

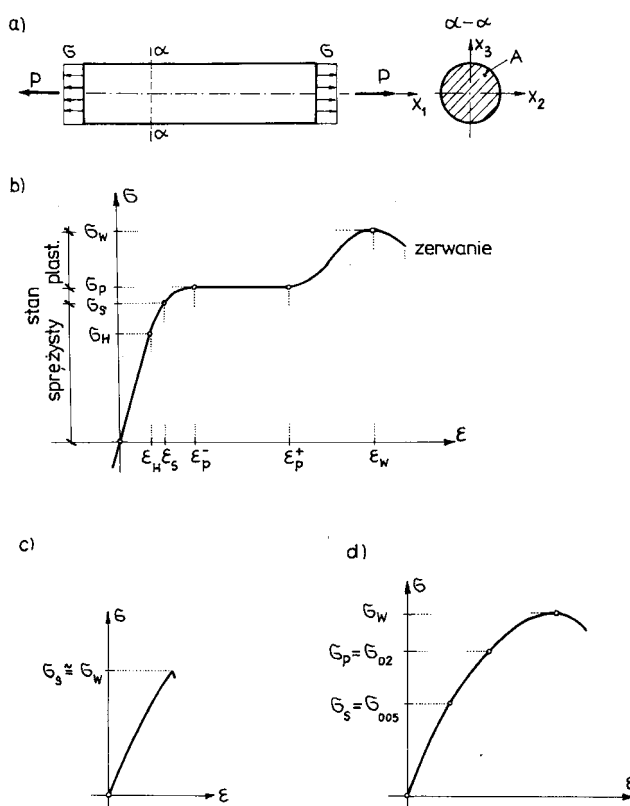
7. HIPOTEZY WYTRZYMAŁOŚCIOWE



7.1. UWAGI WSTĘPNE

Powróćmy jeszcze raz do wyników próby rozciągania omówionych w rozdziale 4. Jeżeli przyjmujemy, że oś próbki pokrywa się z osią x_1 , to stan naprężenia w układzie x_1, x_2, x_3 charakteryzuje tylko jedna współrzędna $\sigma_{11} = \sigma$ (por. rys. 7.1a):

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.1)$$



Rys. 7.1

W miarę wzrostu naprężenia σ materiał przechodzi kolejno ze stanu liniowo-sprężystego ($0 < \sigma \leq \sigma_H$) poprzez stan nieliniowo-sprężysty ($\sigma_H < \sigma \leq \sigma_S$) do stanu plastycznego ($\sigma_P < \sigma \leq \sigma_W$) i w końcu próbka ulega zerwaniu (por. rys. 7.1b). Naprężenia σ_H , σ_S , σ_P i σ_W wyznaczają granice między poszczególnymi stanami mechanicznymi. Przekroczenie każdej z tych granic powoduje **jakościową zmianę własności materiału**. W zależności od rodzaju materiału i konstrukcji pewne zmiany własności materiału mogą być niebezpieczne, a odpowiadający im stan określamy jako **stan niebezpieczny**. W materiale ciągliwym za stan niebezpieczny uznaje się zazwyczaj stan plastyczny, związany z dużymi przyrostami odkształceń. W materiale kruchym proces deformacji aż do osiągnięcia wytrzymałości doraźnej jest prawie sprężysty, a stan niebezpieczny odpowiada naprężeniu $\sigma_n = \sigma_W$ (rys. 7.1c). W próbkach wykonanych z materiału, który nie ma wyraźnych granic sprężystości i plastyczności stan niebezpieczny może odpowiadać wartościom umownym $\sigma_n = \sigma_{0,05}$ lub $\sigma_n = \sigma_{0,2}$, lub punktowi granicznemu $\sigma_n = \sigma_W$ (rys. 7.1d).

Problemem podstawowym dla inżyniera jest wyznaczenie tzw. **współczynnika bezpieczeństwa** n , który jest liczbą mówiącą, ile razy aktualne naprężenie σ jest mniejsze od naprężenia niebezpiecznego σ_n . Wobec tego naprężeniu σ odpowiada współczynnik bezpieczeństwa $n = \sigma_n/\sigma$. Obliczenie współczynnika bezpieczeństwa przy jednoosiowym rozciąganiu (lub ściskaniu) jest więc nader proste.

Na bardzo duże trudności natrafiamy jednak, gdy w danym punkcie występuje więcej niż jedna składowa stanu naprężenia lub ogólniej: trójosiowy stan naprężenia opisany macierzą (7.2).

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}. \quad (7.2)$$

Powstaje wówczas pytanie: ***jak w złożonym stanie naprężenia obliczyć współczynnik bezpieczeństwa?***

Odpowiedź na postawione pytanie zawierają tzw. **hipotezy wytrzymałościowe** (wyteżeniowe). Część tych hipotez podaje sposób na obliczenie pewnego fikcyjnego naprężenia noszącego nazwę **naprężenia zredukowanego** (zastępczego) σ_{red} . Główna idea hipotez wytrzymałościowych polega na tym, by złożony stan naprężenia opisany macierzą (7.2) sprowadzić do jednoosiowego rozciągania naprężeniem o wartości σ_{red} . Pozwala to wyznaczyć współczynnik bezpieczeństwa i określić stan mechaniczny materiału w danym punkcie.

