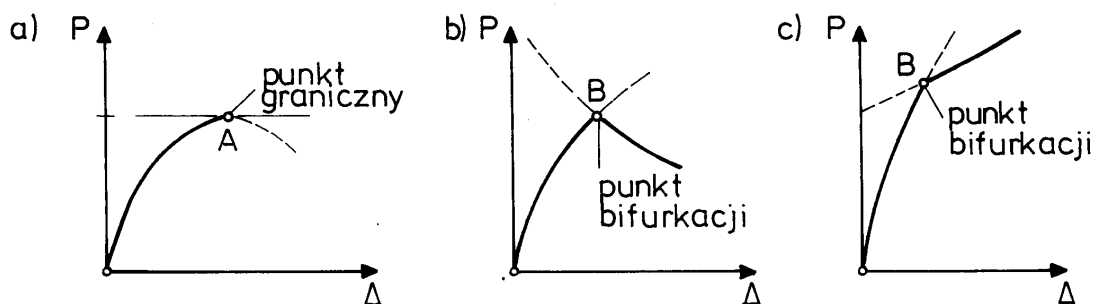
Utrata stateczności występuje się z reguły w prętach ściskanych. Siły rozciągające na ogół stabilizują ugięcia. Ilustracją tego zjawiska mogą być wykresy podane na rys. 19.8a. Wykresy te odpowiadają rozwiązaniu równania różniczkowego (r), w którym zmieniono znak siły P .



Rys. 19.8

19.1.8. Definicja stateczności. Punkty graniczne i punkty bifurkacji

Przedmiotem dotychczasowych rozważań było zjawisko bifurkacji stanu równowagi. problem stateczności jest jednak rozumiany znacznie szerzej. Niestateczność definiuje się na ogół jako proces, w którym niewielka zmiana przyczyny powoduje bardzo dużą zmianę skutku. W definicji tej mieści się zjawisko wyboczenia, kiedy niewielka zmiana siły (przyczyny) powoduje dużą zmianę poprzecznego ugięcia (skutku). Zjawisko szerzej pojętej utraty stateczności obserwujemy również w czasie działania siły pionowej na węzeł kratownicy *Misesa* (por. p. 17.2). Zbliżając się bowiem do punktu granicznego rejestrujemy coraz większe przemieszczenia pionowe. W chwili osiągnięcia obciążenia odpowiadającego punktowi granicznemu, w którym $dP/d\Delta = 0$, następuje gwałtowny przyrost wartości przemieszczenia świadczący o utracie stateczności. Dalszy wzrost siły po przeskoku odpowiada jednak procesowi statecznemu. W innych przypadkach osiągnięcie punktu granicznego może oznaczać całkowite wyczerpanie nośności konstrukcji.



Rys. 19.9

Ogólnie biorąc, utrata stateczności występuje bądź w punkcie bifurkacji, bądź w punkcie granicznym. Ilustracją tych uwag jest rys. 19.9, na którym przedstawiono punkt graniczny i dwa przypadki bifurkacji stanu równowagi. Odnotować trzeba, że osiągnięcie punktu bifurkacji nie zawsze oznacza utratę nośności konstrukcji. Sytuację taką ilustruje rys. 19.9c, stan pobifurkacyjny jest tutaj nadal stateczny, gdyż $dP/d\Delta > 0$. Zagadnienia te omówimy dokładniej w dalszych częściach tego rozdziału.

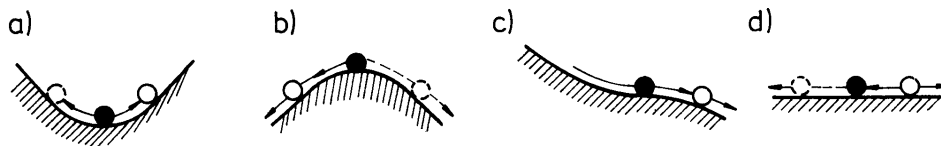
19.2. PODEJŚCIE ENERGETYCZNE

19.2.1. Uwagi wstępne

Rozważmy konstrukcję idealnie sprężystą będącą początkowo w stanie równowagi, poddaną działaniu obciążenia konserwatywnego. Układ może odejść od tego stanu równowagi, jeżeli wystąpią pewne siły zakłócające, w następstwie których pojawią się przemieszczenia rozwijające się z określonymi prędkościami. Z zasady zachowania energii wiadomo, że suma energii potencjalnej układu Π i energii kinetycznej E_k jest stała:

$$\Pi + E_k = \text{const.}$$

Stan równowagi układu zachodzi, gdy energia potencjalna osiąga ekstremum. Przyjmijmy, że układ jest pierwotnie w stanie równowagi charakteryzującym się minimalną wartością energii potencjalnej. Nadajmy układowi pewną małą prędkość początkową. Wartość energii potencjalnej może jedynie wzrastać, czemu towarzyszy zmniejszenie się energii kinetycznej, stosownie do zasady zachowania energii. Przypadek ten odpowiada stanowi równowagi statecznej. Równowagę stateczną można zobrazować na przykładzie analogii, zilustrowanej na rys. 19.10a, na którym przedstawiono kulę toczącą się po zakrzywionej powierzchni. Pierwotny stan równowagi

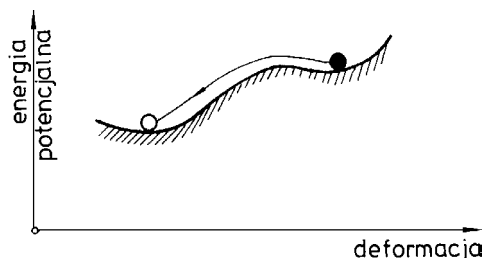


Rys. 19.10

odpowiada minimum energii potencjalnej; kulka znajduje się w zagłębieniu. Po wyprowadzeniu kulki z pierwotnego położenia równowagi przez nadanie jej małej prędkości początkowej obserwujemy oscylacje kulki w otoczeniu położenia równowagi. W położeniu tym energia potencjalna osiąga minimum, a prędkość kulki jest największa. Prędkość ta zmniejsza się w miarę odchodzenia od pierwotnego położenia równowagi.

Rozważmy teraz sytuację, gdy początkowe położenie równowagi nie odpowiada minimum energii potencjalnej. Wówczas, stosownie do zasady zachowania energii, impuls powoduje wzrost energii kinetycznej. Pojawiają się duże przemieszczenia, rozwijające się ze znacznymi prędkościami. Opisany przypadek odpowiada niestatecznemu stanowi równowagi, a jego ilustracją są rys. 19.10b, c. Stan równowagi obojętnej odpowiada toczeniu się kulki na płaszczyźnie poziomej (rys. 19.10d).

Bardziej złożoną sytuację przedstawia rys. 19.11, na którym dla małych zaburzeń położenie początkowe można uznać za stateczne. Jeśli jednak zakłócenie jest dostatecznie duże, to kulka może zająć położenie równowagi o niższym poziomie energetycznym. Problem ten występuje w zjawisku przeskoku.



Rys. 19.11

Powyższe uwagi pozwalają zmodyfikować nieco zasadę minimum energii potencjalnej:

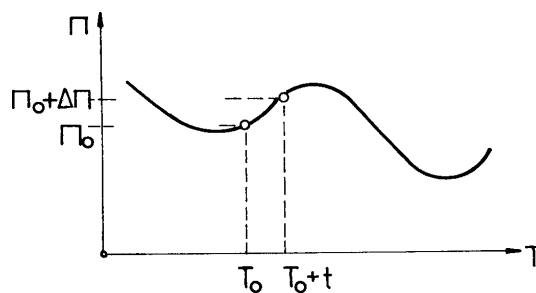
Układ konserwatywny jest w stanie równowagi statecznej tylko wtedy, gdy wartość energii potencjalnej osiąga minimum względne.

19.2.2. Matematyczna interpretacja zasady minimum energii potencjalnej^{*)}

Rozważmy konstrukcję sprężystą, której stan odkształcenia jest całkowicie określony przez parametr T , a obciążenie stanowi stała siła P . Wówczas energię potencjalną można zapisać jako funkcję parametru T :

$$\Pi = \Pi(T).$$

Funkcję tę obrazuje wykres na rysunku 19.12. Naszym celem jest znalezienie



Rys. 19.12

^{*)} Por. [14, 38, 40, 45, 50].

punktów równowagi i określenie, czy są one stateczne czy niestateczne. Wybieramy dowolny punkt krzywej $\Pi(T)$ o współrzędnych Π_0, T_0 . Zbadamy przyrost energii potencjalnej po zmianie współrzędnej T_0 o małą wartość t , z wykorzystaniem rozwinięcia w szereg Taylora:

$$\Pi(T_0 + t) = \Pi(T_0) + \frac{\partial \Pi}{\partial T} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 \Pi}{\partial T^2} \cdot t^2 + \dots$$

gdzie pochodne funkcji odnoszą się do punktu $T = T_0$. Rozwinięcie to można zapisać nieco inaczej:

$$\Pi_0 + \Delta \Pi = \Pi_0 + \delta \Pi + \delta^2 \Pi + \dots, \quad (19.7)$$

gdzie $\delta \Pi, \delta^2 \Pi, \dots$ oznaczają kolejne wariacje energii potencjalnej. Warunkiem koniecznym ekstremum (maksimum lub minimum) energii jest znikanie pierwszej wariacji $\delta \Pi$. Wobec tego warunek równowagi ma postać:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial T} = 0 \quad \text{lub} \quad \delta \Pi = 0, \quad (19.8)$$

a warunkami minimum energii są zależności:

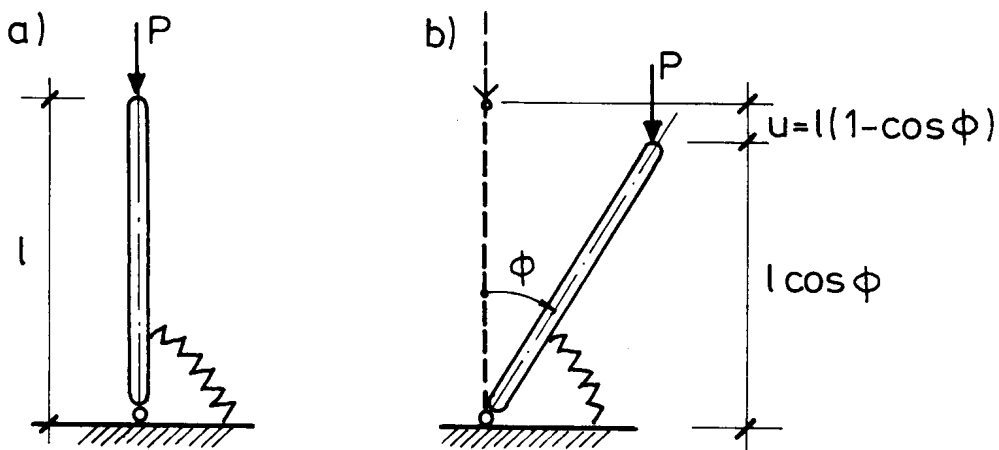
$$\frac{\partial \Pi}{\partial T} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial T^2} > 0 \quad \text{lub} \quad \delta \Pi = 0, \quad \delta^2 \Pi > 0 \quad (19.9)$$

dla wszystkich kinematycznie dopuszczalnych wartości t . Wynika stąd kryterium stateczności konstrukcji

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial T^2} > 0 \quad \text{lub} \quad \delta^2 \Pi > 0. \quad (19.10)$$

Jeżeli $\partial^2 \Pi / \partial T^2 < 0$, układ jest niestateczny, a jeśli $\partial^2 \Pi / \partial T^2 = 0$, to w celu ustalenia stateczności układu trzeba zbadać znaki wyższych pochodnych (wariacji) energii potencjalnej. Na przykład, gdy $\partial \Pi / \partial T = 0$ i jednocześnie $\partial^2 \Pi / \partial T^2 = 0$, to $\partial^3 \Pi / \partial T^3 < 0$ oznacza układ niestateczny. Jeżeli $\partial^3 \Pi / \partial T^3$ byłoby również równe zero, wtedy $\partial^4 \Pi / \partial T^4 > 0$ oznaczałoby układ stateczny, a $\partial^4 \Pi / \partial T^4 < 0$ – układ niestateczny. Postępowanie to powielamy aż do skutku.

Dla ilustracji powyższych stwierdzeń rozważymy pionowy idealnie sztywny pręt o długości l , utwierdzony sprężysto w fundamencie za pośrednictwem sprężyny o sztywności równej c (rys. 19.13). Pręt jest obciążony siłą pionową P . Należy obliczyć wartość krytyczną siły P , dla której pionowe położenie pręta staje się niestateczne. Energia potencjalna w pozycji wychylonej



Rys. 19.13

$$\Pi = \Pi(\phi) = \frac{1}{2}c \cdot \phi^2 - P \cdot u(\phi) = \frac{1}{2} \cdot c\phi^2 - Pl(1 - \cos\phi).$$

Rolę parametru odkształcenia odgrywa tu kąt ϕ . Równowaga zachodzi, gdy $\partial\Pi / \partial\phi = 0$, tzn.

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\phi} = c\phi - Pl \sin\phi = 0.$$

Dla małych przemieszczeń można przyjąć, że $\sin\phi \approx \phi$, stąd

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\phi} = \phi \cdot (c - Pl) = 0.$$

Równowaga jest możliwa w dwóch przypadkach:

$$\phi = 0 \quad \text{lub} \quad P = \frac{c}{l}.$$

Pierwszy z nich odpowiada pozycji nie wychylonej (nie wyboconej). Drugi określa wartość P , dla której jest możliwy stan równowagi w pozycji wychylonej. Stateczność równowagi określa druga pochodna funkcji $\Pi(\phi)$:

$$\frac{\partial^2\Pi}{\partial\phi^2} = c - Pl \quad \begin{cases} > 0 & \text{stan stateczny} \\ = 0 & \text{stan krytyczny} \\ < 0 & \text{stan niestateczny} \end{cases}$$

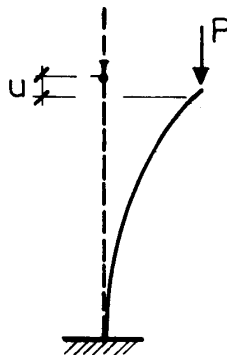
Z powyższego wynika, że $P = P_{kr} = c/l$ i jest wartością krytyczną, poniżej której pionowe położenie pręta jest stateczne.

W omówionym wyżej zadaniu energia potencjalna była funkcją jednej zmiennej ϕ , a warunki równowagi i stateczności były wyrażone przez pochodne cząstkowe funkcji $\Pi(\phi)$. W układach ciągłych trzeba badać wariacje funkcjonału energii potencjalnej. Rozważmy zatem dla przykładu pryzmatyczny pręt wspornikowy obciążony osiową siłą P (rys. 19.14). Przyrost pionowego przemieszczenia punktu przyłożenia siły na skutek wyboconia przy założeniu nieściśliwości osi pręta można zapisać, jak następuje:

$$\Delta u = \int_0^l (ds - dx) = \int_0^l \left(\sqrt{1 + w'^2} - 1 \right) dx \approx \frac{1}{2} \int_0^l (w')^2 dx.$$

Wobec tego przyrost pracy obciążenia zewnętrznego

$$2\Delta L = P \cdot \Delta u = \frac{1}{2} P \int_0^l (w')^2 dx.$$



Rys. 19.14

Zatem energię potencjalną wyboczenia pręta wyraża wzór:

$$\Pi(w) = \Delta U - 2\Delta L = \frac{1}{2} EJ \int_0^l (w'')^2 dx - \frac{1}{2} P \int_0^l (w')^2 dx. \quad (19.11)$$

Funkcję parametru odkształcenia pełni tu ugięcie poprzeczne $w(x)$. Przyrost energii potencjalnej jest wynikiem przyrostu funkcji $w(x)$ o funkcję $\eta \cdot t(x)$. Funkcja $t(x)$ jest kinematycznie dopuszczalnym przemieszczeniem spełniającym te same warunki brzegowe co funkcja $w(x)$, a η jest stałą o nieskończenie małej wartości. Wtedy energię potencjalną wyraża się następująco:

$$\begin{aligned} \Pi + \Delta\Pi &= \Pi(w + \eta t) = \frac{1}{2} EJ \int_0^l (w'' + \eta t'')^2 dx - \frac{1}{2} P \int_0^l (w' + \eta t')^2 dx = \\ &= \frac{1}{2} EJ \int_0^l (w'')^2 dx - \frac{1}{2} P \int_0^l (w')^2 dx + \eta \left[EJ \int_0^l w'' \cdot t'' dx - P \int_0^l w' t' dx \right] + \\ &+ \eta^2 \cdot \left[\frac{1}{2} EJ \int_0^l (t'')^2 dx - \frac{1}{2} P \int_0^l (t')^2 dx \right]. \end{aligned}$$

Z powyższego widać wyraźnie, jaką postać mają wariacje funkcjonału; rząd wariacji odpowiada potęgze parametru η :

$$\delta\Pi = \eta \cdot \int_0^l (EJ w'' \cdot t'' - P \cdot w' \cdot t') dx, \quad (19.12)$$

$$\delta^2\Pi = \frac{1}{2} \eta^2 \cdot \int_0^l [EJ (t'')^2 - P \cdot (t')^2] dx. \quad (19.13)$$

Stany równowagi odpowiadają równaniu $\delta\Pi = 0$. Warunek ten rozpiszemy całkując dwukrotnie przez części równanie (19.12) i przyrównując je do zera:

$$\begin{aligned} EJ \cdot [w''(l) \cdot t'(l) - w''(0) \cdot t'(0) - w'''(l) \cdot t(l) + w'''(0) \cdot t(0)] - \\ - P \cdot [w'(l) \cdot t(l) - w'(0) \cdot t(0)] + \int_0^l (EJ w^{IV} + P w'') \cdot t \cdot dx = 0. \end{aligned}$$

Dla rozważanego pręta wspornikowego obowiązują następujące warunki brzegowe:

$$\begin{aligned} x = 0: \quad w(0) = 0, \quad w'(0) = 0 \quad \text{oraz} \quad t(0) = 0, \quad t'(0) = 0, \\ x = l: \quad M(l) = 0 \quad \text{i} \quad Q(l) = 0, \end{aligned}$$

co według wzorów (19.3) i (19.4) prowadzi do zależności:

$$\begin{aligned} w''(l) = 0, \quad EJ w'''(l) + P \cdot w'(l) = 0, \\ t''(l) = 0, \quad EJ t'''(l) + P \cdot t'(l) = 0. \end{aligned}$$

Z warunków tych wynika, że suma składników stojących poza całką jest równa zero. Wobec tego równowaga układu zachodzi wtedy, gdy

$$\int_0^l (EJ w^{IV} + P w'') \cdot t \cdot dx = 0.$$

Jeżeli przyrost ugięcia $t(x)$ jest dowolny i różny od zera oraz spełnia warunki brzegowe zadania, to równowaga jest osiągnięta, gdy wyrażenie podcałkowe zawarte w nawiasie jest równe zero. Odpowiada to spełnieniu równania różniczkowego:

$$EJw^{IV} = Pw'' = 0$$

lub

$$w^{IV} + \alpha^2 \cdot w'' = 0, \quad (19.14)$$

gdzie $\alpha^2 = P/(EJ)$. Równanie (19.14) pokrywa się z wcześniej wyprowadzonym równaniem różniczkowym linii ugięcia (19.5) dla pręta mimośrodowo ściskanego, jeżeli przyjmujemy w nim, że $q = 0$.

Pozostaje jeszcze odpowiedzieć na pytanie, jakie warunki odpowiadają stanowi krytycznemu, gdy $\delta^2\Pi = 0$. Z równania (19.13) widzimy, że dla $P = 0$, $\delta^2\Pi > 0$

i równowaga jest stateczna. W miarę wzrostu siły P wartość $\delta^2\Pi$ maleje, by dla $P = P_{kr}$ osiągnąć wartość zero, czyli

$$\delta^2\Pi(P_{kr}) = \frac{1}{2}\eta^2 \int_0^l [EJ(t'')^2 - P_{kr} \cdot (t')^2] dx = 0. \quad (19.15)$$

Ponieważ funkcja $t(x)$ spełnia wszystkie wymagania stawiane funkcji $w(x)$, z równania (19.15) wynika, że **przyrost energii potencjalnej** w stanie krytycznym jest równa zero. Zatem

$$\frac{1}{2} \int_0^l EJ(t'')^2 dx = \frac{1}{2} P_{kr} \int_0^l (t')^2 dx, \quad (19.16)$$

skąd

$$P_{kr} = \frac{\int_0^l EJ(t'')^2 dx}{\int_0^l (t')^2 dx}. \quad (19.17)$$

Wzór (19.17) nosi nazwę ilorazu *Rayleigha* i służy do przybliżonego wyznaczania siły krytycznej przez przyjęcie z góry pewnej funkcji $t(x)$, spełniającej warunki brzegowe zadania.