Zanim przejdziemy do bliższego omówienia wybranych hipotez wyteżeniowych dla ciał izotropowych, zwrócimy uwagę na pewne własności, które musi spełniać naprężenie zastępcze:

– ponieważ stan mechaniczny nie zależy od przyjętego układu współrzędnych, więc naprężenie zastępcze może być tylko funkcją niezmienników tensora naprężenia:

$$\sigma_{\text{red}} = \sigma_{\text{red}}(I_1, I_2, I_3); \quad (7.3)$$

– uwzględnivszy fakt, że niezmienniki I_1, I_2, I_3 zależą od wszystkich współrzędnych tensora naprężenia, naprężenie zastępcze można również zapisać jako funkcję tych współrzędnych:

$$\sigma_{\text{red}} = \sigma_{\text{red}}(\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{22}, \sigma_{23}, \sigma_{33}); \quad (7.4)$$

– wzór (7.4) jest ważny również dla stanu jednoosiowego rozciągania (ściskania), określonego macierzą (7.1):

$$\sigma_{\text{red}}(\sigma, 0, 0, 0, 0, 0) = \sigma; \quad (7.5)$$

– dla zerowej macierzy naprężeń naprężenie zastępcze jest równe zeru:

$$\sigma_{\text{red}}(0, 0, 0, 0, 0, 0) = 0. \quad (7.6)$$

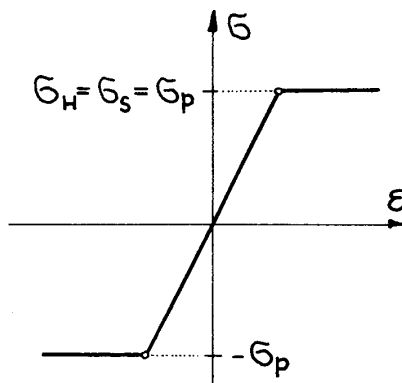
Ponieważ najczęściej interesuje nas rozgraniczenie poszczególnych stanów mechanicznych, więc porzucamy niekiedy na podaniu postaci tzw. **warunku granicznego** $F(\sigma_{ij}) = 0$. Podejście takie jest ogólniejsze, ponieważ stan mechaniczny określa czasem więcej niż jeden parametr i przy definiowaniu naprężenia zastępczego σ_{red} natrafiamy na duże trudności. Zależność graniczna wiąże ze sobą współrzędne tensora naprężenia odpowiadające osiągnięciu stanu niebezpiecznego w danym punkcie. Pojęcie zależności granicznej będzie wyjaśnione przy omawianiu poszczególnych hipotez wyteżeniowych. Dokładniejsze omówienie własności warunku granicznego i pojęcia współczynnika bezpieczeństwa wraz ze stosowną interpretacją geometryczną przedstawiono w p.7.5.

Omawiana problematyka jest bardzo złożona, a do tej pory dobrze rozpoznane są **tylko materiały izotropowe**. W dalszym ciągu omówimy pewne wybrane hipotezy stosowane obecnie do materiałów ciągliwych i plastyczno-kruchych. Szczegółowe omówienie poszczególnych hipotez wyteżeniowych można znaleźć w wielu podręcznikach (np. [22, 51, 53]).

7.2. HIPOTEZY WYTRZYMAŁOŚCIOWE DLA MATERIAŁÓW CIĄGLIWYCH

7.2.1. Warunek plastyczności Hubera-Misesa-Hencky'ego (HMH)

Dla materiałów ciągłych przyjmujemy zazwyczaj model ciała idealnie sprężysto-plastycznego (rys. 7.2). W takim modelu granica proporcjonalności σ_H , granica sprężystości σ_S i granica plastyczności σ_P mają tę samą wartość. Przyjmuje się, że osiągnięcie tej wartości, a więc początek uplastycznienia, odpowiada stanowi niebezpiecznemu. Dlatego hipotezy wytrzymałościowe dla materiałów ciągłych nazywamy bardzo często **warunkami plastyczności**.



Rys. 7.2

Obecnie powszechnie stosuje się hipotezę polskiego uczonego *M.T.Hubera* (1904 rok):

Materiał przechodzi w danym punkcie w stan plastyczny wówczas, gdy gęstość energii odkształcenia postaciowego (tj. energii dewiatorów) osiąga pewną wartość graniczną, charakterystyczną dla tego materiału.

Podobne sugestie wysuwał już dużo wcześniej *Maxwell* w liście do swego przyjaciela *Thompsona* (*Kelvina*) w 1856 roku. Hipotezę, w której miarą wyteżenia była gęstość całkowitej energii odkształcenia, sformułował *Beltrami* w 1885 roku. Sens hipotez energetycznych jest intuicyjnie wyczuwalny. Do uplastycznienia konieczne jest bowiem włożenie pewnej pracy mierzonej lokalnie gęstością energii. Hipoteza *Beltrami* nie znalazła jednak potwierdzenia w badaniach doświadczalnych. Dlaczego więc decydująca jest tylko część energii, czyli energia dewiatorów? Na pytanie to odpowiadają badania doświadczalne metali poddanych bardzo wysokim ciśnieniom (około 50 000 MN/m²). Badania te dowiodły, że zmiany objętości, które w materiałach izotropowych są wynikiem działania aksjatora naprężenia, mają charakter czysto sprężysty, czyli znikają po usunięciu obciążenia. Oznacza to, że odkształcenia trwałe (plastyczne) są wywołane tylko działaniem dewiatorów.

Matematyczne sformułowanie warunku plastyczności *Hubera* jest więc następujące:

$$W_{\sigma}^{(d)} = C, \quad (7.7)$$

gdzie C jest pewną stałą materiałową.

Warunek plastyczności (7.7) jest związany z nazwiskami *Misesa* i *Hencky'ego*. *Mises* w 1913 roku wyprowadził formułę przybliżającą ówczesnie stosowany warunek *Treski* (por. p. 7.2.2). Okazało się, że postać tego przybliżenia była identyczna z nieznanym na zachodzie Europy warunkiem *Hubera*. W 1923 roku *Hencky* stwierdził, że warunek uzyskany przez *Misesa* ma interpretację energetyczną podaną równaniem (7.7). Dodamy, że *Hencky* nie znał jeszcze wówczas pracy *Hubera* z 1904 roku. Wspomniane fakty historyczne zadecydowały o tym, że warunek plastyczności (7.7) nazywa się obecnie warunkiem *Hubera-Misesa-Hencky'ego* lub w skrócie warunkiem *HMH*.

Przejdziemy obecnie do bliższej analizy warunku *HMH*. Ze wzoru (6.12) wynika, że energia $W_{\sigma}^{(d)}$ jest funkcją tylko drugiego niezmiennika dewiatora naprężenia $I_{2\sigma}^{(d)}$ i wyraża ją wzór:

$$(a) \quad W_{\sigma}^{(d)} = \frac{1}{12G} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)].$$

Stosownie do uwag zawartych w p. 7.1 wnioskujemy, że warunek plastyczności musi być słuszny dla jednoosiowego rozciągania, tzn. gdy $\sigma_{11} = \sigma_P$, a pozostałe współrzędne tensora naprężenia są równe zero. Uwzględnienie tego we wzorze (a) i podstawienie uzyskanego wyniku do wzoru (7.7) pozwala obliczyć wartość stałej materiałowej C :

$$(b) \quad C = W_{\sigma}^{(d)} = \frac{1}{12G} (\sigma_{11}^2 + \sigma_{11}^2) = \frac{\sigma_P^2}{6G}.$$

Po podstawieniu wzorów (a) i (b) do równania (7.7) otrzymujemy następującą zależność graniczną:

$$F(\sigma_{ij}) = \frac{1}{2} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)] - \sigma_P^2 = 0. \quad (7.8)$$

Jeśli współrzędne σ_{ij} spełniają tę zależność, to materiał w danym punkcie przechodzi w stan plastyczny. Równanie (7.8) możemy zapisać jeszcze inaczej:

$$\sigma_{\text{red}} - \sigma_P = 0,$$

gdzie

$$\sigma_{\text{red}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)} \quad (7.9)$$

i oznacza poszukiwane naprężenie zredukowane. Jeżeli $\sigma_{\text{red}} - \sigma_P < 0$, to mamy stan sprężysty, a jeżeli $\sigma_{\text{red}} - \sigma_P = 0$, to następuje uplastycznienie. Na podstawie rys. 7.2 wnioskujemy, że stan $\sigma_{\text{red}} - \sigma_P > 0$ jest nierealny. Z postaci wzoru (7.9) widać, że wymagania dotyczące naprężenia zredukowanego z p. 7.1 są spełnione. Naprężenie zredukowane można wyrazić przez drugi niezmiennik stanu naprężenia:

$$\sigma_{\text{red}} = \sqrt{6GW_{\sigma}^{(d)}} = \sqrt{-3I_{2\sigma}^{(d)}}. \quad (7.9a)$$