Dla przykładu przyjmujemy, że w przecie wspornikowym z rys. 19.14 funkcja $t(x)$ ma w przybliżeniu kształt paraboli drugiego stopnia o równaniu:

$$t(x) = \frac{\Delta}{l^2} \cdot x^2.$$

Funkcja ta spełnia warunki brzegowe $t(0)=0$, $t'(0)=0$. Obliczymy całki występujące w równaniu (19.17):

$$\int_0^l (t')^2 dx = \frac{\Delta^2}{l^4} \int_0^l 4x^2 \cdot dx = \frac{4\Delta^2}{3l}, \quad \int_0^l (t'')^2 dx = \frac{\Delta^2}{l^4} \int_0^l 4 dx = \frac{4\Delta^2}{l^3}.$$

Zatem według równania (19.17) otrzymujemy że $P_{kr} \approx 3EJ/l^2$, wobec wyniku ścisłego

$$P_{kr} = \pi^2 EJ / (2l)^2 = 2,467 EJ / l^2.$$

Dużo lepsze przybliżenie otrzymamy, jeżeli drugą pochodną $t''(x)$, będącą krzywizną wygiętej osi pręta, wyrazimy przez moment zginający:

$$t''(x) = -M/(EJ) = -P(\Delta - t)/(EJ).$$

Wówczas

$$\frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EJ} dx - \frac{1}{2} P_{kr} \int_0^l (t')^2 dx = 0,$$

lub

$$\frac{P_{kr}^2}{EJ} \cdot \int_0^l (\Delta - t)^2 dx - P_{kr} \int_0^l (t')^2 dx = 0,$$

skąd

$$P_{kr} = \frac{EJ \int_0^l (t')^2 dx}{\int_0^l (\Delta - t)^2 dx} = 2,50 EJ / l^2.$$

Błąd tego przybliżenia jest teraz bardzo mały i wynosi tylko 1,3%. Ponieważ przybliżona linia ugięcia wymaga nałożenia pewnych więzów na rozwiązanie dokładne (pręt jest sztywniejszy), wartości sił krytycznych są zawsze obarczone błędem przez nadmiar. Jest to zasadnicza wada metody *Reyleigha*.

19.3. STANY POKRYTYCZNE*)

19.3.1. Wiadomości ogólne

W praktyce inżynierskiej do dnia dzisiejszego poprzestaje się z reguły na wyznaczeniu obciążenia krytycznego bez analizy pokrytycznego zachowania się konstrukcji. Wynika to zarówno z dużych trudności matematycznych występujących podczas badania dużych przemieszczeń, jak i trudności fizycznej interpretacji stanów pokrytycznych. Podstawy nowoczesnej teorii stanów pokrytycznych przy obciążeniach konserwatywnych zbudował *Koiter* w swej pracy doktorskiej ogłoszonej w 1945 roku. Pracę tę przetłumaczono na język angielski dopiero w 1967 roku, gdy pojawiły się już inne, późniejsze publikacje *Koitera* z zakresu stateczności. Okazuje się, że przyczyny szeregu niepowodzeń konstrukcyjnych oraz wielokrotnie stwierdzanych „błędów” eksperymentalnych tkwią z niedocenianiem wagi problematyki stanów pokrytycznych. Istotę tej problematyki zilustrujemy na kilku przykładach.

W analizie stanów pokrytycznych decydujące znaczenie mają pochodne cząstkowe funkcji energii potencjalnej Π względem parametru odkształcenia konstrukcji T . Dlatego dla skrócenia zapisu wprowadzimy oznaczenia:

$$\Pi_I = \frac{\partial \Pi}{\partial T}, \quad \Pi_{II} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial T^2}, \quad \Pi_{III} = \frac{\partial^3 \Pi}{\partial T^3}, \dots \quad (19.18)$$

Powrócimy do zadania rozważanego w p. 19.2.2 (rys. 19.13). Przyjmijmy, że parametrem obciążenia jest kąt obrotu pręta, czyli $T = \phi$. Energia potencjalna

$$\Pi(T, P) = \frac{1}{2} c T^2 - Pl \cdot (1 - \cos T), \quad (19.19)$$

a warunek równowagi ma postać:

$$\Pi_I(T, P) = \frac{\partial \Pi}{\partial T} = cT - Pl \cdot \sin T = 0. \quad (19.20)$$

Równowaga zachodzi dla dwóch przypadków:

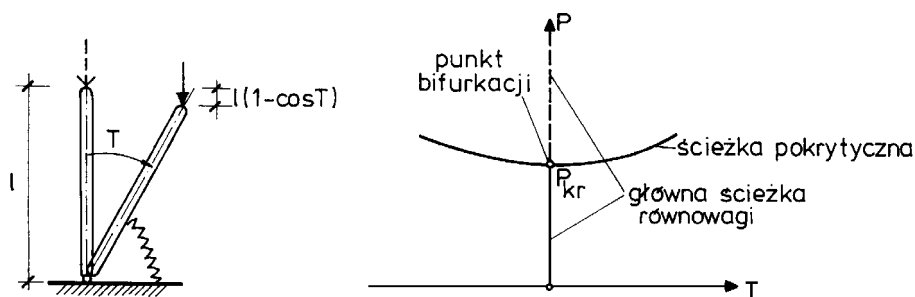
$$T = 0 \quad (19.21)$$

lub

*) Por. [14, 38, 50].

$$P(T) = \frac{cT}{l \cdot \sin T}. \quad (19.22)$$

W nie wychylonej pozycji pręta ($T = 0$) równowaga jest spełniona dla dowolnej wartości siły P . Tak zwana główna (fundamentalna) ścieżka równowagi odpowiada prostej $T = 0$, a druga ścieżka (pokrytyczna) dana jest wzorem (19.22). Obie ścieżki równowagi na płaszczyźnie (T, P) ilustruje rys. 19.15b.



Rys. 19.15

Problem stateczności rozstrzyga badanie znaku drugiej pochodnej energii potencjalnej, wyrażonej wzorem:

$$\Pi_{II}(T, P) = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial T^2} = c - Pl \cdot \cos T. \quad (19.23)$$

Na głównej ścieżce równowagi ($T = 0$) otrzymujemy

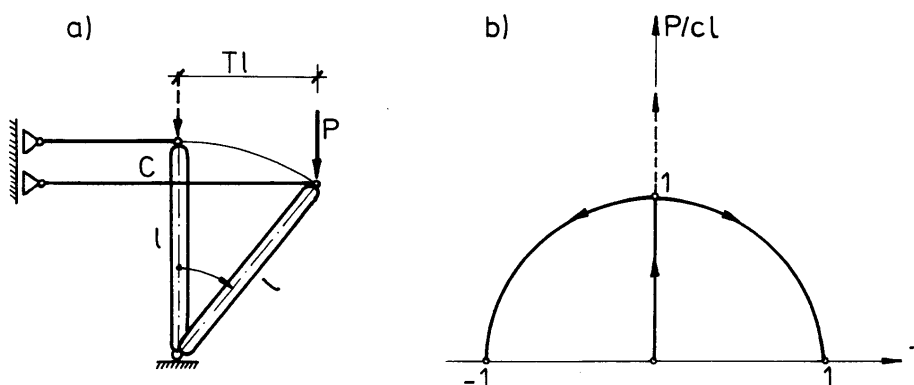
$$\Pi_{II}(0, P) = c - Pl,$$

skąd widać, że dla $P < P_{kr} = c/l$, $\Pi_{II}(0, P) > 0$, czyli energia potencjalna osiąga minimum i równowaga jest stateczna. Dla $P > P_{kr}$, równowaga jest niestateczna, bo $\Pi_{II}(0, P) < 0$.

Aby wykazać, że druga ścieżka równowagi (19.20) jest stateczna, trzeba udowodnić, że energia na tej ścieżce osiąga lokalne minimum w punkcie bifurkacji. Ponieważ $\Pi_I(0, P_{kr}) = \Pi_{II}(0, P_{kr}) = 0$, poszukujemy wartości następnych pochodnych:

$$\begin{aligned} \Pi_{III}(T, P) &= Pl \cdot \sin T, & \text{skąd } \Pi_{III}(0, P_{kr}) &= 0, \\ \Pi_{IV}(T, P) &= Pl \cdot \sin T, & \text{skąd } \Pi_{IV}(0, P_{kr}) &= c > 0. \end{aligned}$$

Widzimy więc, że funkcja $\Pi(T, P)$ na pokrytycznej ścieżce równowagi rzeczywiście osiąga lokalne minimum. Do tego samego wyniku dojdziemy, rozwijając funkcję $\Pi(T, P)$ w szereg Taylora. Godne uwagi jest to, że podobny jakościowo wynik uzyskaliśmy w p. 19.1.3 (rys. 19.3), gdzie badaliśmy duże przemieszczenie sprężystego pręta wspornikowego.



Rys. 19.16

Rozważmy obecnie nieco inne zadanie, przedstawione na rys. 19.16. Zbadamy deformacje układu złożonego z pionowego idealnie sztywnego pręta połączonego na jednym końcu z fundamentem za pośrednictwem przegubu. Drugi koniec jest podparty idealnie sprężystym prętem poziomym o sztywności podłużnej równej c . Pręt sprężysty przenosi zarówno ściskanie, jak i rozciąganie, a jego oś podczas deformacji jest zawsze pozioma. Całkowite przemieszczenie poziome punktu przyłożenia siły P wynosi Tl . Energię potencjalną układu zdeformowanego wyraża wzór:

$$\Pi(T, P) = \frac{1}{2}cl^2 \cdot T^2 - Pl\left(1 - \sqrt{1 - T^2}\right). \quad (19.24)$$

Otrzymujemy stąd warunek równowagi:

$$\Pi_I(T, P) = cl^2 \cdot T - PT \cdot \frac{l}{\sqrt{1 - T^2}} = 0 \quad (19.25)$$

oraz drugą pochodną:

$$\Pi_{II}(T, P) = cl^2 - Pl \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - T^2}} - PT^2 \cdot \frac{l}{\left(\sqrt{1 - T^2}\right)^3}. \quad (19.26)$$

Z warunku równowagi (19.25) wynika, że

$$T \left(cl - \frac{P}{\sqrt{1 - T^2}} \right) = 0.$$

Wobec tego albo

$$T = 0, \quad (19.27)$$

albo

$$P = P(T) = cl \cdot \sqrt{1 - T^2}. \quad (19.28)$$

Obie ścieżki (19.27) i (19.28) przecinają się w punkcie krytycznym, gdzie $P = P_{kr} = cl$. W punkcie tym

$$\Pi_{II}(0, P) = cl^2 - Pl.$$

Widać stąd, że pionowe położenie słupa jest stateczne, jeśli $P < P_{kr}$. Ze wzoru (19.28) i rys. 19.16b wynika natychmiast, że ścieżka pokrytyczna jest w każdym punkcie niestateczna. Ponadto można pokazać, że $\Pi_{III}(0, P_{kr}) = 0$ oraz $\Pi_{IV}(0, P_{kr}) = -3cl^2 < 0$, co dodatkowo dowodzi, że obciążenie pokrytyczne jest niestateczne.

Zbadamy jeszcze jeden układ, w którym idealnie sztywny pręt połączony przegubowo z fundamentem jest podparty ukośnym prętem sprężystym o sztywności c i nachylonym pod kątem 45° (rys. 19.17a). Energię potencjalną wyraża wzór:

$$\Pi(T, P) = cl^2 \left(\sqrt{1 + T} - 1 \right)^2 - Pl \cdot \left(1 - \sqrt{1 - T^2} \right), \quad (19.29)$$

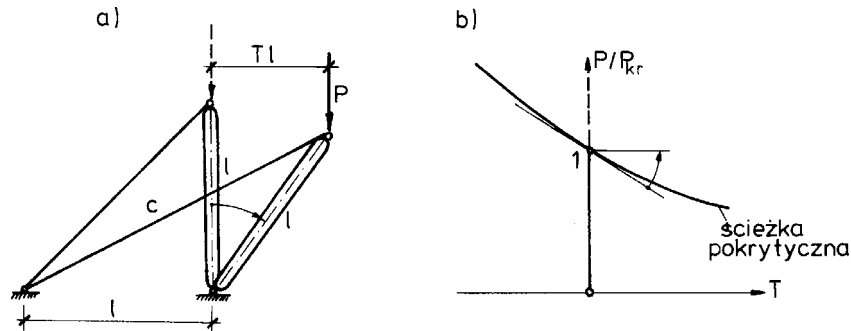
a równowaga zachodzi, gdy

$$\Pi_I(T, P) = cl^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + T}} \right) - PT \cdot \frac{l}{\sqrt{1 - T^2}} = 0. \quad (19.30)$$

Równanie (19.30) jest spełnione dla $T = 0$ (główna ścieżka równowagi) przy dowolnej wartości siły P . Stateczność tej ścieżki określa druga pochodna energii potencjalnej:

$$\Pi_{II}(0, P) = \frac{1}{2}cl^2 - Pl,$$

skąd widzimy, że jeśli $P < P_{kr} = cl/2$, to występuje równowaga stateczna, a jeśli $P > P_{kr}$ – równowaga niestateczna.



Rys. 19.17

Warunek równowagi (19.30) jest spełniony także, jeżeli siła P zmienia się według zależności:

$$P(T) = \frac{cl}{T} \cdot (\sqrt{1-T^2} - \sqrt{1-T}). \quad (19.31)$$

Równanie to określa ścieżkę pokrytyczną. Trzecia pochodna energii potencjalnej w punkcie bifurkacji ($T = 0$, $P = P_{kr}$)

$$\Pi_{III}(0, P_{kr}) = -\frac{3}{4}cl^2 < 0,$$

co wskazuje, że krytyczny stan równowagi jest niestateczny. Pozostaje jeszcze określenie pokrytycznego zachowania się badanej konstrukcji. Dla $T = 0$ wzór (19.31) jest symbolem nieoznaczonym typu $0/0$. W takim przypadku najdogodniej jest rozwinąć funkcję $P(T)$ w szereg potęgowy. Wykorzystamy znany wzór na rozwinięcie funkcji pierwiastkowej:

$$\sqrt{1 \pm a} = 1 \pm \frac{1}{2}a - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}a^2 \pm \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}a^3 - \dots, \quad |a| \leq 1,$$

co prowadzi do wyniku:

$$P(T) \approx cl \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{8}T + \frac{1}{16}T^2 - \frac{11}{128}T^3 + \dots \right). \quad (19.32)$$

Ze wzoru (19.32) wnioskujemy, że dla $T = 0$

$$P = P_{kr} = \frac{1}{2}cl$$

oraz

$$\frac{dP}{dT} = -\frac{3}{8}cl < 0. \quad (19.33)$$

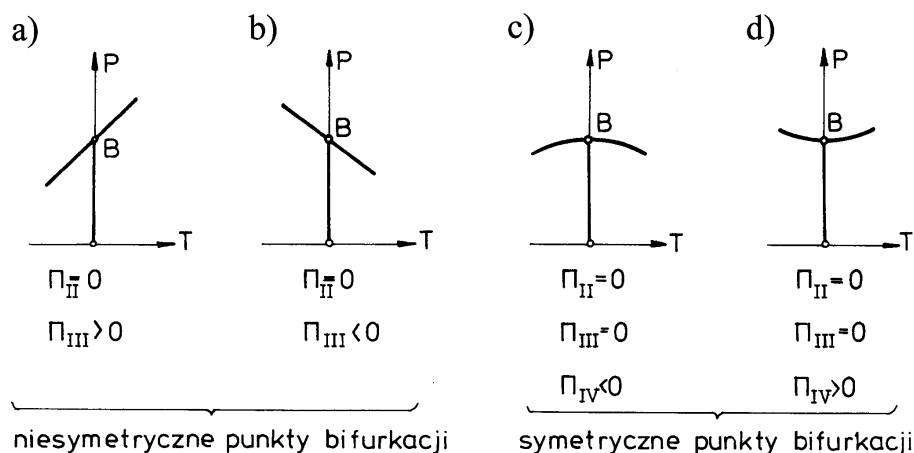
Otrzymaliśmy zatem bardzo ważny rezultat. Okazuje się, że w punkcie bifurkacji ścieżka pokrytyczna ma pochylenie niezerowe. Przebieg ścieżki pokrytycznej objaśnia rys. 19.17b.

19.3.2. Klasyfikacja punktów bifurkacji

Zadania rozwiązane w p. 19.3.1. pozwalają na wprowadzenie użytecznej klasyfikacji punktów bifurkacji. W zależności od charakteru wykresów $P(T)$ punkty bifurkacji możemy podzielić na niesymetryczne i symetryczne. Punkty niesymetryczne (rys. 19.18a,b) charakteryzują się tym, że w punkcie bifurkacji

(dla $T = 0$) $\Pi_{III} \neq 0$, a pochodna $dP/dT \neq 0$. W symetrycznych punktach bifurkacji

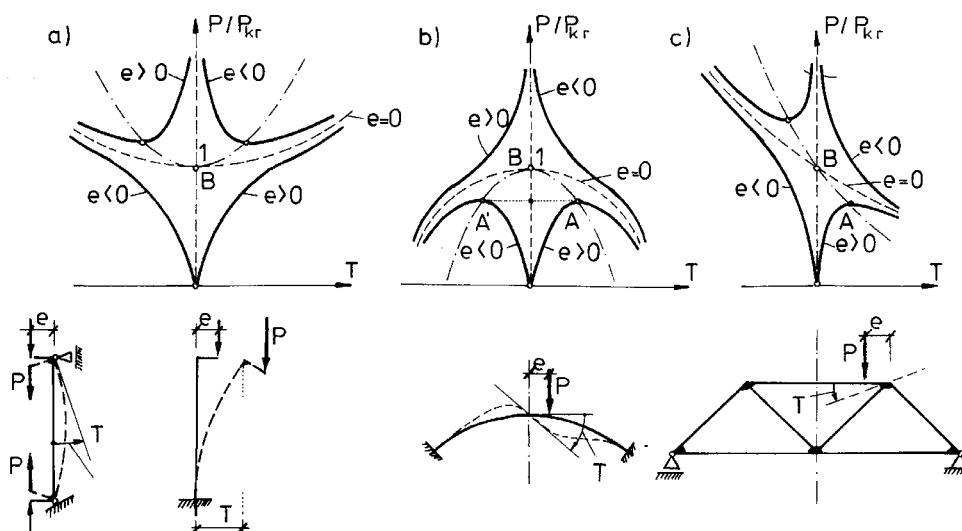
$\Pi_{III} = 0$ i $dP/dT = 0$, natomiast pochodna Π_{IV} może być dodatnia lub ujemna. Jeżeli $\Pi_{IV} < 0$, to symetryczny punkt bifurkacji jest niestateczny (rys. 19.18c). Symetryczny i stateczny punkt bifurkacji występuje, gdy $\Pi_{IV} > 0$ (rys. 19.18d).



Rys. 19.18

19.3.3. Wpływ imperfekcji

Omówione w p. 19.3.1 trzy modele wyczerpują charakterystyczne cechy zachowania się konstrukcji w zakresie pokrytycznym. W celu przeniesienia uzyskanych rezultatów na konstrukcje realne trzeba uwzględnić wpływ imperfekcji, określonych parametrem e . Wpływ tego parametru na przebiegi funkcji $P(T)$ ilustruje rys. 19.19.



Rys. 19.19

Model z rys. 19.19a odpowiada ściskaniu sprężystego pręta wspornikowego, a wykresy $P(T, e)$ jakościowo są identyczne z wykresami podanymi wcześniej na rys. 19.5b. Punkt bifurkacji jest tu symetryczny i stateczny. Własności te ma większość konstrukcji prętowych. Z charakteru wykresów $P(T, e)$ wynika, że do bezpiecznej oceny nośności wystarczy tutaj obliczenie obciążenia bifurkacyjnego.

Stwierdzenie to nie obowiązuje jednak, gdy symetryczny punkt bifurkacji jest niestateczny. Przypadek ten ilustruje rys. 19.19b, na którym imperfekcje powodują znaczne zmniejszenie obciążenia krytycznego

(punkt *A*) w stosunku do obciążenia bifurkacyjnego (punkt *B*). Wykresy przedstawione na rys. 19.19*b* są charakterystyczne dla łuków i cienkich powłok.

Sytuacje z rys. 19.19*c*, na którym występuje niesymetryczny punkt bifurkacji, są rzadziej spotykane w praktyce (np. kratownice o węzłach sztywnych, pewne szczególne przypadki ram, zamknięte powłoki kuliste). Z punktu widzenia bezpieczeństwa konstrukcji przypadki te są jednak bardzo ważne, bo i tu obserwujemy utratę stateczności dla obciążenia mniejszego od obciążenia bifurkacyjnego.

Na zakończenie należy podkreślić, że konstrukcje charakteryzujące się niestatecznymi punktami bifurkacji (rys. 19.19*b, c*) wykazują dużą czułość na imperfekcje i wymagają szczególnej uwagi przy szacowaniu ich nośności.

Opisane wyżej i przewidziane teoretycznie zjawiska towarzyszące stanom pokrytycznym zostały potwierdzone eksperymentalnie. W zakresie konstrukcji prętowych najszerzej znane są badania doświadczalne, które zapoczątkował w 1965 roku *Roorda* [37].

19.4. WYZNACZANIE OBCIĄŻEŃ KRYTYCZNYCH I FORM UTRATY STATECZNOŚCI W PRĘTACH PROSTYCH

19.4.1. Uwagi wstępne

Ze względu na kinematykę problemy stateczności można podzielić na dwie grupy:

- płaska utrata stateczności, w której wygięta oś pręta po utracie stateczności jest krzywą płaską,
- przestrzenna utrata stateczności, w której odkształcona oś pręta jest krzywą przestrzenną.

Do pierwszej grupy zaliczamy wyboczenie prętów ściskanych, które w teorii liniowej nosi nazwę wyboczenia eulerowskiego. Do grupy drugiej zaliczamy m. in. utratę płaskiej postaci zginania (zwichrzenie), wyboczenie skrętne i wyboczenie giętno-skrętne. Tutaj ograniczymy się do wyznaczania obciążeń krytycznych (bifurkacyjnych) w prętach prostych. Zasadnicze rozważania będą oparte na liniowej teorii stateczności sprężystej. Problemy stateczności w obszarze odkształceń sprężysto-plastycznych omówimy dokładniej przy analizie wyboczenia giętnego.

19.4.2. Płaska utrata stateczności prętów ściskanych. Wyboczenie

Rozważymy dowolnie podparty prostoliniowy pręt sprężysty o zmiennej sztywności, poddany działaniu idealnie osiowej siły ściskającej P . Do wyznaczenia obciążenia krytycznego w tym dosyć ogólnie sformułowanym zadaniu zastosujemy równanie różniczkowe linii ugięcia w postaci (19.5). Ponieważ obciążenie poprzeczne q nie występuje, równanie to przybiera postać:

$$[EJ(x) \cdot w'']'' + P \cdot w'' = 0, \quad (19.34)$$

gdzie $J(x)$ oznacza jeden z głównych momentów bezwładności przekroju pręta. Po podstawieniu, że $J(x) = J_1 \cdot \zeta(x)$, gdzie $J_1 = \text{const}$, oraz $\alpha^2 = P / (EJ_1)$, otrzymujemy:

$$[\zeta(x) \cdot w'']'' + \alpha^2 \cdot w'' = 0. \quad (19.35)$$

Rozwiązanie ogólne tego równania można przedstawić następująco:

$$w(x) = C_1 \cdot \varphi_1(\alpha, x) + C_2 \cdot \varphi_2(\alpha, x) + C_3 x + C_4, \quad (19.36)$$

gdzie $\varphi_1(\alpha, x)$ i $\varphi_2(\alpha, x)$ są funkcjami, których postać zależy od funkcji $\zeta(x)$. Dla pręta o stałej sztywności ($J(x) = J$, $\zeta(x) = 1$) rozwiązanie (19.36) przybiera postać:

$$w(x) = C_1 \cdot \sin(\alpha, x) + C_2 \cdot \cos(\alpha, x) + C_3 x + C_4. \quad (19.36a)$$

Stałe C_i ($i = 1, 2, 3, 4$) oblicza się na podstawie warunków brzegowych, dwóch na każdym końcu pręta. Dla najczęściej spotykanych sposobów podparcia przyjmujemy następujące warunki brzegowe:

- utwierdzenie $w = 0$, $w' = 0$,
- podpora przegubowa $w = 0$, $M = 0$, czyli $w'' = 0$,

– koniec swobodny $M = 0$, czyli $w'' = 0$,

$$Q = 0, \text{ czyli } [\zeta(x) \cdot w''] + \alpha^2 \cdot w' = 0. \quad (19.37)$$

Do sformułowania powyższych warunków wykorzystano wzory (19.3) i (19.4) wiążące siły wewnętrzne z funkcją ugięcia. Po podstawieniu rozwiązania (19.36) lub (19.36a) do warunków (19.37) otrzymujemy układ czterech równań liniowych jednorodnych ze względu na stałe C_i :

$$\left. \begin{aligned} a_{11}C_1 + a_{12}C_2 + a_{13}C_3 + a_{14}C_4 &= 0, \\ a_{21}C_1 + a_{22}C_2 + a_{23}C_3 + a_{24}C_4 &= 0, \\ a_{31}C_1 + a_{32}C_2 + a_{33}C_3 + a_{34}C_4 &= 0, \\ a_{41}C_1 + a_{42}C_2 + a_{43}C_3 + a_{44}C_4 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (19.38)$$

gdzie współczynniki a_{ij} ($i, j = 1, 2, 3, 4$) są funkcjami parametru α . Wyznacznik układu (19.38) ma postać:

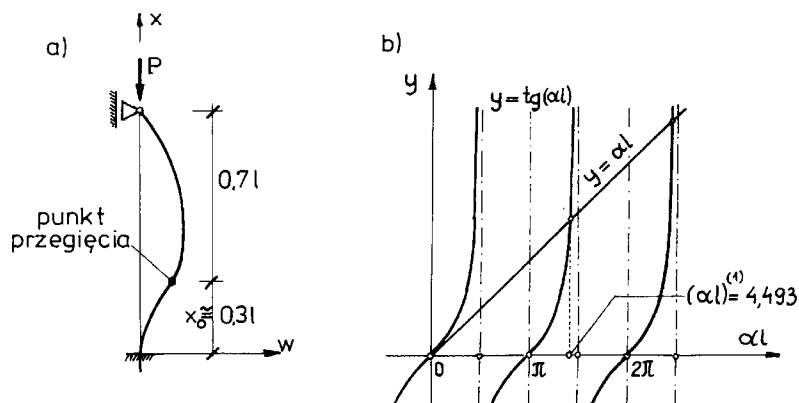
$$\text{Det}[a_{ij}] = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}. \quad (19.39)$$

Jeżeli $\text{Det}[a_{ij}] \neq 0$, to $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$. Wówczas rozwiązanie układu (19.38) jest trywialne, co oznacza, że wyboczenie nie występuje, bo $w(x) \equiv 0$. Aby choć jedna stała całkowania była różna od zera, wyznacznik układu musi być równy zeru. Wtedy oprócz prostoliniowej postaci równowagi pręta mogą wystąpić również krzywoliniowe postacie równowagi. Warunek

$$\text{Det}[a_{ij}(\alpha)] = 0 \quad (19.40)$$

jest zatem kryterium osiągnięcia stanu krytycznego. Rozwinięcie wyznacznika prowadzi do równania przestępnego ze względu na $\alpha(P)$. Najmniejszy rzeczywisty i dodatni pierwiastek tego równania określa najmniejszą siłę krytyczną $P^{(1)} = P_{kr}$

i pierwszą postać wyboczenia. Pozostałe pierwiastki rzeczywiste i dodatnie określają wyższe siły krytyczne i wyższe postacie wyboczenia. Przedstawione rozumowanie ma sens tylko dla pewnej klasy równań różniczkowych, w których dla jednorodnych warunków brzegowych oprócz rozwiązania trywialnego istnieją jeszcze rozwiązania niezerowe dla stałych całkowania. Własność tę mają zawsze równania różniczkowe stateczności.



Rys. 19.20

W celu ilustracji rozważań obliczymy siłę krytyczną dla pręta pryzmatycznego przedstawionego na rys. 19.20a. Ponieważ $EJ = \text{const}$, więc rozwiązanie równania różniczkowego (19.35) przybiera postać (19.36a). Warunki brzegowe są następujące: $w(0) = w(l) = 0$; $w'(0) = 0$; $w''(l) = 0$. Obliczamy pochodne funkcji $w(x)$:

$$w'(x) = -C_1\alpha \sin \alpha x + C_2\alpha \cos \alpha x + C_3,$$

$$w''(x) = -C_1\alpha^2 \cos \alpha x - C_2\alpha^2 \sin \alpha x.$$

Podstawienie warunków brzegowych prowadzi do układu jednorodnych równań liniowych:

$$w(0) = 0: \quad C_1 + C_4 = 0,$$

$$w'(0) = 0: \quad C_2\alpha + C_3 = 0,$$

$$w(l) = 0: \quad C_1 \cos \alpha l + C_2 \sin \alpha l + C_3 l + C_4 = 0,$$

$$w''(l) = 0: \quad -C_1\alpha^2 \cos \alpha l - C_2\alpha^2 \sin \alpha l = 0.$$

Kryterium osiągnięcia stanu krytycznego odpowiada zerowaniu się wyznacznika tego układu równań:

$$\text{Det} [a_{ij}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ \cos \alpha l & \sin \alpha l & 1 & 1 \\ -\alpha^2 \cos \alpha l & -\alpha^2 \sin \alpha l & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Po obliczeniu wartości wyznacznika otrzymujemy równanie przestępne ze względu na (αl) :

$$-\alpha l + \text{tg}(\alpha l) = 0.$$

Równanie to ma nieskończenie wiele pierwiastków (por. rys. 19.20b). Najmniejszy z nich $(\alpha l)^{(1)} \approx 4,493$, czyli

$$l \sqrt{\frac{P^{(1)}}{EJ}} = 4,493,$$

skąd

$$P^{(1)} = P_{kr} = \frac{(4,493)^2 \cdot EJ}{l^2} = \frac{\pi^2 \cdot EJ}{(0,699l)^2} \approx \frac{\pi^2 \cdot EJ}{(0,70l)^2}. \quad (19.41)$$

Postać linii ugięcia można określić z dokładnością do jednej stałej:

$$w(x) = C \cdot \left[\alpha(l-x) - \frac{\sin \alpha(l-x)}{\cos \alpha l} \right].$$

Zmiana znaku krzywizny tej linii występuje, gdy

$$w''(x_0) = C\alpha^2 \frac{\sin \alpha(l-x_0)}{\cos \alpha l} = 0,$$

skąd

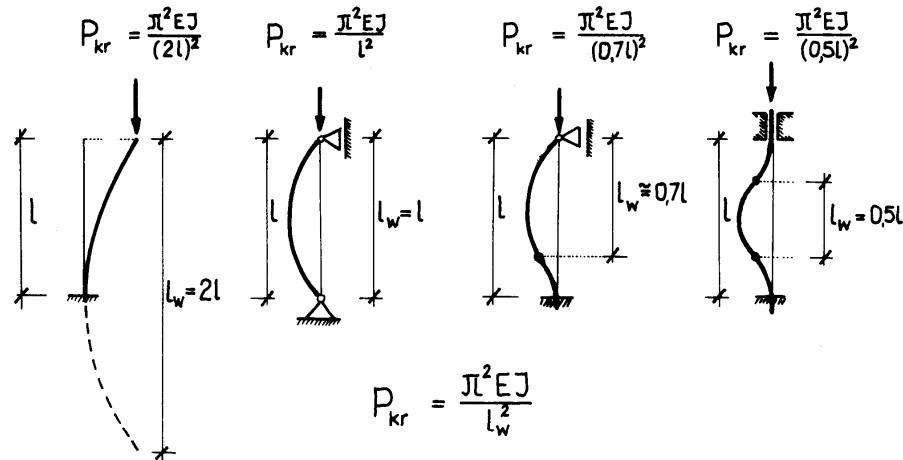
$$x_0 = l - \frac{n\pi}{\alpha}; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Wobec tego długość półfali sinusoidy dla $n = 1$

$$l - x_0 = \frac{\pi}{\alpha(l)} = \frac{\pi l}{4,493} = 0,70l.$$

Kształt pierwszej postaci wyboczenia ilustruje rys. 19.20a.

Rezultaty przedstawionego wyżej sposobu postępowania dla sprężystych prętów pryzmatycznych ($EJ = \text{const}$) przy najczęściej spotykanych warunkach podparcia zestawiono na rys. 19.21.



Rys. 19.21

Budowa wzorów na obliczanie siły krytycznej nasuwa myśl, by niezależnie od sposobu podparcia pręta siłę tę wyznaczyć z jednego uniwersalnego wzoru. Jest to tzw. wzór *Eulera*:

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EJ}{l_w^2}, \quad (19.42)$$

gdzie przez l_w oznaczono tzw. **długość wyboczeniową**, uwzględniającą warunki brzegowe. Długość tę określa się zazwyczaj jako iloczyn rzeczywistej długości pręta l i współczynnika długości wyboczeniowej v :

$$l_w = vl. \quad (19.43)$$

Długość wyboczeniowa odpowiada długości półfali sinusoidy przedstawiającej daną postać wyboczenia. Wartości bezwymiarowego współczynnika v mieszczą się w dosyć szerokim zakresie. Na przykład, dla prętów ram dochodzą do kilkunastu, a nawet kilkudziesięciu. Przypomnieć trzeba, że J we wzorze *Eulera* oznacza jeden z głównych momentów bezwładności przekroju pręta. Wobec tego siła krytyczna odpowiada mniejszej wartości stosunku J/l_w . Jeżeli zatem warunki brzegowe w obu płaszczyznach głównych są takie same (tj. $l_w^I = l_w^{II}$), to $J = J_{II} = J_{\min}$.

Dotychczasowe rezultaty uzyskaliśmy przy założeniu, że pręt jest idealnie sprężysty i ma nieograniczoną wytrzymałość. W rzeczywistości jednak własności mechaniczne materiału pręta zależą od poziomu naprężeń normalnych. Dlatego celowe jest obliczenie naprężenia krytycznego σ_{kr} , odpowiadającego sile krytycznej dla pręta o osi prostoliniowej:

$$\sigma_{kr} = \frac{P_{kr}}{A}. \quad (19.44)$$

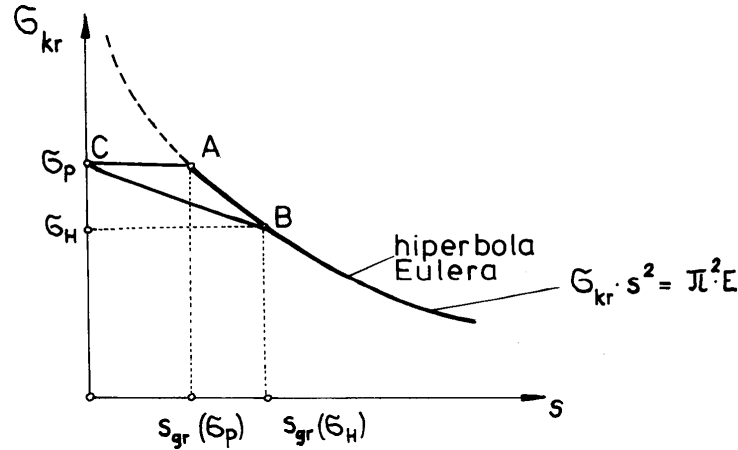
Ponieważ niewielki wzrost siły ponad wartość krytyczną w krzywoliniowej postaci równowagi powoduje drastyczny wzrost naprężeń normalnych (por. p. 19.1.2), naprężenie krytyczne można traktować jako naprężenie niszczące. Po uwzględnieniu wzoru *Eulera* (19.42) naprężenie krytyczne

$$\sigma_{kr} = \frac{P_{kr}}{A} = \frac{\pi^2 EJ}{l_w^2 \cdot A} = \frac{\pi^2 E}{s^2}, \quad (19.45)$$

gdzie

$$s = \frac{l_w}{i}, \quad i = \sqrt{\frac{J}{A}}.$$

Bezwymiarowy współczynnik s nazywamy smukłością pręta, a i oznacza promień bezwładności przekroju. Zależność (19.45) wskazuje na to, że naprężenie krytyczne zależy od modułu sprężystości i smukłości pręta: $\sigma_{kr} = \sigma_{kr}(E, s)$. Nie jest to zatem stała materiałowa, lecz stała konstrukcyjna. Wykres zależności $\sigma_{kr}(s)$ dla ustalonej wartości modułu sprężystości ilustruje rys. 19.22. Jest to tzw. hiperbola Eulera.



Rys. 19.22

Ze wzoru (19.45) wynika, że jeśli smukłość zmierzałaby do zera (pręty bardzo krępe), to naprężenie niszczące (krytyczne) dążyłoby do nieskończoności, czyli $\sigma_{kr}(E, 0) \rightarrow \infty$. W materiałach o ograniczonej wytrzymałości wniosek ten jest oczywiście niesłuszny, gdyż zniszczenie pręta osiowo ściskanego występuje, gdy naprężenie jest równe granicy plastyczności σ_P . W najprostszym przypadku, gdy materiał jest sprężysto-idealnie plastyczny (rys. 19.23a), wzór (19.45) obowiązuje tylko dla $\sigma_{kr} \leq \sigma_P$. Wymaganie to określa pewną graniczną smukłość $s_{gr}(\sigma_P)$:

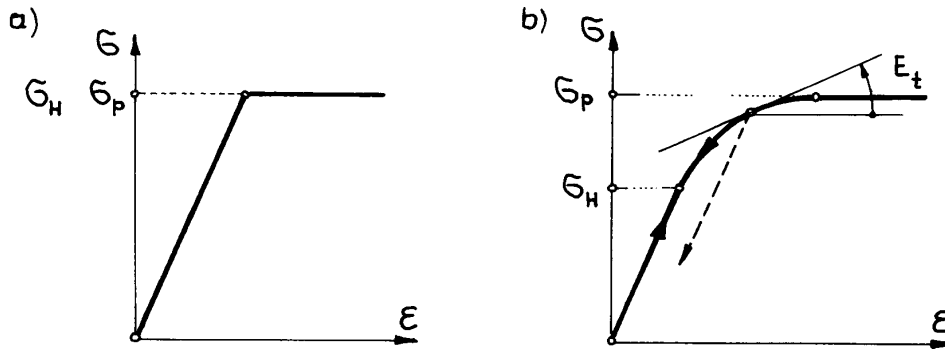
$$\frac{\pi^2 \cdot E}{s_{gr}^2(\sigma_P)} = \sigma_P,$$

skąd

$$s_{gr}(\sigma_P) = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_P}}. \quad (19.46)$$

Poniżej tej wartości naprężenie krytyczne jest równe granicy plastyczności (por. prosta AC na rys. 19.22). Mamy więc:

$$\sigma_{kr}(s) = \begin{cases} \frac{\pi^2 E}{s^2}, & s \geq s_{gr}(\sigma_P), \\ \sigma_P, & 0 \leq s \leq s_{gr}(\sigma_P). \end{cases} \quad (19.47)$$



Rys. 19.23

Lepszym przybliżeniem funkcji $\sigma(\varepsilon)$ jest wykres z rysunku 19.23b, gdzie granica proporcjonalności σ_H jest niższa od granicy plastyczności σ_P . Wzór *Eulera* obowiązuje oczywiście tylko dla $\sigma_{kr} \leq \sigma_H$. Zatem smukłość graniczna $s_{gr}(\sigma_H)$ wynosi:

$$s_{gr}(\sigma_H) = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_H}}. \quad (19.48)$$

Powstaje zatem problem wyznaczenia funkcji $\sigma_{kr}(s)$ dla małych smukłości, gdy $0 \leq s \leq s_{gr}(\sigma_H)$. Nie wnikając bliżej w analizę zakresu sprężysto-plastycznego można przyjąć rozwiązanie najprostsze, a mianowicie zależność liniową odpowiadającą prostej *BC* na rysunku 19.22a. Wówczas

$$\sigma_{kr}(s) = \begin{cases} \frac{\pi^2 E}{s^2}, & s \geq s_{gr}(\sigma_H), \\ \sigma_P - \frac{(\sigma_P - \sigma_H)}{s_{gr}(\sigma_H)} \cdot s, & 0 \leq s \leq s_{gr}(\sigma_H). \end{cases} \quad (19.49)$$

Warto dodać, że wyniki badań doświadczalnych prowadzonych nieprzerwanie od około stu lat układają się w obrębie trójkąta *ABC*. Pierwsze z nich to obszerne badania *Tetmajera*, który – podobnie jak *Jasiński* – zaproponował liniową zależność $\sigma_{kr}(s)$. Inna propozycja pochodzi od *Ostenfelda* i *Johnsona* (parabola drugiego stopnia). Propozycje te (przedstawione na przełomie XIX i XX wieku) mają charakter empiryczny. Głębszą analizę teoretyczną tego ciekawego problemu zapoczątkował *Engesser* w 1889 roku. Metoda *Engessera* w gruncie rzeczy zakłada, że materiał jest nieliniowo-sprężysty. Wówczas w wyrażeniu na krzywiznę zamiast modułu *Younga* E wystarczy podstawić wartość pochodnej $d\sigma / d\varepsilon = E_t$, czyli tzw. moduł styczny. Wówczas

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 \cdot E_t \cdot J}{l_w^2} \quad (19.50)$$

oraz

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E_t}{s^2}, \quad 0 \leq s \leq s_{gr}(\sigma_H). \quad (19.50a)$$

Rozumowanie *Engessera* w swej oryginalnej wersji dotyczyło materiału sprężysto-plastycznego. Zawiera ono szereg niedociągnięć, gdyż:

- moduł styczny jest w rzeczywistości zmienny na długości pręta,

- długości wyboczeniowe dla przypadków, gdy naprężenia przekraczają granicę proporcjonalności, są inne niż w teorii *Eulera*,
- w krzywoliniowej postaci równowagi we włóknach odciążanych (po stronie wypukłej) moduł sprężystości jest większy i jednocześnie równy modułowi początkowemu.