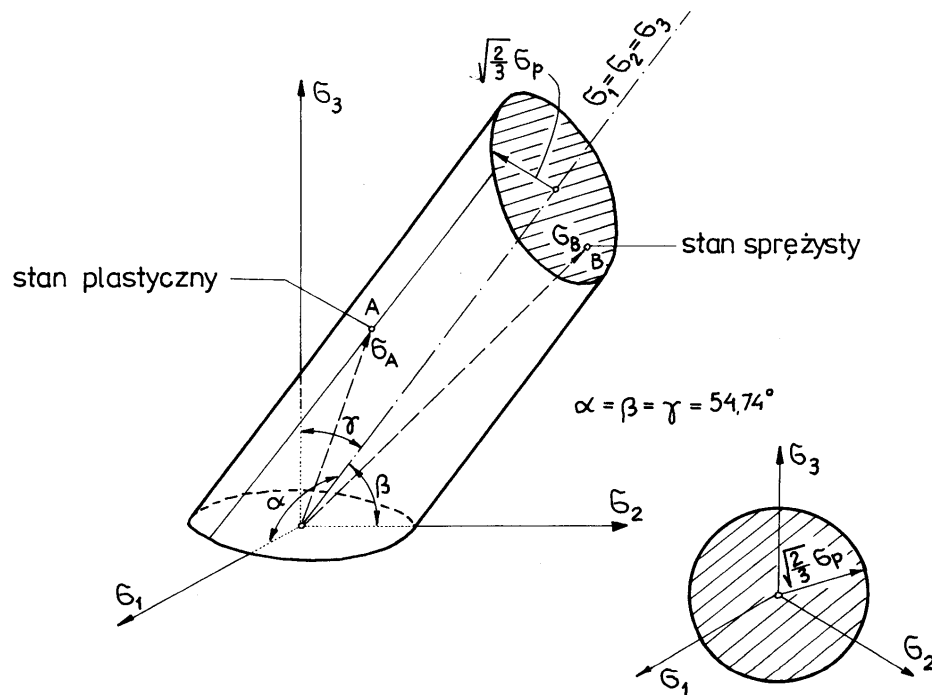
Ponieważ $I_{2\sigma}^{(d)} < 0$, więc wartości σ_{red} są zawsze rzeczywiste.

Jeśli znamy naprężenia główne, to zależność graniczną (7.8) można zapisać za pomocą nieuporządkowanych wartości głównych:

$$(c) \quad F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 2\sigma_P^2 = 0.$$

Ponieważ występują teraz tylko 3 zmienne σ_1 , σ_2 i σ_3 , nasuwa się myśl, by warunek (c) przedstawić w trójwymiarowej przestrzeni naprężeń głównych. Obrazem geometrycznym tego równania jest walec kołowy o promieniu $\sqrt{(2/3) \cdot \sigma_P}$. Oś tego walca tworzy ten sam kąt z każdą z osi układu współrzędnych σ_1 ,

σ_2, σ_3 . Jest to tzw. *oś aksjatorów*. Kosinus tego kąta wynosi $1/\sqrt{3}$, więc jego wartość $\arccos(1/\sqrt{3}) = 54,74^\circ$ (por. rys. 7.3).



Rys. 7.3

Współrzędne punktów wypełniających wnętrze walca odpowiadają sprężystym stanom naprężenia (np. punkt B). Uplastycznienie zachodzi natomiast dla każdego stanu naprężenia odpowiadającego punktowi leżącemu na poboczniczy walca (np. punkt A). Stany naprężeń zobrazone punktem leżącym poza walcem są nierealne. Dla aksjatora wszystkie naprężenia normalne są równe, tzn. $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. Warunek ten spełniają współrzędne osi walca, przyporządkowane zawsze stanom sprężystym. Podczas wszechstronnego rozciągania lub ściskania w miarę wzrostu obciążenia przesuwamy się wzdłuż osi aksjatorów i nie jesteśmy w stanie doprowadzić w ten sposób do uplastycznienia materiału.

W obliczeniach konstrukcji bardzo często występują płaskie stany odkształcenia i płaskie stany naprężenia.

W *płaskim stanie odkształcenia*, gdzie odkształcenie główne $\varepsilon_3 = 0$, oprócz naprężeń głównych σ_1 i σ_2 występują również niezerowe wartości naprężenia głównego σ_3 . Wartości tego naprężenia w sprężystym materiale izotropowym wynikają ze związków fizycznych (5.1) i wyraża je wzór:

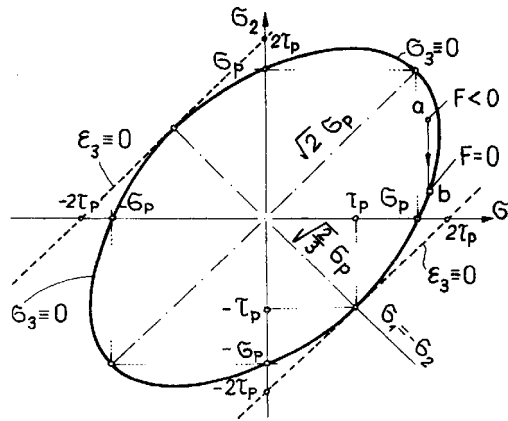
$$\sigma_3 = \nu(\sigma_1 + \sigma_2).$$

W procesie deformacji czysto plastycznych materiał zachowuje się jak ciało nieściśliwe. Ponieważ dla ciała nieściśliwego współczynnik Poissona $\nu = 1/2$, więc między naprężeniami głównymi σ_1, σ_2 i σ_3 w płaskim stanie odkształcenia zachodzi zależność:

$$\sigma_3 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2).$$

Po podstawieniu tej zależności do równania (a) otrzymujemy warunek plastyczności dla płaskiego stanu odkształcenia:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_p. \quad (7.10)$$