Na trzeci z wyżej wymienionych błędów zwrócił uwagę *Karman*, wobec czego *Engesser* przerobił swój wzór wprowadzając pewną inną wartość modułu E_r , uwzględniającą odciążenie (tak zwana teoria podwójnego modułu). Okazało się jednak, że poprawka ta prowadzi do zbyt dużych wartości sił krytycznych. Fakt ten zinterpretował w 1947 roku *Shanley*. Stwierdził on, że przy wzroście siły ściskającej odciążenie włókien po stronie wypukłej nie następuje i dlatego pierwotna teoria *Engessera* wykazuje dużo lepszą zgodność z doświadczeniem. Podczas wyboczenia w obszarach sprężysto-plastycznych pręty zachowują się, jakby były wykonane z materiału nieliniowo-sprężystego. Fakt ten do dnia dzisiejszego nie znalazł jeszcze zadowalającego wyjaśnienia.

Omówienie teorii *Engessera-Karmana* i *Engessera-Shanleya* wraz z przykładami zawiera wiele podręczników [2, 34, 48, 53, 55]. Dlatego nie przytaczamy tu szczegółów, tym bardziej, że w normach projektowania prętów ściskanych stosuje się jeszcze inne podejście. Praktyczny sposób sprawdzania warunku wytrzymałościowego polega bowiem na spełnieniu nierówności:

$$\sigma_{obl} = \frac{P}{A\varphi(s)} \leq \sigma_{dop} = \frac{\sigma_P}{n_0}, \quad (19.51)$$

gdzie $\varphi(s) \leq 1$ i jest tzw. współczynnikiem wyboczeniowym, n_0 – współczynnikiem bezpieczeństwa większym od jedności i zależnym od smukłości pręta, a σ_{obl} oznacza fikcyjne naprężenia obliczeniowe. Wzór (19.51) obowiązuje zarówno w obszarze sprężystym, jak i niesprężystym. Współczynnik zmniejszający $\varphi(s)$ jest ujęty w tablicach lub opisany wzorami empirycznymi. W celu zinterpretowania tego współczynnika rozważmy kryterium wytrzymałościowe przedstawione w postaci nierówności:

$$\sigma = \frac{P}{A} \leq \frac{\sigma_{kr}(s)}{n_0}.$$

Po pomnożeniu obu stron tej nierówności przez granicę plastyczności otrzymujemy:

$$\frac{P}{A} \cdot \sigma_P \leq \frac{\sigma_P}{n_0} \cdot \sigma_{kr}(s)$$

lub

$$\frac{P}{A} \cdot \frac{\sigma_P}{\sigma_{kr}(s)} \leq \frac{\sigma_P}{n_0} = \sigma_{dop}.$$

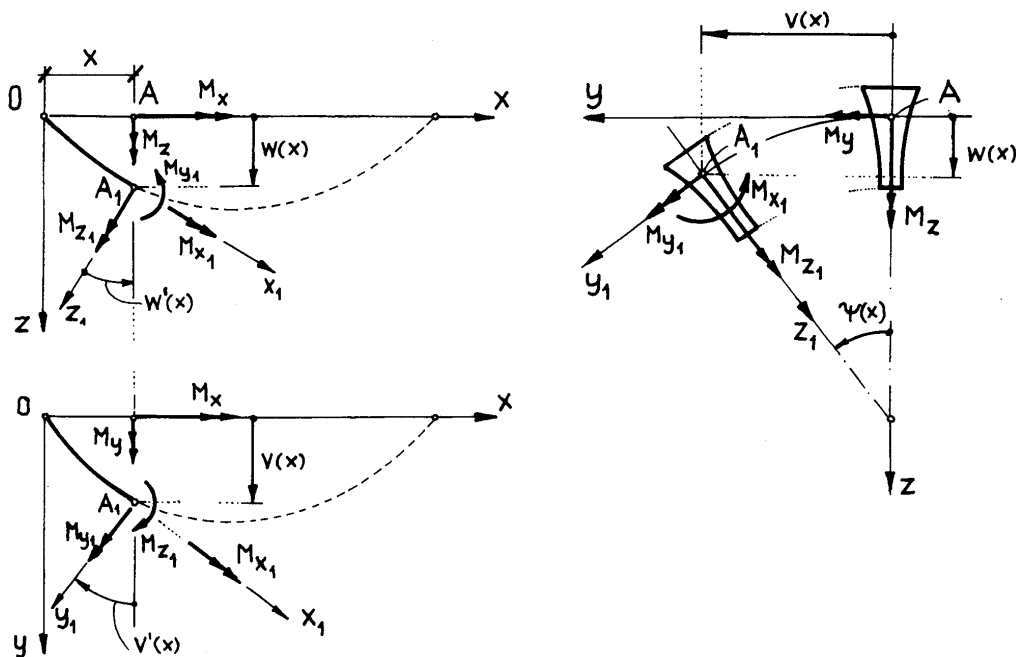
Porównując tę nierówność z nierównością (19.51), dochodzimy do wniosku, że współczynnik wyboczeniowy $\varphi(s)$ można interpretować jako stosunek naprężenia krytycznego do granicy plastyczności:

$$\varphi(s) \approx \frac{\sigma_{kr}(s)}{\sigma_P} \leq 1. \quad (19.52)$$

19.4.3. Przestrzenna utrata stateczności prętów prostych

19.4.3.1. Kinematyka i równania różniczkowe stateczności

Wprowadzimy prawoskrętny układ współrzędnych x, y, z pokrywający się z osią ciężkości i głównymi osiami bezwładności przekroju pręta. Kinematykę przestrzennej utraty stateczności obrazuje rys. 19.24.



Rys. 19.24

Podstawowym uproszczeniem jest ograniczenie rozważań do małych przemieszczeń i przyjęcie, że oś pręta jest nieskracalna, czyli $u(x, 0, 0) = 0$. Ponadto przyjmujemy, że rzut przekroju poprzecznego na płaszczyznę prostopadłą do osi pręta w procesie deformacji nie zmienia swoich wymiarów (założenie „sztywnego” przekroju poprzecznego). Wobec powyższego kinematyka zdeformowanego pręta jest określona jednoznacznie przez trzy funkcje: współrzędne wektora przemieszczenia punktów osi pręta $v(x)$ i $w(x)$ oraz kąt skręcenia całego przekroju względem środka ścinania $\psi(x)$.

Przy układaniu równań różniczkowych linii ugięcia na funkcje $v(x)$, $w(x)$ i $\psi(x)$ przyjmuje się, że jedyną przyczyną deformacji osi są momenty zginające M_{y1} i M_{z1} oraz moment skręcający $M_{x1} = \mathcal{M}$.

Momenty te oblicza się w konfiguracji odkształconej z uwzględnieniem zmian geometrii. Osie x, y_1 i z_1 są lokalnymi osiami współrzędnych, związanymi z danym przekrojem pręta (por. rys. 19.24). Równania różniczkowe linii ugięcia pręta idealnie sprężystego opisują znane zależności (wzory (13.29) i (13.48)):

$$(a) \quad \begin{cases} -E_1 J_\omega \cdot \psi''' + G J_s \psi' = M_{x1}, \\ EJ_y |k_y| = |M_{y1}|, \\ EJ_z |k_z| = |M_{z1}|. \end{cases}$$

Pierwsza zależność wynika z teorii prętów cienkościennych *Własowa*, a dwie pozostałe z teorii zginania prętów cienkich. Zgodność znaków momentów M_{y1} i M_{z1} ze znakami krzywizn k_y i k_z wymaga, by w przyjętym układzie współrzędnych zachodziły związki:

$$(b) \quad \begin{cases} k_y = -\frac{d^2 w}{dx^2} = -w''(x), \\ k_z = \frac{d^2 v}{dx^2} = v''(x). \end{cases}$$

Wobec powyższego równania (a) przybierają postać:

$$(c) \quad \begin{cases} -E_1 J_\omega \psi''' + G J_s \psi' = M_{x1}, \\ -E J_y w''(x) = M_{y1}, \\ E J_z v''(x) = M_{z1}. \end{cases}$$

Trzeba tu zwrócić uwagę, że stosownie do przyjętego układu osi dodatni moment M_{z1} według rysunku 19.24b rozciąga „górne” włókna pręta. Należy jeszcze sprecyzować wartości współrzędnych wypadkowego wektora $\mathbf{M}_1 = (M_{x1}, M_{y1}, M_{z1})$. Wektor ten możemy uważać za sumę dwóch wektorów

$\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_1^0 + \Delta \mathbf{M}_1(v, w, \psi)$, czyli

$$(d) \quad \begin{cases} M_{x1} = M_{x1}^0 + \Delta M_{x1}(v, w, \psi), \\ M_{y1} = M_{y1}^0 + \Delta M_{y1}(v, w, \psi), \\ M_{z1} = M_{z1}^0 + \Delta M_{z1}(v, w, \psi). \end{cases}$$

Indeksem 0 oznaczono momenty wynikające z rzutowania momentów M_x , M_y i M_z , występujących w konfiguracji nieodkształconej na osie lokalnego układu współrzędnych x , y i z w konfiguracji odkształconej:

$$(e) \quad \begin{cases} M_{x1}^0 = M_x \cos(x, x_1) + M_y \cos(y, x_1) + M_z \cos(z, x_1), \\ M_{y1}^0 = M_x \cos(x, y_1) + M_y \cos(y, y_1) + M_z \cos(z, y_1), \\ M_{z1}^0 = M_x \cos(x, z_1) + M_y \cos(y, z_1) + M_z \cos(z, z_1). \end{cases}$$

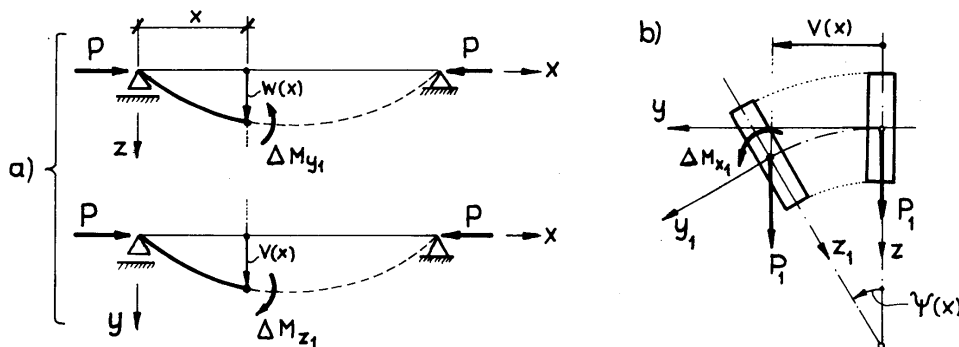
Symbolem $\Delta \mathbf{M}_1$ oznaczono dodatkowe momenty pochodzące od obciążeń konserwatywnych i mających charakter sił (tzn. nie-momentów). Te dodatkowe momenty będziemy każdorazowo precyzować w konkretnych zadaniach. Dla przykładu podamy ich wartości w dwóch szczególnych przypadkach podanych na rys. 19.25.

W zadaniu z rys. 19.25a mamy:

$$\Delta M_{x1} \approx 0, \quad \Delta M_{y1} = P \cdot w(x), \quad \Delta M_{z1} = -P \cdot v(x),$$

a w zadaniu z rys. 19.25b:

$$\Delta M_{x1} = P \cdot w(x), \quad \Delta M_{y1} \approx 0, \quad \Delta M_{z1} \approx 0.$$



Rys. 19.25

Na uwagę zasługuje fakt, że pominęliśmy wszystkie człony nieliniowe. Dzięki temu część dodatkowych momentów jest równa zero. Dokładniejsze obliczenie prowadzi do nieliniowych równań różniczkowych, w których należałoby również uwzględnić skończone krzywizny i kąty skręcenia. Wyjaśni się to bliżej, gdy wyznaczymy kosinusy kierunkowe odkształconej osi pręta występujące w równaniach (e).

Dla małych kątów przyjmuje się tylko pierwszy wyraz rozwinięciach funkcji trygonometrycznych w szereg Taylora:

$$\cos \varphi \approx 1, \quad \sin \varphi \approx \varphi, \quad \operatorname{tg} \varphi \approx \varphi.$$

Mając to na uwadze i korzystając z rys. 19.24, łatwo możemy zbudować tabelę kosinusów kierunkowych:

	x	y	z
x_1	1	v'	w'
y_1	$-v'$	1	ψ
z_1	$-w'$	ψ	1

Po uwzględnieniu tych wartości wzory (e) przyjmują postać:

$$(g) \quad \begin{cases} M_{x1}^0 = M_x + M_y v' + M_z w', \\ M_{y1}^0 = -M_x v' + M_y + M_z \psi, \\ M_{z1}^0 = -M_x w' - M_y \psi + M_z. \end{cases}$$

Po podstawieniu równań (f) i (d) do zależności (c) otrzymujemy ogólną postać równań różniczkowych przestrzennej utraty stateczności:

$$\left. \begin{aligned} E_1 J_{\omega} \psi''' - G J_s \psi' + M_x + M_y v' + M_z w' + \Delta M_{x1}(v, w, \psi) &= 0, \\ E J_y w'' - M_x v' + M_y + M_z \psi + \Delta M_{y1}(v, w, \psi) &= 0, \\ E J_z v'' + M_x w' + M_y \psi - M_z - \Delta M_{z1}(v, w, \psi) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (19.53)$$

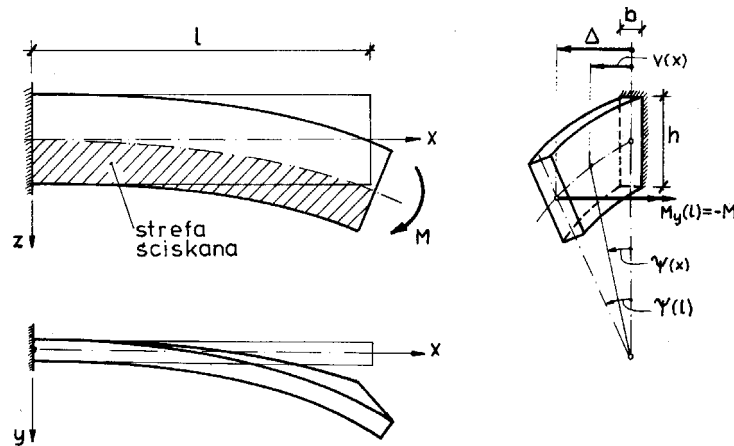
Równanie (19.53)₁ jest słuszne jedynie wówczas, gdy środek ścinania pokrywa się ze środkiem ciężkości przekroju. Jeżeli tak nie jest, to postać tego równania wymaga oddzielnej analizy (por. p. 19.4.3.3). W przypadkach, gdy obciążenie jest przyłożone tylko na końcach pręta, wystarczy w miejsce M_x, M_y, M_z i ΔM_{x1} podstawić odpowiednio wartości $M_x^{(s)}, M_y^{(s)}, M_z^{(s)}$ i $\Delta M_{x1}^{(s)}$ odniesione do środka ścinania. Szczególny przypadek takiego obciążenia zawiera analiza wyboczenia giętno-skrętnego osiowo ściskanego pręta cienkościennego w p. 19.4.3.3.

19.4.3.2. Utrata płaskiej postaci zginania (zwichrzenie)

Zjawisko zwichrzenia belek odkryli niezależnie od siebie *Prandtl* i *Mitchell* w 1899 roku, a zostało ono szczegółowo zbadane przez *Timoszenkę* w pierwszych latach bieżącego stulecia.

Zwichrzenie występuje podczas zginania belek w płaszczyźnie większej sztywności. Najczęściej zjawisko to występuje, gdy sztywność w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny zginania jest bardzo mała. Rozważmy zatem belkę wspornikową o przekroju w kształcie wydłużonego prostokąta, obciążoną na swobodnym końcu momentem zginającym $M_y(l) = M$ (rys. 19.26). Pod wpływem tego momentu belka ulega wygięciu w płaszczyźnie (x, z) . W miarę wzrostu momentu ugięcia belki w tej płaszczyźnie powiększają się. Przy pewnej krytycznej wartości tego momentu następuje gwałtowna zmiana kinematyki i pojawia się nowe położenie równowagi; belka ulega skręceniu i wygięciu w płaszczyźnie (x, y) . Następu-

je zatem utrata płaskiej postaci zginania, czyli zwichrzenie. Jako przyczynę zwichrzenia można upatrywać wyboczenia strefy ściskanej przekroju belki w płaszczyźnie najmniejszej sztywności.