Rys. 7.4

Wobec tego deformacje czysto sprężyste zachodzą wówczas, gdy

$$\sigma_1 - \sigma_2 - \left| \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_p \right| < 0.$$

Obrazem tej nierówności na płaszczyźnie σ_1 i σ_2 jest obszar ograniczony dwoma prostymi zaznaczonymi na rys. 7.4 liniami przerywanymi ($\varepsilon_3 \equiv 0$). Warto zwrócić uwagę na to, że proste opisujące zależność graniczną (7.10) pokrywają się z rzutem walca Hubera na płaszczyznę $\sigma_3 = \text{const}$. Rzutowanie powierzchni plastyczności na płaszczyznę $\sigma_i = \text{const}$ w przestrzeni naprężeń jest uniwersalnym sposobem określenia kształtu zależności granicznej, gdy $\varepsilon_i \equiv 0$. Sposób ten wynika z ogólnej teorii ciał plastycznych i można go stosować dla dowolnego warunku plastyczności. Jeżeli warunek plastyczności jest zapisany w przestrzeni naprężeń głównych, to dla płaskiego stanu odkształcenia ($\varepsilon_3 = 0$) zależność graniczną wyraża w ogólności równanie:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \pm 2\tau_p, \quad (7.11)$$

gdzie τ_p oznacza granicę plastyczności materiału przy czystym ścinaniu. Jak wiadomo, czyste ścinanie zachodzi, gdy $\sigma_1 = -\sigma_2 = -\sigma$. Uplastycznienie materiału w tym przypadku odpowiada zatem punktowi przecięcia prostej $\sigma_1 = -\sigma_2$ z odpowiednim warunkiem plastyczności. Współrzędne tego punktu są równe właśnie wartości τ_p (por. rys. 7.4).

W **płaskim stanie naprężenia** zależność graniczną w przestrzeni naprężeń głównych otrzymuje się przyjmując, że odpowiednie naprężenie główne jest tożsamościowo równe zero (np. $\sigma_3 \equiv 0$). Obrazem geometrycznym tej zależności jest przekrój powierzchni plastyczności płaszczyzną $\sigma_3 = 0$. W przypadku warunku **HMH przekrój** ten daje w rezultacie elipsę zaznaczoną na rys 7.4 linią ciągłą.

Ponieważ w dowolnym układzie osi stan naprężenia charakteryzują tylko trzy niezależne składowe tensora naprężenia, warunkowi plastyczności można również nadać interpretację geometryczną w przestrzeni naprężeń σ_{11} , σ_{22} i σ_{12} . Stosownie do wzoru (7.8) zależność graniczna dla płaskiego stanu naprężenia przyjmuje postać:

$$F(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}) = \sigma_{11}^2 - \sigma_{11} \cdot \sigma_{22} + \sigma_{22}^2 + 3\sigma_{12}^2 - \sigma_p^2 = 0. \quad (7.12)$$

Wprowadzimy oznaczenia:

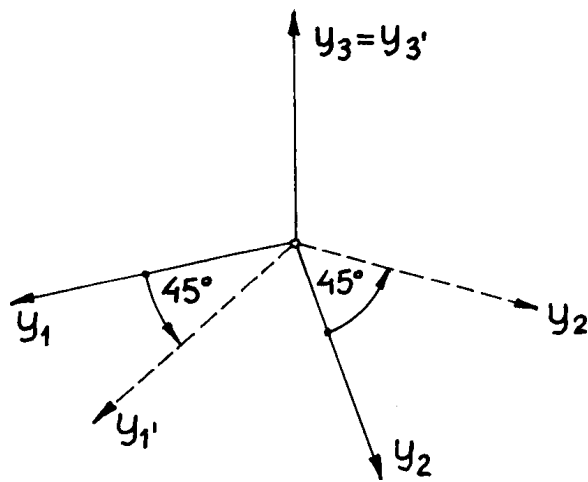
$$(d) \quad y_1 = \frac{\sigma_{11}}{\sigma_p}, \quad y_2 = \frac{\sigma_{22}}{\sigma_p}, \quad y_3 = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_p}$$

Wówczas równanie (7.12) przedstawia się następująco:

$$(e) \quad y_1^2 - y_1 y_2 + y_2^2 + 3y_3^2 - 1 = 0.$$

Jest to w przestrzeni (y_1, y_2, y_3) równanie pewnej powierzchni. Dokonamy obecnie obrotu osi y_1, y_2 , względem osi y_3 o kąt 45° (rys. 7.5). Obrót taki charakteryzuje tabela kosinusów kierunkowych:

	y_1	y_2	y_3
$y_{1'}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0
$y_{2'}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0
$y_{3'}$	0	0	0



Rys. 7.5

Na podstawie wzorów transformacyjnych $y_i = y_{k'} a_{ik'}$ otrzymujemy

$$\begin{cases} y_1 = y_{1'} a_{11'} + y_{2'} a_{12'}, \\ y_2 = y_{1'} a_{21'} + y_{2'} a_{22'}, \\ y_3 = y_{3'}. \end{cases}$$