Rys. 19.26

W celu wyznaczenia momentu krytycznego M_{kr} , posłużymy się równaniami (19.53), w których

$$J_{\omega} = 0; M_x = M_z = \Delta M_{x1} = \Delta M_{y1} = \Delta M_{z1} = 0, \text{ a } M_y(x) = -M = \text{const:}$$

$$(a) \quad \begin{cases} -GJ_s \psi' - Mv' = 0, \\ EJ_y w'' - M = 0, \\ EJ_z v'' - M\psi = 0. \end{cases}$$

W dalszych rozważaniach wykorzystamy tylko pierwsze i trzecie z tych równań. Tworzą one układ równań różniczkowych zwyczajnych ze względu na funkcje $v(x)$ i $\psi(x)$. Po zróźniczkowaniu pierwszego z równań względem x i wyeliminowaniu za pomocą trzeciego drugiej pochodnej v'' otrzymujemy równanie różniczkowe na funkcję $\psi(x)$:

$$(b) \quad GJ_s \psi'' + \frac{M^2}{EJ_z} \psi = 0$$

lub

$$\psi'' + \alpha^2 \psi = 0,$$

gdzie $\alpha^2 = M^2 / (EJ_z GJ_s)$. Całą ogólną tego równania jest funkcja:

$$\psi(x) = C_1 \cdot \sin(\alpha x) + C_2 \cos(\alpha x).$$

Ponieważ kąt skręcenia w utwierdzeniu jest równy zero i moment skręcający dla $x = l$ jest także równy zero, zatem warunki brzegowe są następujące:

$$\psi(0) = 0, \quad GJ_s \psi'(l) = 0.$$

Wobec tego $C_2 = 0$ oraz

$$C_1 \alpha \cdot \cos(\alpha l) = 0.$$

Z powyższego wnioskujemy, że zwichrzenie występuje, gdy $\cos(\alpha l) = 0$. Najmniejszy moment krytyczny odpowiada wartości $\alpha l = \pi/2$, stąd

$$M_{kr} = \frac{\pi}{2l} \cdot \sqrt{EJ_z GJ_s}. \quad (19.54)$$

Postać zwichrzenia określona jest z dokładnością do stałej C_1 :

$$\psi(x) = C_1 \cdot \sin(\alpha x) = C_1 \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right).$$

Wzór (19.54) daje poprawną wartość obciążenia krytycznego jedynie w obszarze sprężystym. Poza obszarem sprężystym zwichrzenie występuje dla obciążenia mniejszego od tego, jakie wynika ze wzoru (19.54). W celu określenia zakresu ważności wzoru (19.54) obliczymy naprężenie krytyczne:

$$\sigma_{kr} = \frac{M_{kr}}{W_y} = \frac{\pi}{2lW_y} \cdot \sqrt{EJ_z GJ_s}.$$

Ponieważ dla prostokąta o wysokości h i szerokości b , $W_y = bh^2/6$, $J_z = b^3h/12$ oraz $J_s = b^3h/3$, więc zwichrzenie sprężyste zachodzi, gdy

$$\sigma_{kr} = \pi E \cdot \frac{b^2}{hl} \cdot \sqrt{\frac{1}{8(1+\nu)}} \leq \sigma_H,$$

gdzie σ_H jest granicą proporcjonalności.

Postępując podobnie jak przy wyboczeniu giętnym, wzór na naprężenie krytyczne można zapisać w nieco innej postaci:

$$\sigma_{kr} = \sigma_{kr}(s) = \frac{\pi^2 E}{s^2}, \quad (19.55)$$

gdzie w rozważanym zadaniu

$$(c) \quad s = \frac{\sqrt{\pi h l \cdot \sqrt{8(1+\nu)}}}{b}.$$

Współczynnik s można traktować jako smukłość belki na zwichrzenie. Uogólnienie wzoru $\sigma_{kr}(s)$ na obszar niesprężysty jest jeszcze bardziej kłopotliwe niż w przypadku wyboczenia giętnego. Chodzi głównie o to, jaką wartość momentu krytycznego przypisać smukłości $s = 0$ i jak definiować naprężenia krytyczne. Przyjmiemy, że naprężenie to oblicza się zawsze według wzoru na skrajne naprężenia w przecie liniowo-sprężystym. Wówczas z warunku, że moment krytyczny dla $s = 0$ jest równy momentowi plastycznemu, otrzymujemy:

$$M_{kr}(0) = M_P = \sigma_P \cdot W_y^{(P)},$$

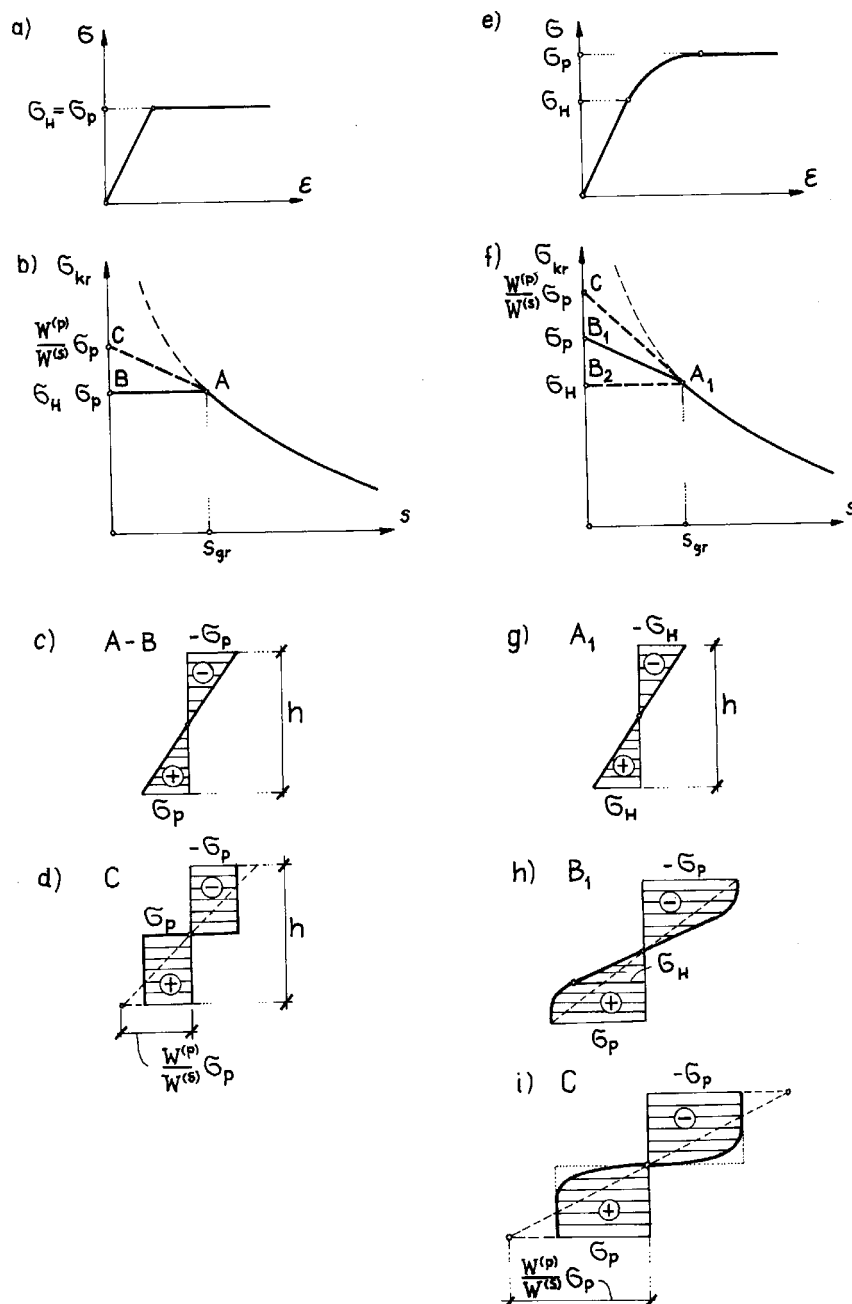
skąd

$$\sigma_{kr}(0) < \frac{M_{kr}(0)}{W_y^{(S)}} = \sigma_P \cdot \frac{W_y^{(P)}}{W_y^{(S)}}.$$

Jest to górna ocena naprężenia krytycznego. Dolną (bezpieczną) ocenę naprężenia krytycznego uzyskamy, przyjmując, że moment krytyczny jest równy momentowi wywołującemu naprężenia skrajne równe granicy plastyczności. Wtedy

$$\sigma_{kr}(0) = \frac{M_{kr}(0)}{W_y^{(S)}} = \sigma_P.$$

W normach konstrukcji stalowych stosuje się zazwyczaj tę drugą ocenę przy założeniu, że w obszarze sprężysto-plastycznym zależność $\sigma_{kr}(s)$ jest liniowa (prosta A_1B_1 na rys. 19.27f).



Rys. 19.27

Wobec tego

$$\sigma_{kr}(s) = \begin{cases} \frac{\pi^2 E}{s^2}, & s \geq s_{gr}, \\ \sigma_P - \frac{\sigma_P - \sigma_H}{s_{gr}} \cdot s, & 0 \leq s \leq s_{gr}, \end{cases} \quad (19.56)$$

gdzie

$$s_{gr} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_H}}.$$

Zależność powyższa jest identyczna z zależnością (19.49), stosowaną w problemie wyboczenia giętnego. Przy takim sformułowaniu zagadnienia sprawą podstawową jest określenie smukłości na zwichrzenie, której wartość zależy od sposobu obciążenia i warunków brzegowych.

W praktyce możliwość utraty płaskiej postaci zginania uwzględnia się przez zastosowanie współczynnika zmniejszającego naprężenia skrajne, czyli tzw. współczynnika zwichrzenia φ_L . Sprawdzenie warunku wytrzymałościowego polega na spełnieniu nierówności:

$$\frac{M_y}{W_y^{(S)}} \leq \frac{\sigma_{kr}(s)}{n_0}.$$

Nierówność tę można zapisać nieco inaczej:

$$\frac{M_y}{W_y^{(S)}} \leq \frac{\sigma_{kr}(s)}{n_0} \cdot \frac{\sigma_P}{\sigma_P}$$

lub

$$\frac{M_y}{W_y^{(S)} \cdot \varphi_L(s)} \leq \frac{\sigma_P}{n_0} = \sigma_{dop}, \quad (19.57)$$

gdzie

$$\varphi_L(s) = \sigma_{kr}(s) / \sigma_P \leq 1.$$

Sens współczynnika φ_L jest zatem taki sam jak współczynnika wyboczeniowego φ (por. wzór (19.52)).

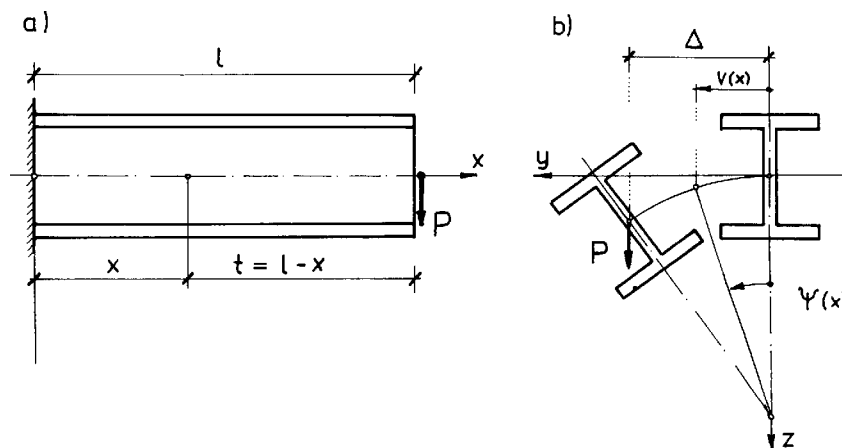
Przedstawimy obecnie szkice rozwiązań kilku innych przypadków zwichrzenia belek.

Rozważymy zginanie belki wspornikowej obciążonej siłą P zaczepioną w środku ciężkości przekroju swobodnego (rys. 19.28). Przyjmijmy, że przekrój belki jest dwuteownikiem, wobec czego wycinkowy moment bezwładności J_ω jest różny od zera. Przy układaniu równań (19.53) trzeba uwzględnić, że

$$\begin{aligned} \Delta M_x &= 0, & M_y &= -P(l-x), & M_z &= 0, \\ \Delta M_{x1} &= P[\Delta - v(x)], & \Delta M_{y1} &= 0, & \Delta M_{z1} &= 0. \end{aligned}$$

Wobec powyższego układ równań (19.53) przybiera postać:

$$\begin{aligned} E_1 J_\omega \psi''' - G J_s \psi' - P(l-x)v' + P[\Delta - v(x)] &= 0, \\ E J_y w'' - P(l-x) &= 0, \\ E J_z v'' - P(l-x)\psi &= 0. \end{aligned}$$



Rys. 19.28

Równanie dla kąta skręcenia otrzymuje się przez zróżniczkowanie pierwszego równania względem x i wyeliminowanie pochodnej v'' z równania trzeciego:

$$E_1 J_\omega \psi^{IV} - G J_s \psi'' - \frac{P^2 (l-x)^2}{E J_z} \psi = 0.$$

Po przyjęciu nowej zmiennej $t = l - x$ równanie powyższe przybierze postać:

$$(d) \quad \frac{d^4 \psi}{dt^4} - \frac{G J_s}{E_1 J_\omega} \cdot \frac{d^2 \psi}{dt^2} - \frac{P^2}{E_1 J_\omega E J_z} t^2 \psi = 0,$$

przy czym warunki brzegowe nałożone na funkcję $\psi(x)$ są następujące:

– dla $t = 1$:

1) kąt skręcenia jest równy zeru: $\psi(l) = 0$,

2) deplanacja jest równa zeru: $\psi'(l) = 0$,

– dla $t = 0$:

3) moment skręcający jest równy zeru: $E_1 J_\omega \cdot \psi'''(0) - G J_s \psi'(0) = 0$,

4) bimoment jest równy zeru: $E_1 J_\omega \cdot \psi''(0) = 0$.

Równanie (d) można scałkować, przyjmując rozwiązanie w postaci szeregu nieskończonego. Z warunków brzegowych otrzymuje się równanie przestępne, z którego oblicza się krytyczne wartości siły P . Wyniki tych obliczeń można przedstawić w postaci wzoru:

$$(e) \quad P_{kr} = \gamma_2 \cdot \frac{\sqrt{E J_z G J_s}}{l^2},$$

gdzie γ_2 jest bezwymiarowym współczynnikiem zależnym od parametru $\xi = l^2 G J_s / (E J_\omega)$. Tablice współczynnika γ_2 zawiera monografia Timoszenki i Gere [48]. Przykładowo dla ξ równego kolejno 0,1; 1; 3; 10; 40, współczynnik γ_2 wynosi odpowiednio 44,3; 15,7; 10,7; 7,58; 5,64. Dla dostatecznie dużych wartości ξ można stosować wzór przybliżony

$$\gamma_2(\xi) = \frac{4,013}{\left(1 - \sqrt{\frac{1}{\xi}}\right)^2}.$$

Gdy przekrój belki jest wąskim prostokątem, to $J_\omega = 0$ i równanie (d) modyfikuje się do postaci:

$$(f) \quad \frac{d^2 \psi}{dt^2} + \alpha_1^2 t^2 \psi = 0.$$

gdzie $\alpha_1^2 = P^2 / (E J_z G J_s)$. Ogólnym rozwiązaniem tego równania jest funkcja:

$$\psi(t) = \sqrt{t} \cdot \left[C_1 J_{1/4} \left(\frac{\alpha_1}{2} \cdot t^2 \right) + C_2 J_{-1/4} \left(\frac{\alpha_1}{2} \cdot t^2 \right) \right],$$

przy czym $J_{1/4}$ oraz $J_{-1/4}$ są funkcjami Bessela pierwszego rodzaju o wskaźnikach $1/4$ i $-1/4$. Stałe C_1 i C_2 wyznacza się z wymagania, by kąt skręcenia na podporze utwierdzonej był równy zeru ($\psi(l) = 0$) oraz by moment skręcający na końcu swobodnym był równy zeru (czyli $\psi'(0) = 0$). Z drugiego warunku wynika, że $C_1 = 0$, natomiast z pierwszego otrzymujemy:

$$C_2 \cdot J_{-1/4} \left(\frac{\alpha_1}{2} \cdot l^2 \right) = 0.$$

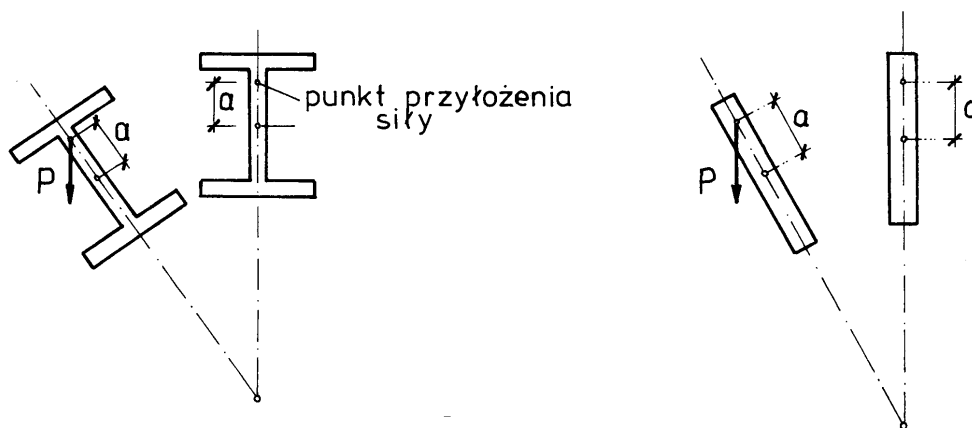
Najmniejszy pierwiastek tego równania^{*)} $\alpha_1 l^2 / 2 = 2,0063$, skąd

$$(g) \quad P_{kr} = \frac{4,013}{l^2} \cdot \sqrt{EJ_z GJ_s}.$$

Bliższa analiza rozważanego zadania wskazuje, że bardzo duży wpływ na wartość siły krytycznej ma sposób przyłożenia siły P . Jeżeli siła jest zaczepiona nad środkiem ciężkości przekroju (rys. 19.29a, b), to obciążenie krytyczne jest mniejsze od wartości wynikającej ze wzorów (e) i (g). Przyłożenie siły poniżej środka ciężkości zwiększa siłę krytyczną. Dla ilustracji powyższych stwierdzeń podamy przybliżony wzór na siłę krytyczną w belce wspornikowej o przekroju prostokątnym:

$$(h) \quad P_{kr} = \frac{4,013}{l^2} \cdot \sqrt{EJ_z GJ_s} \cdot \left[1 - \frac{a}{l} \cdot \sqrt{\frac{EJ_z}{GJ_s}} \right],$$

gdzie a oznacza odległość od środka ciężkości przekroju do leżącego nad nim punktu zaczepienia siły. Wzór (h) można stosować również, gdy siła jest przyłożona w punkcie leżącym poniżej środka ciężkości. Wówczas a jest ujemne i siła krytyczna jest większa od siły odpowiadającej zaczepieniu siły w środku ciężkości przekroju.



Rys. 19.29

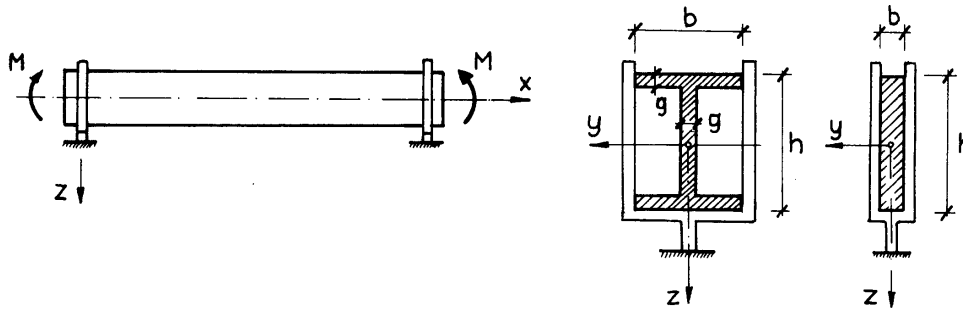
Zwichrzenie belki występuje również wtedy, gdy obciążenie jest rozłożone w sposób ciągły. Jeżeli dla przykładu na belkę działa obciążenie poprzeczne $q_z = q$, równomiernie rozłożone wzdłuż osi belki o przekroju prostokątnym, to

$$(i) \quad q_{kr} l = \frac{12,85 \sqrt{EJ_z GJ_s}}{l^2}.$$

Widać stąd, że równomierne rozłożenie obciążenia spowodowało około trzykrotny wzrost wartości krytycznej.

Na zakończenie wyznaczmy krytyczną wartość momentu $M_y = M$ belki pryzmatycznej poddanej czystemu zginaniu. Końce belki są podparte w sposób widelkowy (rys. 19.30).

^{*)} Wartości funkcji Bessela są stabelaryzowane (por. np. [1])
Andrzej Gawęcki - „Mechanika materiałów i konstrukcji prętowych” 2003r.



Rys. 19.30

Rozważmy dwa przypadki: belkę o przekroju dwuteowym i belkę o przekroju prostokątnym. We wzorze (19.53) należy podstawić: $M_x = 0$, $M_y = M$, $M_z = 0$, $M_z = 0$, $\Delta M_{x1} = \Delta M_{y1} = \Delta M_{z1} = 0$. Mamy zatem układ równań różniczkowych:

$$(j) \quad \begin{cases} E_1 J_\omega \psi''' - GJ_s \psi' + Mv' = 0, \\ EJ_y w'' + M = 0, \\ EJ_z v'' + M\psi = 0. \end{cases}$$

W dalszych rozważaniach wykorzystamy tylko równania (j)₁ i (j)₃. Po zróźniczkowaniu pierwszego z nich względem x i wyeliminowaniu pochodnej v'' z zależności (j)₃ dochodzimy do następującego równania różniczkowego na kąt skręcenia $\psi(x)$:

$$(k) \quad \psi^{IV} - 2\alpha_1 \cdot \psi'' - \alpha_2 \cdot \psi = 0,$$

gdzie

$$\alpha_1 = \frac{GJ_s}{2E_1 J_\omega}, \quad \alpha_2 = \frac{M^2}{EJ_z E_1 J_\omega}.$$

Ogólnym rozwiązaniem równania (k) jest funkcja:

$$\psi(x) = C_1 \sin(\beta_1 x) + C_2 \cos(\beta_1 x) + C_3 \cdot e^{\beta_2 x} + C_4 \cdot e^{-\beta_2 x},$$

przy czym β_1 i β_2 są dodatnimi wielkościami rzeczywistymi:

$$\beta_1 = \sqrt{-\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2}}, \quad \beta_2 = \sqrt{\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2}}.$$

Stałe całkowania określimy z warunków na podporach pręta. Ponieważ końce belki nie mogą się skręcać, lecz mają swobodę deplanacji, otrzymujemy po dwa warunki brzegowe dla $x = 0$ i $x = l$:

$$\psi = 0, \quad \psi'' = 0,$$

gdyż bimoment B na podporach jest równy zero ($B = -E_1 J_\omega \cdot \psi'' = 0$). Z warunków dla $x = 0$ otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} C_2 + C_3 + C_4 &= 0, \\ -C_2 \cdot \beta_1^2 + C_3 \cdot \beta_2^2 + C_4 \cdot \beta_2^2 &= 0. \end{aligned}$$

Ponieważ $1 + (\beta_2 / \beta_1)^2 \neq 0$, więc $C_2 = 0$ oraz $C_3 = -C_4$, a funkcję $\psi(x)$ zapiszemy jak następuje:

$$\psi(x) = C_1 \cdot \sin(\beta_1 x) - 2C_4 \cdot \sinh(\beta_2 x).$$

Z warunków dla $x = l$ otrzymujemy dwa równania na stałe C_1 i C_4 :

$$(l) \quad \begin{cases} C_1 \sin(\beta_1 l) - 2C_4 \cdot \sinh(\beta_2 l) = 0, \\ C_1 \cdot \beta_1^2 \sin(\beta_1 l) + 2C_4 \cdot \beta_2^2 \sinh(\beta_2 l) = 0. \end{cases}$$

Po przyrównaniu wyznacznika tych równań do zera otrzymujemy:

$$\sin(\beta_1 l) \cdot \sinh(\beta_2 l) \cdot (\beta_1^2 + \beta_2^2) = 0.$$

Ponieważ β_1 i β_2 są wielkościami różnymi od zera, zatem zwichrzenie zachodzi, gdy

$$(m) \quad \sin(\beta_1 l) = 0.$$

Z układu równań na stałe C_1 i C_4 wnioskujemy więc, że $C_4 = 0$, a postać zwichrzenia określa zależność:

$$\psi(x) = C_1 \sin(\beta_1 x).$$

Z równania (m) wynika, że $\beta_1 \cdot l = n \cdot \pi$ ($n = 1, 2, \dots$), stąd

$$-\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2} = \frac{\pi^2}{l^2} \cdot n^2.$$

Po podstawieniu wyrażenia na α_1 i α_2 otrzymujemy krytyczną wartość momentu dla $n = 1$:

$$(n) \quad M_{kr} = \frac{\pi}{l} \sqrt{EJ_z GJ_s \cdot \left(1 + \frac{E_1 J_\omega}{GJ_s} \cdot \frac{\pi^2}{l^2} \right)}.$$

W przypadku przekroju prostokątnego $J_\omega = 0$, wobec czego równanie (k) modyfikuje się do postaci:

$$(o) \quad \psi'' + \alpha_2^2 \cdot \psi = 0.$$

Po rozwiązaniu zadania brzegowego ($\psi(0) = \psi(l) = 0$) otrzymujemy:

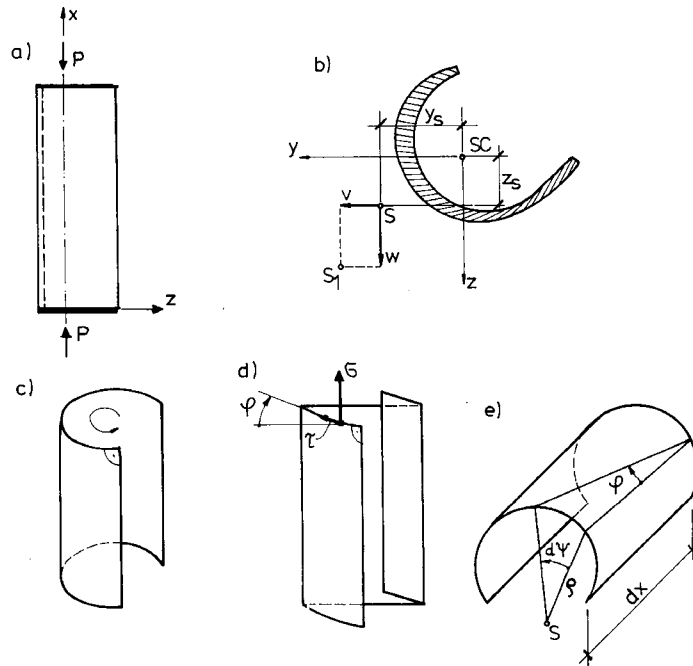
$$(p) \quad M_{kr} = \frac{\pi}{l} \cdot \sqrt{EJ_z GJ_s}.$$

Uzyskana wartość wynika również ze wzoru (n), jeśli przyjąć w nim, że $J_\omega = 0$. Należy zwrócić uwagę, że wartość momentu krytycznego określoną wzorem (p) można było przewidzieć na podstawie analizy wyniku uzyskanego dla belki wspornikowej (wzór (19.54)).

19.4.3.3. Wyboczenie skrętne i wyboczenie giętno-skrętne

Wyboczenie giętno-skrętne można zaobserwować w prętach cienkościennych o przekroju otwartym poddanych mimośrodowemu lub osiowemu ściskaniu. Podstawy teorii wyboczenia giętno-skrętnego zbudowano tuż przed drugą wojną światową.

Rozważmy ściskanie cienkościennego pręta pryzmatycznego siłą P przyłożoną w środku ciężkości SC (rys. 19.31a, b). Siła jest przyłożona za pośrednictwem sztywnych przepon czołowych, co gwarantuje, że w stanie podkrytycznym oś pręta będzie prostoliniowa i nie wystąpi skręcanie. Podstawą analizy są w dalszym ciągu równania (19.53), w których uwzględnimy, że środek ścinania nie pokrywa się ze środkiem ciężkości przekroju.



Rys. 19.31

Przemieszczenia osi ciężkości przekroju, stosownie do wzoru (b) w p. 13.2.2 wynoszą:

$$(a) \quad \begin{cases} v_0(x) = v(x) + z_S \cdot \psi(x), \\ w_0(x) = w(x) - y_S \cdot \psi(x), \end{cases}$$

gdzie $v(x)$ i $w(x)$ oznaczają przemieszczenia środka ścinania, $\psi(x)$ – kąt skręcania przekroju wokół środka ścinania, a y_S i z_S – współrzędne środka ścinania odmierzane w układzie głównych osi środkowych y, z . Wobec tego w rozważanym zadaniu

$$(b) \quad \begin{cases} M_{y1} = \Delta M_{y1} = P \cdot w_0(x) = P \cdot [w(x) - y_S \cdot \psi(x)], \\ M_{z1} = \Delta M_{z1} = -P \cdot v_0(x) = -P \cdot [v(x) + z_S \cdot \psi(x)]. \end{cases}$$

Pozostaje jeszcze wyznaczenie momentu skręcającego M_{x1} . Moment ten pojawia się na skutek deplanacji przekroju wywołanej skręcaniem pręta. Na skutek skręcania występuje składowa styczna τ naprężenia σ , równoległego do pierwotnej osi pręta (por. rys. 19.31d):

$$(c) \quad \tau = \sigma \cdot \varphi.$$

Kąt φ można obliczyć z kinematyki odkształcenia pręta na podstawie analizy skręcania sąsiednich przekrojów o kąt $d\psi$ (rys. 19.31e):

$$(d) \quad \varphi \cdot dx = \rho \cdot d\psi,$$

gdzie ρ jest odległością badanego punktu od środka skręcania. Z zależności (c) i (d) otrzymujemy:

$$(e) \quad \tau = \sigma \rho \frac{d\psi}{dx} = \sigma \rho \cdot \psi'.$$

Obliczone w ten sposób naprężenia styczne dają moment skręcający względem środka ścinania:

$$(f) \quad \begin{aligned} \Delta_1 M_{x1} &= - \int_A \tau \rho \, dA = -\psi' \int_A \sigma \rho^2 \, dA = \psi' \int_A \frac{P}{A} \rho^2 \, dA = \\ &= \psi' \cdot \frac{P}{A} \int_A [(y - y_S)^2 + (z - z_S)^2] \, dA = \psi' \cdot \frac{P}{A} J_0, \end{aligned}$$

przy czym

$$J_0 = J_y + J_z + A(y_S^2 + z_S^2). \quad (19.58)$$

Deplanacja przekroju wywołuje jeszcze inne dodatkowe momenty skręcające względem punktu S . W konfiguracji pierwotnej występują bowiem momenty zginające względem tego punktu o wartościach:

$$(g) \quad M_{yS} = P \cdot z_S \quad \text{ i } \quad M_{zS} = -P \cdot y_S.$$

Po wyboczeniu momenty te rzutowane na oś x dają moment skręcający (por. wzór (19.53)):

$$\Delta_2 M_{x1} = M_{yS} \cdot v' + M_{zS} \cdot w' = P z_S \cdot w' = P z_S \cdot v' - P y_S \cdot w'.$$

Suma momentów skręcających względem osi środków ścinania wynosi więc

$$(h) \quad \Delta M_{x1} = \Delta_1 M_{x1} + \Delta_2 M_{x1} = \psi' \frac{J_0}{A} \cdot P + P z_S \cdot v' - P y_S \cdot w'.$$

Wobec powyższego równania (19.53) przyjmują postać:

$$(i) \quad \begin{cases} E_1 J_\omega \cdot \psi''' - G J_S \cdot \psi' + (J_0 P / A) \psi' + P z_S \cdot v' - P y_S \cdot w' = 0, \\ E J_y \cdot w'' + P \cdot w - P y_S \cdot \psi = 0, \\ E J_z \cdot v'' + P \cdot v + P z_S \cdot \psi = 0. \end{cases}$$

Wyprowadzony wyżej układ równań nie jest dostosowany do dowolnych warunków brzegowych. Na przykład równania (b) nie są słuszne dla prętów wspornikowych, a równanie (h) nie uwzględnia ewentualnego wystąpienia momentu skręcającego jako reakcji podporowej po wyboczeniu pręta. Dlatego ogólną postać równań stateczności uzyskamy przez jednokrotne zróżniczkowanie pierwszego i dwukrotne zróżniczkowanie dwóch pozostałych równań (i) względem zmiennej x . Ostateczna postać układu równań stateczności giętno-skrętnej przy ściskaniu osiowym jest więc następująca:

$$\left. \begin{aligned} E_1 J_\omega \cdot \psi^{IV} - (G J_S - J_0 P / A) \cdot \psi'' - P y_S \cdot w'' + P z_S \cdot v'' &= 0, \\ E J_y \cdot w^{IV} + P \cdot w'' - P y_S \cdot \psi'' &= 0, \\ E J_z \cdot v^{IV} + P \cdot v'' - P z_S \cdot \psi'' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (19.59)$$

W przypadku szczególnym, gdy środek ścinania pokrywa się ze środkiem ciężkości przekroju, mamy $y_S = z_S = 0$ i równanie (19.59) przybiera postać:

$$\left. \begin{aligned} E_1 J_\omega \cdot \psi^{IV} - (G J_S - J_b P / A) \cdot \psi'' &= 0, \\ E J_y \cdot w^{IV} + P \cdot w'' &= 0, \\ E J_z \cdot v^{IV} + P \cdot v'' &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (19.60)$$

przy czym $J_b = J_y + J_z$ i oznacza tutaj biegunowy moment bezwładności przekroju.

Układ równań (19.60) stanowi w istocie rzeczy trzy oddzielne równania na poszukiwane funkcje $\psi(x)$, $w(x)$ i $v(x)$. Dwa ostatnie równania układu (19.60) prowadzą do eulerowskich sił krytycznych przy wyboczeniu w obu płaszczyznach głównych:

$$P_{kry} = P_y = \pi^2 E J_y / (l_{wy})^2, \quad P_{krz} = P_z = \pi^2 E J_z / (l_{wz})^2.$$

Pierwsze równanie układu (19.60) daje siłę krytyczną odpowiadającą tzw. **wyboczeniu skrętnemu**. Gdy $J_\omega = 0$, równanie to jest spełnione, jeżeli

$$G J_S - \frac{J_b}{A} P_{krs} = 0.$$

Stąd siła krytyczna przy wyboczeniu skrętnym wynosi:

$$P_{\text{krs}} = P_s = GA \cdot (J_s / J_b). \quad (19.62)$$

Jak widać siła krytyczna nie zależy tu od długości pręta. W przypadkach, gdy $J_\omega \neq 0$, równanie stateczności przy wyboczeniu skrętnym przybiera postać:

$$\psi^{IV} + \alpha_3^2 \cdot \psi'' = 0, \quad (19.63)$$

gdzie

$$\alpha_3^2 = \left(\frac{P}{A} J_b - GJ_s \right) / (E_1 J_\omega).$$

Rozwiązaniem równania (19.63) jest funkcja

$$\psi(x) = C_1 \sin(\alpha_3 x) + C_2 \cos(\alpha_3 x) + C_3 x + C_4. \quad (19.64)$$

Kryterium stateczności odpowiada znikaniu wyznacznika układu równań liniowych ze względu na stałe całkowania. Jeżeli oba końce pręta o długości l są podparte widelkowo, to warunki brzegowe są następujące:

- kąt skręcania jest równy zeru: 1) $\psi(0) = 0$, 2) $\psi(l) = 0$,
- bimoment jest równy zeru: 3) $\psi''(0) = 0$, 4) $\psi''(l) = 0$,

a warunek stateczności przybiera postać:

$$\text{Det} [a_{ij}] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \sin(\alpha_3 l) & \cos(\alpha_3 l) & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\alpha_3^2 \sin(\alpha_3 l) & \alpha_3^2 \cos(\alpha_3 l) & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Po rozwinięciu tego wyznacznika otrzymujemy:

$$l \cdot \alpha_3^2 \sin(\alpha_3 l) = 0,$$

skąd

$$\alpha_3 = \frac{\pi}{l} \cdot n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Po podstawieniu wyrażenia na α_3 otrzymujemy wzór na siły krytyczne:

$$P_{\text{krs}}^{(n)} = \frac{A}{J_b} \cdot \left(GJ_s + \frac{n^2 \pi^2}{l^2} E_1 J_\omega \right).$$

Najmniejsza wartość jest miarodajną siłą krytyczną przy wyboczeniu skrętnym:

$$P_{\text{krs}} = P_{\text{krs}}^{(1)} = P_s = \frac{A}{J_b} \cdot \left(GJ_s + \frac{\pi^2}{l^2} E_1 J_\omega \right). \quad (19.65)$$

Postacie wyboczenia opisuje funkcja $\psi(x)$:

$$\psi(x) = C_1 \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad (19.66)$$

gdyż $C_2 = C_3 = C_4 = 0$. Jeżeli oba końce pręta są całkowicie utwierdzone (deplanacja jest równa zeru), to warunki brzegowe 3) i 4) modyfikują się do postaci:

3) $\psi'(0) = 0$, 4) $\psi'(l) = 0$ i wówczas siła krytyczna

$$P_{\text{krs}}^{(n)} = P_s^{(n)} = \frac{A}{J_b} \cdot \left(GJ_s + \frac{4n^2 \pi^2}{l^2} E_1 J_\omega \right).$$

W podsumowaniu należy stwierdzić, że dla prętów ściskanych osiowo, w których środek ciężkości i środek ścinania pokrywają się, miarodajna jest najmniejsza siła krytyczna spośród wartości P_y , P_z i P_s :

$$P_{kr} = \min(P_y, P_z, P_s) \quad (19.67)$$

W praktycznych przypadkach wyboczenie skrętne ma istotne znaczenie dla prętów krótkich o szerokich półkach.

Powróćmy do przypadku ogólnego, opisanego równaniami (19.59). Rozważmy ściskanie osiowe pręta cienkościennego, którego oba końce w obu płaszczyznach są podparte widelkowo. Warunki brzegowe są zatem następujące:

$$\begin{aligned} v(0) = v(l) = w(0) = w(l) = \psi(0) = \psi(l) = 0 \\ v''(0) = v''(l) = w''(0) = w''(l) = 0; \psi''(0) = \psi''(l) = 0. \end{aligned}$$

Warunki te będą spełnione, jeżeli rozwiązania układu równań (19.59) przyjmujemy w postaci:

$$v(x) = D_1 \sin(\pi x / l); \quad w(x) = D_2 \sin(\pi x / l); \quad \psi(x) = D_3 \sin(\pi x / l).$$

Po podstawieniu tych funkcji do układu (19.59) otrzymujemy trzy równania na stałe scałkowania D_1 , D_2 i D_3 :

$$(j) \quad \begin{cases} \left[P - \pi^2 EJ_z / (l^2) \right] D_1 + Pz_S \cdot D_3 = 0, \\ \left[P - \pi^2 EJ_y / (l^2) \right] D_2 + Py_S \cdot D_3 = 0, \\ Pz_S \cdot D_1 - Py_S \cdot D_2 - \left[GJ_s - J_0 P / A + \pi^2 E_1 J_\omega / (l^2) \right] \cdot D_3 = 0. \end{cases}$$

Dla uproszczenia zapisu zwróćmy uwagę na to, że w rozważanym zadaniu brzegowym

$$P_y = \pi^2 EJ_y / (l^2), \quad P_z = \pi^2 EJ_z / (l^2), \quad P_s = \frac{A}{J_0} \left(GJ_s + \frac{\pi^2 E_1 J_\omega}{l^2} \right) \quad (19.68)$$

i oznaczają odpowiednio eulerowskie siły krytyczne przy wyboczeniu giętnym w obu płaszczyznach głównych, zaś P_s jest obciążeniem krytycznym przy wyboczeniu wyłącznie skrętnym. Po uwzględnieniu wzorów (19.68) oraz przyrównaniu wyznacznika układu (j) do zera otrzymujemy:

$$(k) \quad \begin{bmatrix} (P - P_z) & 0 & Pz_S \\ 0 & (P - P_y) & -Py_S \\ Pz_S & -Py_S & \frac{J_0}{A} (P - P_s) \end{bmatrix} = 0$$

lub po rozpisaniu wyznacznika:

$$\frac{J_0}{A} \cdot (P - P_s) \cdot (P - P_y) \cdot (P - P_z) - P \cdot z_S^2 (P - P_y) - P \cdot y_S^2 (P - P_z) = 0. \quad (19.69a)$$

Otrzymaliśmy równanie trzeciego stopnia ze względu na siłę P . Równanie to po uporządkowaniu względem potęg zapisuje się następująco:

$$\begin{aligned} \frac{J_b}{J_0} \cdot P^3 + \left[\frac{A}{J_0} \cdot (P_y \cdot z_S^2 + P_z \cdot y_S^2) - (P_y + P_z + P_s) \right] \cdot P^2 + \\ + (P_y P_z + P_z P_s + P_s P_y) \cdot P - P_y P_z P_s = 0. \end{aligned} \quad (19.69)$$