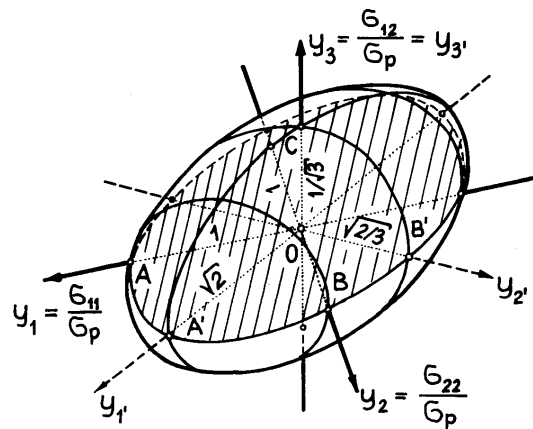
Wobec tego

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_{1'} - \frac{1}{\sqrt{2}} y_{2'}, \\ y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_{1'} + \frac{1}{\sqrt{2}} y_{2'}, \\ y_3 = y_{3'}. \end{cases}$$

Po uwzględnieniu tych zależności równanie (e) modyfikuje się do postaci:

$$\frac{y_{1'}^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{y_{2'}^2}{(\sqrt{2/3})^2} + \frac{y_{3'}^2}{(\sqrt{1/3})^2} = 1.$$

Jest to odcinkowe równanie elipsoidy, którą obrazuje rys. 7.6 (por. *Szczepiński* [44]). Każdemu punktowi powierzchni odpowiada pewien stan naprężenia: σ_{11} , σ_{22} i σ_{12} . Osiągnięcie tych wartości oznacza uplastycznienie materiału. Punkty leżące wewnątrz elipsoidy odpowiadają stanom sprężystym.



Rys. 7.6

7.2.2. Warunek plastyczności Treski-Guesta (TG)

Podstawą do sformułowania tego warunku była obserwacja linii *Lüdersa* (por. p. 4.10), które powstają w początkowej fazie uplastycznienia próbki rozciąganej. Ponieważ kąt pochylenia tych linii w stosunku do osi próbki jest bliski 45° i odpowiada płaszczyznom maksymalnych naprężeń stycznych, *Tresca* w 1872 roku podał następującą hipotezę:

Materiał przechodzi w danym punkcie w stan plastyczny wówczas, gdy maksymalne naprężenie styczne osiągnie pewną graniczną wartość, charakterystyczną dla tego materiału.

Maksymalne naprężenie styczne $\tau_{\max} = (\sigma_I - \sigma_{III}) / 2$, więc treść hipotezy *Treski* zawiera równanie:

$$\frac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{III}) = C_1, \quad (7.13)$$

gdzie C_1 jest pewną stałą materiałową, a σ_I i σ_{III} – największym i najmniejszym naprężeniem głównym.

Coulomb w 1776 roku i później *Guest* (1900 rok) uplastycznienie materiału uzależnili od maksymalnego kąta odkształcenia postaciowego γ_{\max} . Jeśli materiał do momentu uplastycznienia jest liniowo-sprężysty i izotropowy, to między hipotezą *Coulomba* i *Guesta* oraz hipotezą *Treski* nie ma żadnej różnicy. Wniosek ten wynika bezpośrednio z równań fizycznych. Ponieważ nazwisko *Coulomba* wiąże się z jeszcze inną hipotezą, zależność graniczną (7.13) przyjęto nazywać warunkiem plastyczności *Treski-Guesta* (TG).

Przejdziemy do analizy wzoru (7.13). Wzór ten musi obowiązywać również dla osiowego rozciągania, gdzie $\sigma_I = \sigma_P$, a $\sigma_{III} = 0$. Pozwala to wyznaczyć stałą C_1 :

$$C_1 = \frac{1}{2}\sigma_P.$$

Wobec tego warunek *Treski* przyjmuje postać:

$$\sigma_I - \sigma_{III} = \sigma_P. \quad (7.14)$$

Wnioskujemy stąd, że naprężenie zastępcze σ_{red} wynosi:

$$\sigma_{\text{red}} = \sigma_I - \sigma_{III}. \quad (7.15)$$

Warunek plastyczności *Treski* można wyrazić za pomocą niezmienników dewiatora $I_2^{(d)}$, $I_3^{(d)}$. Warunek ten ma jednak wtedy bardzo złożoną postać (por. [11]):

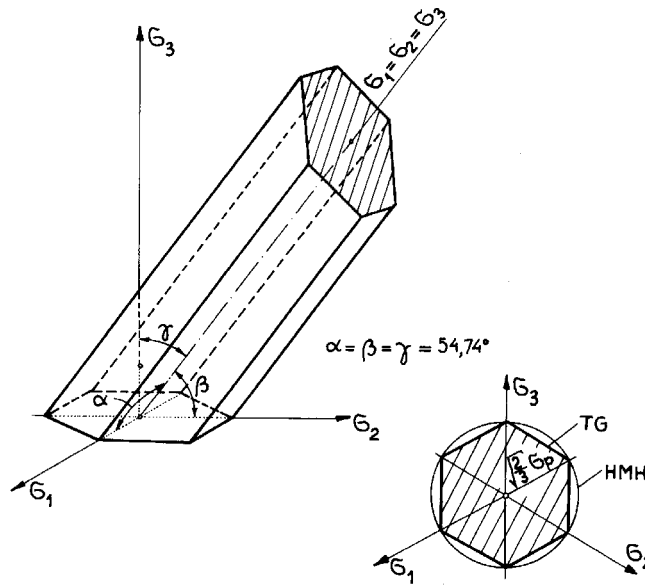
$$4(I_2^{(d)})^3 - 27(I_3^{(d)})^2 - 9\sigma_P^2(I_2^{(d)})^2 + 6\sigma_P^4 I_2^{(d)} - \sigma_P^6 = 0. \quad (7.16)$$