Ponieważ wyznacznik układu (j) jest symetryczny, więc równanie (19.69) ma zawsze trzy pierwiastki rzeczywiste P_1 , P_2 i P_3^*). Najmniejszy z tych pierwiastków jest poszukiwaną wartością krytyczną:

*) Por. p. 21.2.

$$P_{kr} = \min(P_1, P_2, P_3) \leq \min(P_y, P_z, P_\omega). \quad (19.70)$$

Znak nierówności wskazuje, że siła krytyczna obliczona z uwzględnieniem wyboczenia giętno-skrętnego jest zawsze mniejsza od siły eulerowskiej i od siły wywołującej wyłącznie wyboczenie skrętne. Wniosek ten wynika ze szczegółowej analizy wartości pierwiastków równania (19.69). Wartości krytyczne wyższego rzędu uzyskuje się, jeżeli rozwiązania przyjmiemy w postaci szeregu trygonometrycznego o postaci $D_n \cdot \sin(n\pi x / l)$, $n = 1, 2, \dots$. Jeżeli pręt jest obustronnie całkowicie utwierdzony, to warunki brzegowe są następujące:

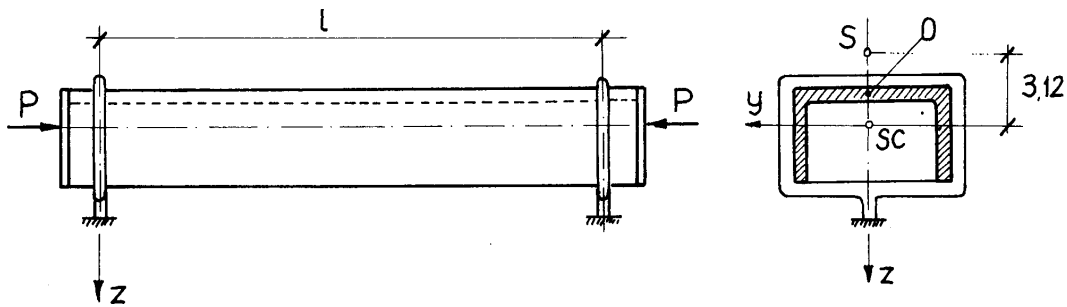
$$\begin{aligned} v(0) = v(l) = w(0) = w(l) = 0; \quad \psi(0) = \psi(l) = 0 \\ v'(0) = v'(l) = w'(0) = w'(l) = 0; \quad \psi(0) = \psi(l) = 0. \end{aligned}$$

Warunki te będą spełnione, jeżeli funkcje $v(x)$, $w(x)$ i $\psi(x)$ przyjmiemy w postaci:

$$\begin{aligned} v(x) = D_1 \cdot [1 - \cos(2n\pi x / l)], \quad w(x) = D_2 \cdot [1 - \cos(2n\pi x / l)], \\ \psi(x) = D_3 \cdot [1 - \cos(2n\pi x / l)], \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Ostatecznie otrzymujemy ponownie równanie trzeciego stopnia (19.69), przy czym w oznaczeniach (19.68) zamiast π^2 / l^2 trzeba podstawić $4n^2 \pi^2 / l^2$.

W celu ilustracji powyższych rezultatów rozwiążemy przykład liczbowy. Należy wyznaczyć siły krytyczne osiowo ściskanego ceownika podpartego na obu końcach w sposób widelkowy. Wymiary geometryczne i sposób podparcia ilustruje rys. 19.32.



Rys. 19.32

Parametry geometryczne przekroju są następujące (por. p. 13.2.8):

$$\begin{aligned} A &= 1,2 \text{ cm}^2 = 1,2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2, \quad J_y = 3,1 \text{ cm}^4 = 3,1 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4, \\ J_z &= 20 \text{ cm}^4 = 20 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4, \quad J_s = 0,00144 \text{ cm}^4 = 0,00144 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4, \\ J_\omega &= 54,7 \text{ cm}^6 = 54,7 \cdot 10^{-12} \text{ m}^6. \end{aligned}$$

Współrzędne środka ścinania wynoszą: $y_S = 0$, $z_S = -3,12 \text{ cm}$. Wobec tego

$$\begin{aligned} J_b &= J_y + J_z = 23,1 \text{ cm}^4 = 23,1 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4, \\ J_0 &= J_b + A(y_S^2 + z_S^2) = 23,1 + 1,2 \cdot 3,12^2 = 34,8 \text{ cm}^4 = 34,8 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4. \end{aligned}$$

Przyjęto, że materiał pręta (stal) określony jest następującymi stałymi:

$$E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kG / cm}^2 = 2,1 \cdot 10^8 \text{ kN / m}^2 \quad \text{oraz} \quad \nu = 0,25.$$

Mamy więc:

$$\begin{aligned} EJ_y &= 2,1 \cdot 3,1 = 6,51 \text{ kN} \cdot \text{m}^2, \\ EJ_z &= 2,1 \cdot 20 = 42 \text{ kN} \cdot \text{m}^2, \\ E_1 J_\omega &= \frac{2,1 \cdot 10^8}{(1 - 0,25^2)} \cdot 54,7 \cdot 10^{-12} = 0,01226 \text{ kN} \cdot \text{m}^4, \end{aligned}$$

$$GJ_s = \frac{2,1 \cdot 0,00144}{2(1+0,25)} = 0,00121 \text{ kN} \cdot \text{m}^2,$$

$$P_y = \pi^2 \cdot 6,51 / (2^2) = 16,07 \text{ kN},$$

$$P_z = \pi^2 \cdot 42 / (2^2) = 103,65 \text{ kN},$$

$$P_s = \frac{1,2 \cdot 10^{-4}}{34,8 \cdot 10^{-8}} \cdot \left(0,00121 + \frac{\pi^2}{2^2} \cdot 0,01226 \right) = 10,85 \text{ kN}.$$

Układ równań (19.59) jest następujący:

$$E_1 J_\omega \cdot \psi^{IV} - \left(GJ_s - \frac{J_0}{A} \cdot P \right) \cdot \psi'' + P_{z_s} \cdot v'' = 0,$$

$$EJ_y \cdot w^{IV} + P \cdot w'' = 0,$$

$$EJ_z \cdot v^{IV} + P \cdot v'' + P_{z_s} \cdot \psi'' = 0.$$

Drugie z tych równań nie zależy od ψ i wskazuje, że wyboczenie w płaszczyźnie symetrii jest niezależne od skręcania, a odpowiednie obciążenie krytyczne jest określone wzorem *Eulera*. Wniosek ten wypływa wprost z równania (19.69a), które przyjmuje postać:

$$\left[\frac{J_0}{A} \cdot (P - P_s) \cdot (P - P_z) - P_{z_s}^2 \right] \cdot (P - P_y) = 0.$$

Jeden z pierwiastków tego równania $P_1 = P_y = 16,07 \text{ kN}$, a pozostałe dwa to pierwiastki równania wynikające z zerowania się nawiasu kwadratowego:

$$\frac{J_b}{J_0} \cdot P^2 - (P_z + P_s) \cdot P + P_z P_s = 0.$$

Po podstawieniu wartości liczbowych

$$0,6638 P^2 - 114,5 P + 1124,2 = 0,$$

skąd

$$P_2 = \frac{114,5 + 100,6}{2 \cdot 0,6638} = 162 \text{ kN},$$

$$P_3 = P_{kr} = \frac{114,5 - 100,6}{2 \cdot 0,6638} = 10,5 \text{ kN} < P_s = 10,85 \text{ kN}.$$

Napężenie krytyczne

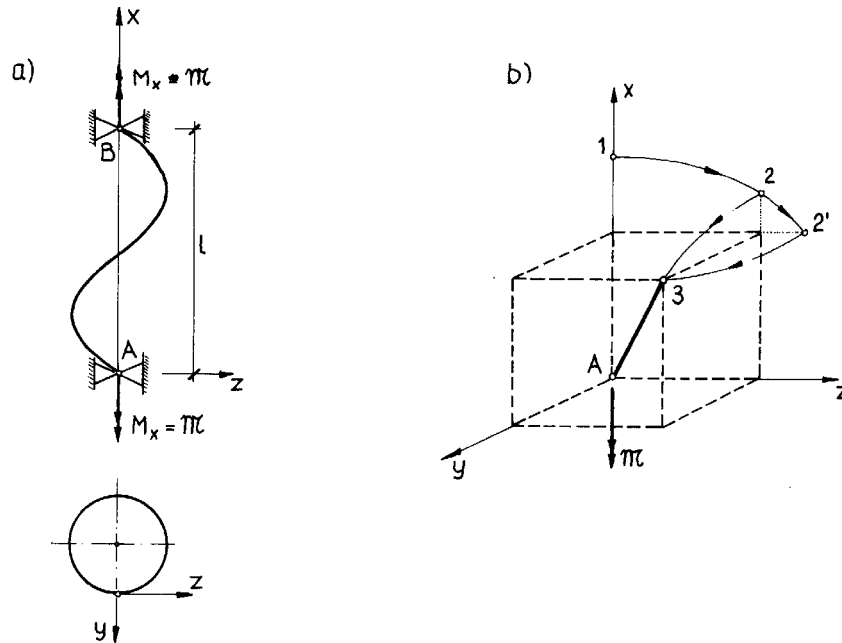
$$\sigma_{kr} = \frac{P_{kr}}{A} = \frac{10,5}{1,2 \cdot 10^{-4}} = 87500 \text{ kN} / \text{m}^2 \approx 875 \text{ kG} / \text{cm}^2.$$

19.4.3.4. Wyboczenie śrubowe przy skręcaniu

Rozważymy pręt pryzmatyczny poddany skręcaniu momentami brzegowymi (rys. 19.33). Końce pręta są połączone z podporami za pośrednictwem przegubów kulistych i mają swobodę obrotu w dowolnej płaszczyźnie. Założymy, że przy wyboczeniu wektor momentu skręcającego \mathfrak{M} zachowuje swój pierwotny kierunek. Dla uproszczenia przyjmiemy, że oba główne momenty bezwładności przekroju są równe, czyli $J_y = J_z = J$, natomiast $J_\omega = 0$ (na przykład pręt o przekroju kołowym). Pod wpływem skręcania przy dostatecznie dużej wartości momentu \mathfrak{M} oprócz prostoliniowej może również wystąpić krzywoliniowa (przestrzenna) postać równowagi. Dla ustalenia tej postaci utraty stateczności wykorzystamy ponownie równania (19.53), w których

$$M_x = \mathfrak{M}, M_y = M_z = 0, \Delta M_{x1} = \Delta M_{y1} = \Delta M_{z1} = 0:$$

$$\begin{aligned} GJ_s \cdot \psi' - \mathfrak{M} &= 0, \\ EJw'' - \mathfrak{M} \cdot v' &= 0, \\ EJv'' + \mathfrak{M} \cdot w' &= 0. \end{aligned}$$



Rys. 19.33

Do dalszych rozważań wykorzystamy tylko dwa ostatnie równania, które można zapisać następująco:

$$\left. \begin{aligned} w'' - \alpha_4 \cdot v' &= 0, \\ v'' + \alpha_4 \cdot w' &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (19.71)$$

gdzie $\alpha_4 = \mathfrak{M} / EJ > 0$. Warunki brzegowe funkcji $v(x)$ i $w(x)$ przyjmują postać:

$$v(0) = v(l) = w(0) = w(l) = 0.$$

Za pomocą różniczkowania układ (19.71) można sprowadzić do dwóch oddzielnych równań:

$$(a) \quad \begin{cases} v'''' + \alpha_4^2 \cdot v' = 0 \\ w'''' + \alpha_4^2 \cdot w' = 0. \end{cases}$$

Po scałkowaniu tych równań otrzymujemy:

$$\begin{aligned} v(x) &= A_1 \sin(\alpha_4 x) + B_1 \cos(\alpha_4 x) + C_1, \\ w(x) &= A_2 \sin(\alpha_4 x) + B_2 \cos(\alpha_4 x) + C_2. \end{aligned}$$

Funkcje te muszą spełniać tożsamościowo równania (19.71):

$$\begin{aligned} -A_2 \cdot \alpha_4^2 \cdot \sin(\alpha_4 x) - B_2 \cdot \alpha_4^2 \cdot \cos(\alpha_4 x) - A_1 \alpha_4^2 \cdot \cos(\alpha_4 x) + B_1 \cdot \alpha_4^2 \cdot \sin(\alpha_4 x) &= 0, \\ -A_1 \cdot \alpha_4^2 \cdot \sin(\alpha_4 x) - B_1 \cdot \alpha_4^2 \cdot \cos(\alpha_4 x) + A_2 \alpha_4^2 \cdot \cos(\alpha_4 x) - B_2 \cdot \alpha_4^2 \cdot \sin(\alpha_4 x) &= 0, \end{aligned}$$

skąd $A_2 = B_1$, $B_2 = -A_1$. Wobec tego funkcje $v(x)$ i $w(x)$ zawierają cztery stałe całkowania:

$$(b) \quad \begin{cases} v(x) = A_1 \sin(\alpha_4 x) + B_1 \cos(\alpha_4 x) + C_1, \\ w(x) = B_1 \sin(\alpha_4 x) - A_1 \cos(\alpha_4 x) + C_2. \end{cases}$$

Po podstawieniu warunków brzegowych otrzymujemy:

$$\begin{aligned} v(0) = 0: & \quad B_1 + C_1 = 0, \\ v(l) = 0: & \quad A_1 \sin(\alpha_4 l) + B_1 \cos(\alpha_4 l) + C_1 = 0, \\ w(0) = 0: & \quad -A_1 + C_2 = 0, \\ w(l) = 0: & \quad B_1 \sin(\alpha_4 l) - A_1 \cos(\alpha_4 l) + C_2 = 0. \end{aligned}$$

Warunek stateczności przybiera postać:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ \sin(\alpha_4 l) & \cos(\alpha_4 l) & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -\cos(\alpha_4 l) & \sin(\alpha_4 l) & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

lub po rozwinięciu wyznacznika:

$$-2 \cdot [1 - \cos(\alpha_4 l)] = 0.$$

Równanie to ma pierwiastki $(\alpha_4 l) = 2n\pi$ ($n = 1, 2, \dots$), czyli

$$\mathfrak{M}_{kr}^{(n)} = 2\pi EJn / l. \quad (19.72)$$

Najmniejszą wartość momentu krytycznego otrzymujemy dla $n = 1$:

$$\mathfrak{M}_{kr} = \mathfrak{M}_{kr}^{(1)} = 2\pi EJ / l. \quad (19.73)$$

Postacie wybożenia można określić z dokładnością do stałej. Z warunków brzegowych można wyznaczyć stosunki stałych całkowania. Ostatecznie po podstawieniu wartości stosunków tych stałych do równań (b) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} v(x) &= B_1 \cdot \left[\frac{1 - \cos(\alpha_4 l)}{\sin(\alpha_4 l)} \cdot \sin(\alpha_4 x) + \cos(\alpha_4 x) - 1 \right], \\ w(x) &= B_1 \cdot \left\{ \sin(\alpha_4 x) - \frac{1 - \cos(\alpha_4 l)}{\sin(\alpha_4 l)} \cdot [\cos(\alpha_4 x) - 1] \right\}. \end{aligned}$$

Po uwzględnieniu, że $[1 - \cos(\alpha_4 l)] / \sin(\alpha_4 l) = \operatorname{tg}(n\pi)$, równania powyższe można przedstawić w postaci:

$$\begin{cases} v(x) = -B_1 \cdot [1 - \cos(\alpha_4 x)], \\ w(x) = -B_1 \sin(\alpha_4 x). \end{cases} \quad (19.74)$$

Z równań (19.74) wynika, że wygięta oś pręta po wybożeniu jest linią śrubową.

Na zakończenie warto dodać, że rozważane zadanie stanowi przypadek obciążenia niekonserwatywnego, ponieważ praca momentu skręcającego zależy od sposobu, w jaki styczna do osi na końcu pręta porusza się podczas wybożenia. Ilustruje to rys. 19.33b. Styczna do nieznacznie wybożonego pręta może zająć swe końcowe położenie przez obrót dookoła osi y (od punktu 1 do punktu 2), a potem dookoła osi z (od punktu 2 do punktu 3). Na tej drodze moment skręcający nie wykona żadnej pracy. Do końcowego położenia stycznej można jednak dojść w inny sposób: najpierw wykonujemy obrót wokół osi y (od punktu 1 do punktu 2'), a następnie wokół osi x (od punktu 2' do punktu 3). W tym drugim wypadku moment skręcający wykonuje pracę różną od zera. Widzimy więc, że praca obciążenia zewnętrznego zależy od sposobu przejścia od konfiguracji pierwotnej do konfiguracji aktualnej. Obciążenie w takim wypadku nie jest konserwatywne i w konsekwencji nie obowiązują kryteria energetyczne (twierdzenie o energii potencjalnej). Nie zawsze też wolno stosować równania różniczkowe (19.53) wynikające z równowagi statycznej układu. Rozważany przypadek należy jednak do tej grupy obciążeń niekonserwatywnych, w których metoda statyczna daje wynik poprawny. W ogólnym przypadku obciążenia niekonserwatywnego trzeba stosować tzw. dynamiczne kryterium stateczności, które polega na badaniu małych drgań układu.

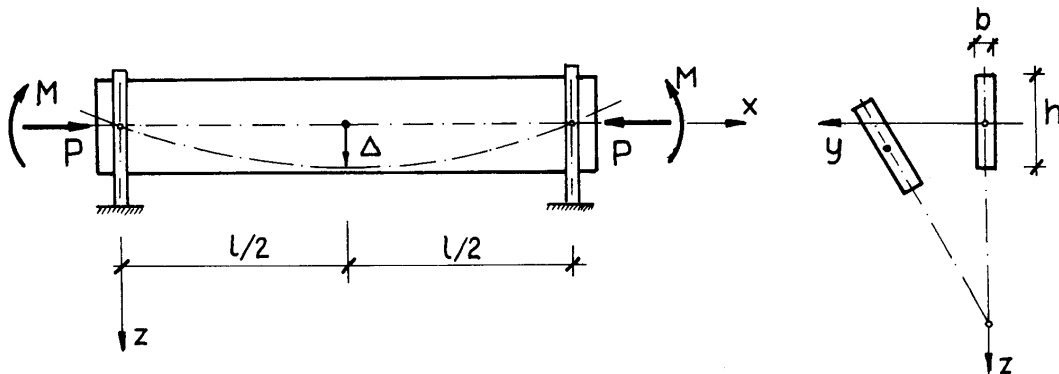
19.4.4. Stateczność przy obciążeniach złożonych

19.4.4.1. Ściskanie ze zginaniem

Do tej pory rozważaliśmy oddzielnie osiowe ściskanie, zginanie i skręcanie. W praktyce bardzo często występują jednak obciążenia złożone. W celu wyrobienia sobie poglądu na problem obciążeń złożonych omówimy dwa najprostsze przypadki: ściskanie ze zginaniem oraz ściskanie ze skręcaniem.

Rozważymy pręt pryzmatyczny o długości l poddany jednoczesnemu ściskaniu siłą P i zginaniu momentem $M_y = M$. Przekrój pręta jest wydłużonym prostokątem ($b < h$), a oba końce pręta są podparte widelkowo (rys. 19.34). Równania (19.53) przyjmują postać:

$$\left. \begin{aligned} -GJ_s \cdot \psi' + M \cdot v' &= 0, \\ EJ_y \cdot w'' + M + P \cdot w &= 0, \\ EJ_z \cdot v'' + M \cdot \psi + P \cdot v &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (19.75)$$



Rys. 19.34

Drugie z tych równań opisuje deformację pręta w płaszczyźnie (x, z) , a pierwsze i trzecie opisują deformację przestrzenną. Rozwiązanie drugiego równania jest następujące:

$$w(x) = \frac{M}{P \cos\left(\frac{\alpha l}{2}\right)} \left[\cos\left(\frac{\alpha l}{2} - \alpha x\right) - \cos\left(\frac{\alpha l}{2}\right) \right], \quad (19.76)$$

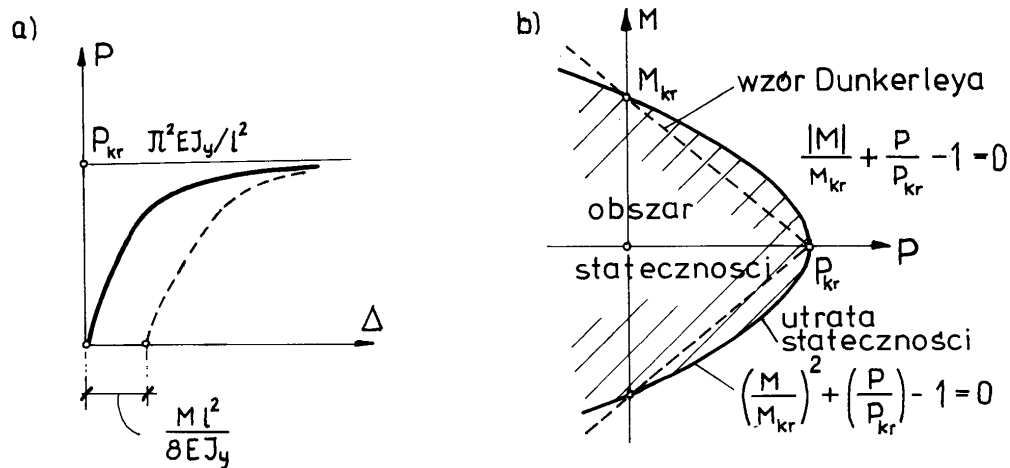
gdzie $\alpha^2 = P / (EJ_y)$. Maksymalne ugięcie w połowie rozpiętości pręta

$$(a) \quad \Delta = w\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{Ml^2}{8EJ_y} \cdot \frac{2[1 - \cos(\alpha l / 2)]}{(\alpha l / 2)^2 \cdot \cos(\alpha l / 2)}$$

i przybiera wartość nieskończoną dla $\alpha l / 2 = \pi / 2$, czyli dla siły

$$(b) \quad P_{kr} = P_y = \pi^2 EJ_y / (l^2).$$

Cechy charakterystyczne zależności (a) przedstawiono już w p. 19.4.2 przy okazji omawiania wpływu obciążenia poprzecznego na przebieg zależności $P(\Delta)$ (por. rys. 19.35a).



Rys. 19.35

Nowe efekty obserwujemy natomiast analizując dwa pozostałe równania układu. Równania te, po zróżniczkowaniu pierwszego z nich względem x , zapiszemy następująco:

$$\left. \begin{aligned} \psi'' - \frac{M}{GJ_s} \cdot v'' &= 0, \\ v'' + \frac{M}{EJ_z} \cdot \psi + \frac{P}{EJ_z} \cdot v &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (19.77)$$

Funkcje $v(x)$ i $\psi(x)$ przyjmujemy w postaci:

$$(c) \quad v(x) = C_1 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right), \quad \psi(x) = C_2 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right),$$

co gwarantuje spełnienie warunków brzegowych:

$$(d) \quad v(0) = v(l) = \psi(0) = \psi(l) = 0.$$

Po podstawieniu zależności (c) do równań (19.77) uzyskujemy układ równań na stałe całkowania:

$$(e) \quad \begin{cases} \frac{M}{GJ_s} \cdot C_1 - C_2 = 0, \\ \left(-\frac{\pi^2}{l^2} + \frac{P}{EJ_z}\right) \cdot C_1 + \frac{M}{EJ_z} \cdot C_2 = 0. \end{cases}$$

Po przyrównaniu do zera wyznacznika tego układu otrzymujemy:

$$(f) \quad \frac{M^2}{GJ_s EJ_z} + \frac{P}{EJ_z} = \frac{\pi^2}{l^2}.$$

Ponieważ zwichrzenie belki poddanej wyłącznemu działaniu momentu zginającego zachodzi dla (por. p. 19.4.3.2)

$$M = M_{kr} = \frac{\pi}{l} \cdot \sqrt{GJ_s EJ_z},$$

a eulerowska siła krytyczna

$$P_{kr} = P_z = \pi^2 EJ_z / (l^2),$$

więc wzór (f) można zapisać w bardziej ogólnej postaci:

$$\left(\frac{M}{M_{kr}}\right)^2 + \left(\frac{P}{P_{kr}}\right) = 1. \quad (19.78)$$

Widzimy zatem, że obecność siły ściskającej zmniejsza wartość momentu, przy którym występuje zwichrzenie belki, i na odwrót: obecność momentu zginającego zmniejsza wartość siły ściskającej, przy której występuje wyboczenie eulerowskie. Wzór (19.78) ilustruje interakcję obu form utraty stateczności wyboczenia eulerowskiego i zwichrzenia.

Obrazem równania (19.78) jest linia interakcji przedstawiona na rys. 19.35b. Ze wzoru (19.78) wynika ponadto, że dla ujemnych wartości siły P , tzn. dla rozciągania, stateczność układu na zwichrzenie jest większa. Poza tym stwierdzamy, że znak momentu zginającego nie wpływa na wartość krytyczną siły ściskającej.

19.4.3.2. Ściskanie ze skręcaniem *)

W przypadku jednoczesnego ściskania i skręcania pręta pryzmatycznego o przekroju zwartym, nie cienkościennym (rys. 19.36), w którym główne momenty bezwładności są równe ($J_y = J_z = J$), równania (19.53) przyjmują postać:

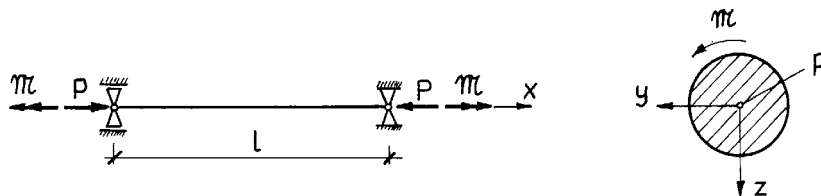
$$\begin{aligned} -GJ_s \cdot \psi' + \mathfrak{M} &= 0, \\ EJw'' - \mathfrak{M} \cdot v' + P \cdot w &= 0, \\ EJv'' + \mathfrak{M} \cdot w' + P \cdot v &= 0. \end{aligned}$$

Do dalszych rozważań wykorzystamy tylko dwa ostatnie równania, które zapiszemy następująco:

$$\begin{cases} w'' - \alpha_2 \cdot v' + \alpha_1^2 \cdot w = 0, \\ v'' - \alpha_2 \cdot w' + \alpha_1^2 \cdot v = 0, \end{cases} \quad (19.79)$$

gdzie $\alpha_1 = \sqrt{P/(EJ)}$, $\alpha_2 = \mathfrak{M}/(EJ)$. Za pomocą różniczkowania i po wyeliminowaniu pochodnych równania te można sprowadzić do dwóch oddzielnych równań różniczkowych czwartego rzędu na funkcje $v(x)$ i $w(x)$:

$$\begin{aligned} v^{IV} + (2\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \cdot v'' + \alpha_1^4 \cdot v &= 0, \\ w^{IV} + (2\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \cdot w'' + \alpha_1^4 \cdot w &= 0. \end{aligned} \quad (19.80)$$



Rys. 19.36

Podstawienie $v(x) = r^x$ prowadzi do równania charakterystycznego czwartego stopnia:

$$r^4 + (2\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \cdot r^2 + \alpha_1^4 = 0,$$

o pierwiastkach urojonych:

$$r_1 = i \cdot \gamma_1, \quad r_2 = -i \cdot \gamma_1, \quad r_3 = i \cdot \gamma_2, \quad r_4 = -i \cdot \gamma_2,$$

gdzie $i = \sqrt{-1}$ oraz

$$\gamma_{1,2} = \sqrt{\frac{2\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{2}} \cdot \left[1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{2\alpha_1^2}{2\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \right)^2} \right].$$

*) Por. [30, 48, 54]

Identyczne pierwiastki ma równanie charakterystyczne na funkcję $w(x)$. Wobec tego całki ogólne równań (19.80) są funkcjami trygonometrycznymi argumentów $\gamma_1 x$ oraz $\gamma_2 x$:

$$\left. \begin{aligned} v(x) &= C_1 \sin(\gamma_1 x) + C_2 \cos(\gamma_1 x) + C_3 \sin(\gamma_2 x) + C_4 \cos(\gamma_2 x), \\ w(x) &= C_5 \sin(\gamma_1 x) + C_6 \cos(\gamma_1 x) + C_7 \sin(\gamma_2 x) + C_8 \cos(\gamma_2 x). \end{aligned} \right\} \quad (19.81)$$

Mamy zatem osiem stałych całkowania, a tylko cztery warunki brzegowe:

$$v(0) = v(l) = w(0) = w(l) = 0. \quad (19.82)$$

Dodatkowe zależności między stałymi całkowania wynikają z wymagania, by funkcje (19.81) spełniały tożsamościowo układ równań wyjściowych (19.79). Zależności te przyjmują postać:

$$\begin{array}{ll} \text{dla równania (19.79)}_1: & \text{dla równania (19.72)}_2: \\ C_1 = -\frac{\gamma_1^2 - \alpha_1^2}{\gamma_1 \cdot \alpha_2} \cdot C_6, & C_1 = -\frac{\gamma_1 \cdot \alpha_2}{\gamma_1^2 - \alpha_1^2} \cdot C_6, \\ C_2 = \frac{\gamma_1^2 - \alpha_1^2}{\gamma_1 \cdot \alpha_2} \cdot C_5, & C_2 = \frac{\gamma_1 \cdot \alpha_2}{\gamma_1^2 - \alpha_1^2} \cdot C_5, \\ C_3 = -\frac{\gamma_2^2 - \alpha_1^2}{\gamma_2 \cdot \alpha_2} \cdot C_8, & C_3 = -\frac{\gamma_2 \cdot \alpha_2}{\gamma_2^2 - \alpha_1^2} \cdot C_8, \\ C_4 = \frac{\gamma_2^2 - \alpha_1^2}{\gamma_2 \cdot \alpha_2} \cdot C_7, & C_4 = \frac{\gamma_2 \cdot \alpha_2}{\gamma_2^2 - \alpha_1^2} \cdot C_7. \end{array} \quad (19.83)$$

Ze związków (19.83) wynika, że

$$\frac{\gamma_1^2 - \alpha_1^2}{\gamma_1 \cdot \alpha_2} = \pm 1, \quad \frac{\gamma_2^2 - \alpha_1^2}{\gamma_2 \cdot \alpha_2} = \pm 1, \quad (19.84)$$

oraz $C_1 = C_6$, $C_2 = C_5$, $C_3 = C_8$, $C_4 = C_7$.

Budowa równań (19.84) wskazuje, że γ_1 i γ_2 są pierwiastkami równania kwadratowego:

$$\gamma^2 \pm \gamma \cdot \alpha_2 - \alpha_1^2 = 0, \quad (19.84a)$$

przy czym znak w drugim składniku nie wpływa na wartość argumentu funkcji trygonometrycznej; może jedynie zmienić znak stałych całkowania.

Stwierdzamy zatem, że rozwiązania układu równań (19.79) są następujące:

$$\left. \begin{aligned} v(x) &= C_1 \sin(\gamma_1 x) + C_2 \cos(\gamma_1 x) + C_3 \sin(\gamma_2 x) + C_4 \cos(\gamma_2 x), \\ w(x) &= C_2 \sin(\gamma_1 x) + C_1 \cos(\gamma_1 x) + C_4 \sin(\gamma_2 x) + C_3 \cos(\gamma_2 x), \end{aligned} \right\} \quad (19.85)$$

gdzie γ_1 i γ_2 są pierwiastkami równania kwadratowego $\gamma^2 - \gamma \cdot \alpha_2 - \alpha_1^2 = 0$ o rozwiązaniach:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1 &= \alpha_2 + \alpha_2^2 + 4\alpha_1^2, \\ \gamma_2 &= \alpha_2 - \alpha_2^2 + 4\alpha_1^2. \end{aligned} \right\} \quad (19.86)$$

Wykorzystanie warunków brzegowych (19.82) prowadzi do kryterium stateczności:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \sin(\gamma_1 l) & \cos(\gamma_1 l) & \sin(\gamma_2 l) & \cos(\gamma_2 l) \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \cos(\gamma_1 l) & \sin(\gamma_1 l) & \cos(\gamma_2 l) & \sin(\gamma_2 l) \end{bmatrix} = 0.$$

Po rozpisaniu wartości wyznacznika dochodzimy do równania:

$$[\sin(\gamma_1 l) - \sin(\gamma_2 l)]^2 - [\cos(\gamma_1 l) - \cos(\gamma_2 l)]^2 = 0, \quad (19.87)$$

które jest spełnione, gdy

$$\sin(\gamma_1 l) - \sin(\gamma_2 l) + \cos(\gamma_1 l) - \cos(\gamma_2 l) = 0 \quad (19.87a)$$

albo gdy

$$\sin(\gamma_1 l) - \sin(\gamma_2 l) - \cos(\gamma_1 l) + \cos(\gamma_2 l) = 0. \quad (19.87b)$$

Znalezienie pary najmniejszych pierwiastków równania (19.87) wbrew pozorom nie jest łatwe. Najprostszym sposobem uzyskania właściwego rozwiązania jest zastosowanie wzoru na sumę funkcji trygonometrycznych występujących w równaniu (19.87b):

$$\sin(\gamma_1 l) + \cos(\gamma_1 l) = \sin(\gamma_2 l) + \cos(\gamma_2 l),$$

czyli

$$-2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\gamma_1 l - \frac{\pi}{4}\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\gamma_2 l - \frac{\pi}{4}\right),$$

skąd

$$\gamma_1 l = \gamma_2 l + 2n\pi, \quad n = 1, 2, \dots \quad (19.88)$$

Po podstawieniu $n = 1$ oraz wykorzystaniu wzoru (19.86) na γ_1 i γ_2 otrzymujemy:

$$\frac{\mathfrak{M}}{(EJ)^2} + \frac{4P}{EJ} = \frac{4\pi^2}{l^2},$$

lub

$$\frac{\mathfrak{M}^2}{\left(\frac{2\pi EJ}{l}\right)^2} + \frac{P}{\frac{\pi^2 EJ}{l^2}} = 1. \quad (19.89)$$

Wartości mianowników umieszczone w nawiasach oznaczają odpowiednio krytyczny moment skręcający \mathfrak{M}_{kr} (wzór (19.73)) i krytyczną siłę eulerowską P_{kr} . Zależność (19.89) można zatem zapisać następująco:

$$\left(\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_{kr}}\right)^2 + \left(\frac{P}{P_{kr}}\right) = 1. \quad (19.90)$$

Uzyskana krzywa interakcji jest analogiczna do zależności (19.78), obowiązującej przy jednoczesnym zginaniu i ściskaniu. Ze wzoru (19.90) wynika, że rozciąganie pręta ($P < 0$) ma działanie stabilizujące; wyboczenie skrętne występuje wtedy przy większej wartości momentu skręcającego.

19.4.4.3. Wzór Dunkerleya

Jeżeli obciążenia złożone są konserwatywne, to powierzchnia stateczności (interakcji) w przestrzeni sił wewnętrznych $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$:

$$f(P_1, P_2, \dots, P_n) = 0, \quad (19.91)$$

jest wypukła (por. np. Życzkowski [57]). Wobec tego wzór przybliżony dla dodatnich (ściskających) wartości P_i takich, że

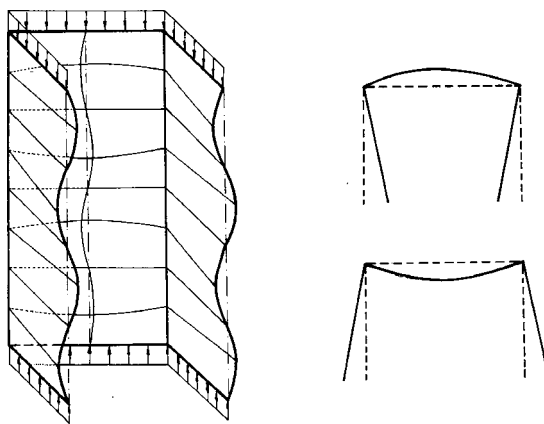
$$f(P_1, P_2, \dots, P_n) = \sum_{i=1}^n \frac{P_i}{P_{ikr}} - 1 = 0, \quad (19.92)$$

jest dolnym (bezpiecznym) oszacowaniem stanu statecznego. Zależność (19.92) nosi nazwę wzoru *Dunkerleya*. Na rysunku 19.35b wzór *Dunkerleya* odpowiada prostym zaznaczonym liniami przerywanymi.

W przypadku obciążeń niekonserwatywnych może się zdarzyć, że powierzchnia stateczności jest wklęsła i wzór (19.92) nie daje oceny bezpiecznej.

19.4.5. Uwagi o lokalnej utracie stateczności prętów cienkościennych

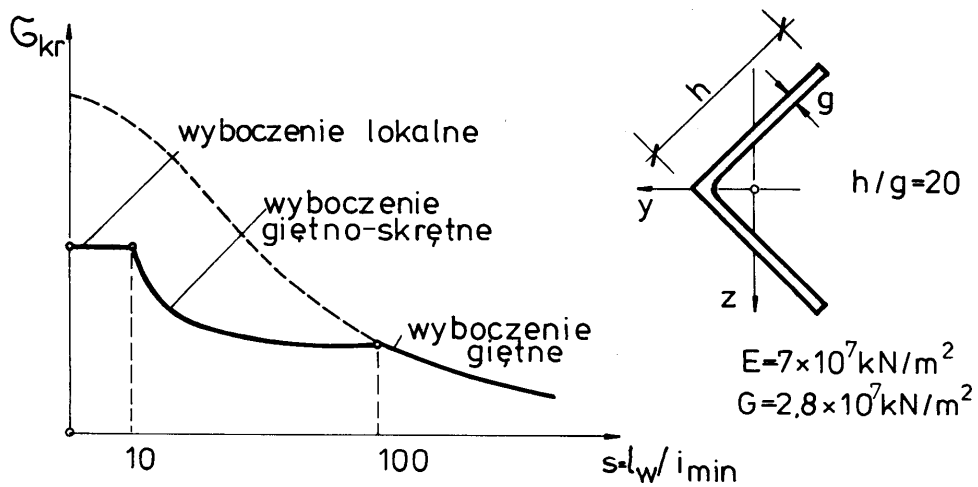
Wszystkie dotychczasowe rozważania dotyczyły stateczności globalnej. Interesowało nas wygięcie lub skręcenie osi pręta, przy czym zakładaliśmy hipotezę sztywnego rzutu przekroju poprzecznego. W prętach cienkościennych pojawia się nowe zjawisko, tzw. lokalna (miejscowa) utrata stateczności. Polega ona na tym, że w odróżnieniu od stateczności globalnej przekrój poprzeczny deformuje się, a oś pręta pozostaje prostoliniowa. Zjawisko lokalnej utraty stateczności jest charakterystyczne dla powłok, a więc i dla prętów cienkościennych, które w istocie rzeczy są długimi powłokami lub układem długich pasm płytowych. Omawiany problem ilustruje rys. 19.37, na którym przedstawiono postać lokalnej utraty stateczności ściskanego ceownika.



Rys. 19.37

Różnorodność form utraty stateczności przy ściskaniu prętów cienkościennych sprawia, że ograniczenie się do wyboczenia giętnego (eulerowskiego) może prowadzić do znacznych błędów. Jako [przykład niech nam posłuży wykres $\sigma_{kr}(s)$ z podręcznika Brzoski [7] sporządzony dla ściskania równoramiennego kątownika duraluminiowego (rys. 19.38). Wyboczenie giętne w płaszczyźnie najmniejszej sztywności występuje wówczas, gdy smukłość pręta jest dostatecznie duża. Jeżeli smukłość pręta jest mniejsza, to występuje wyboczenie giętno-skrętne. Z kolei utrata stateczności prętów o bardzo małej smukłości odpowiada wyboczeniu lokalnemu. Naprężenie krytyczne przy lokalnej utracie stateczności oblicza się na gruncie teorii płyt i powłok. Zależy ono od wymiarów przekroju poprzecznego. Lokalne naprężenie krytyczne

jest proporcjonalne do grubości ścianki kątownika, a ściślej biorąc, zależy ono od stosunku grubości ścianki do pozostałych wymiarów liniowych przekroju poprzecznego (np. od stosunku g/h).



Rys. 19.38