Jeśli przejdziemy do nieuporządkowanych osi głównych naprężeń ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$), to warunkiem, aby w ciele występowały tylko naprężenia sprężyste, jest jednoczesne spełnienie następujących nierówności

$$|\sigma_i - \sigma_j| < \sigma_P \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (7.17)$$

Po rozpisaniu ich otrzymujemy:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 - \sigma_2 < \sigma_P, & \text{ gdy } \sigma_1 > \sigma_2, \\ -\sigma_1 + \sigma_2 < \sigma_P, & \text{ gdy } \sigma_1 < \sigma_2, \\ \sigma_2 - \sigma_3 < \sigma_P, & \text{ gdy } \sigma_2 > \sigma_3, \\ -\sigma_2 + \sigma_3 < \sigma_P, & \text{ gdy } \sigma_2 < \sigma_3, \\ \sigma_3 - \sigma_1 < \sigma_P, & \text{ gdy } \sigma_3 > \sigma_1, \\ -\sigma_3 + \sigma_1 < \sigma_P, & \text{ gdy } \sigma_3 < \sigma_1. \end{aligned} \right\} \quad (7.17a)$$



Rys. 7.7

W przestrzeni naprężeń $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ nierówności (7.17a) opisują wnętrze graniastosłupa, którego podstawę jest sześciobok foremny. Oś graniastosłupa – podobnie jak oś walca w warunku *Hubera* – tworzy równe kąty z osiami układu (por. rys. 7.7).

Przecięcie tego graniastosłupa płaszczyzną $\sigma_3 = 0$ (płaski stan naprężenia) daje obszar płaski. Warunek plastyczności w tym przypadku jest określony nierównościami:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 - \sigma_2 < \sigma_P, & \text{ gdy } \sigma_1 > \sigma_2, \\ -\sigma_1 + \sigma_2 < \sigma_P, & \text{ gdy } \sigma_1 < \sigma_2, \\ \sigma_2 < \sigma_P, & \text{ gdy } \sigma_2 > 0, \\ -\sigma_2 < \sigma_P, & \text{ gdy } \sigma_2 < 0, \\ \sigma_1 < \sigma_P, & \text{ gdy } \sigma_1 > 0, \\ -\sigma_1 < \sigma_P, & \text{ gdy } \sigma_1 < 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.18)$$

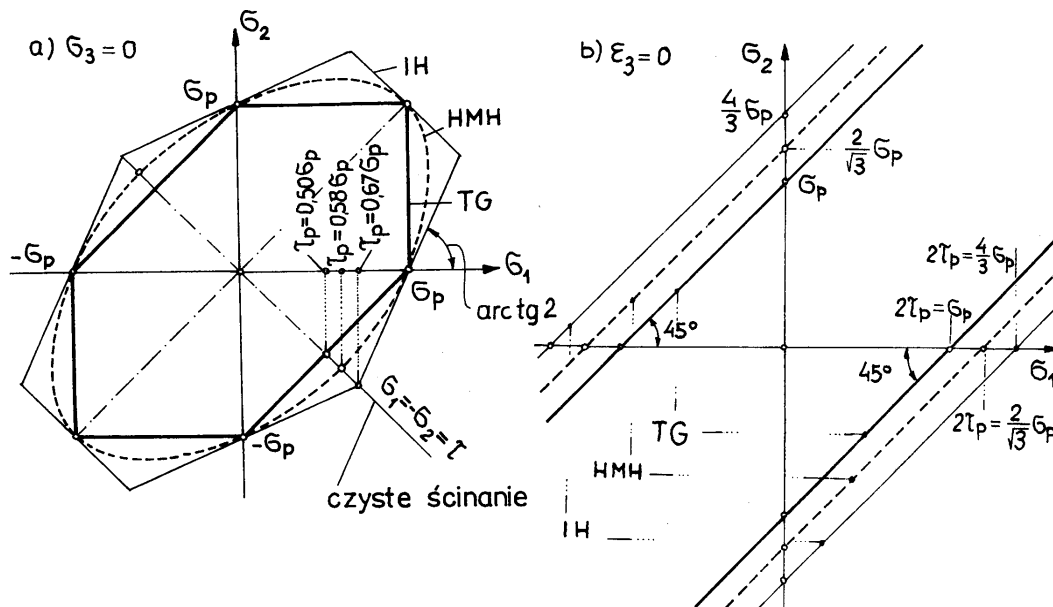
Nierówności (7.18) opisują wnętrze sześcioboku przedstawionego na rys. 7.8. Dla porównania linią przerywaną zaznaczono elipsę *Hubera*.

Z przeprowadzonych rozważań wynika, że graniastosłup *Treski* jest wpisany w wałek *Hubera*; krawędzie graniastosłupa leżą na poboczniczy tego walca. Obszar sprężysty według *Treski* jest więc mniejszy niż obszar sprężysty wynikający z warunku *Hubera*.

Znany jest jeszcze inny warunek plastyczności – *Iwlewa-Haythornthwaite’a (IH)*, odpowiadający powierzchni opisanej na powierzchni *Hubera*. Zgodnie z tym warunkiem materiał przechodzi w stan plastyczny wówczas, gdy ekstremalne naprężenie normalne w dewiatorze osiąga pewną krytyczną wartość, tzn. gdy jest spełnione choćby jedno z następujących równań:

$$|\sigma_{11} - \sigma_0| = \sigma_P, \quad |\sigma_{22} - \sigma_0| = \sigma_P, \quad |\sigma_{33} - \sigma_0| = \sigma_P. \quad (7.19)$$

Warunek *IH* nie ma interpretacji fizycznej, jest jednak użyteczny, daje bowiem górną ocenę nośności. Trzy pozostałe warunki plastyczności dla płaskiego stanu naprężenia i płaskiego stanu odkształcenia zilustrowano na rys. 7.8a,b.



Rys. 7.8

Dla płaskiego stanu naprężenia ($\sigma_3 = 0$) warunek plastyczności *TG* możemy przedstawić również w przestrzeni naprężeń dowolnych (nie głównych). Wzory na naprężenia główne w płaskim stanie naprężenia mają postać (por. wzór (1.28)):

$$(a) \quad \begin{cases} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{cases} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2}.$$

Na razie nie potrafimy powiedzieć, które z naprężeń σ_1 , σ_2 , σ_3 jest największe, a które najmniejsze. Trzeba rozważyć trzy przypadki (por. rys. 1.27):

- 1) $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$, wówczas $\sigma_I = \sigma_1$, $\sigma_{III} = \sigma_3 = 0$,
- 2) $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 < 0$, wówczas $\sigma_I = \sigma_1$, $\sigma_{III} = \sigma_2$,
- 3) $\sigma_1 < 0$, $\sigma_2 < 0$, wówczas $\sigma_I = \sigma_3 = 0$, $\sigma_{III} = \sigma_2$.

Przypadek 1 $(\sigma_I - \sigma_{III} = \sigma_I)$

Równanie (7.12) ma postać:

$$(b) \quad \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2} = \sigma_P.$$

Postępując identycznie jak przy analizowaniu warunku *Hubera*, otrzymujemy równanie:

$$(c) \quad \left(\frac{y_1 + y_2}{2} - 1\right)^2 = \left(\frac{y_1 - y_2}{2}\right)^2 + y_3^2$$

lub w układzie obróconym o 45°

$$(d) \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}y_{1'} - 1\right)^2 = \frac{(y_{2'})^2}{(\sqrt{2})^2} + (y_{3'})^2.$$

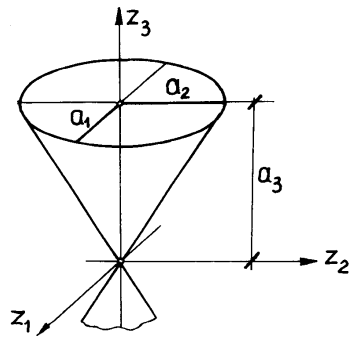
Dokonyamy jeszcze przesunięcia układu:

$$(e) \quad y_{1'} = z_3 + \sqrt{2}, \quad y_{2'} = z_1, \quad y_{3'} = z_2.$$

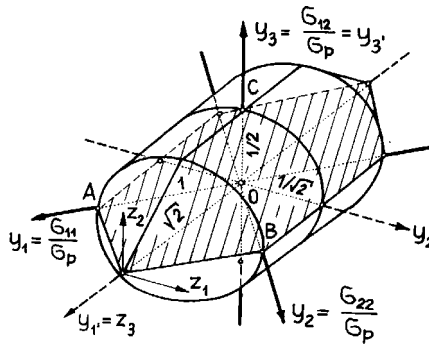
Wówczas zależność (d) przedstawia równanie stożka eliptycznego (por. rys. 7.9):

$$(f) \quad \frac{z_1^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{z_2^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{z_3^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 0.$$

Przypadek 2 $(\sigma_I - \sigma_{III} = \sigma_I - \sigma_2)$



Rys. 7.9



Rys. 7.10

$$(g) \quad 2\sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2} = \sigma_P.$$

W układzie osi y_i otrzymujemy

$$(h) \quad (y_1 - y_2)^2 + 4y_3^2 = 1.$$

Dla osi obróconych $y_{i'}$, równanie warunku plastyczności przedstawia walec eliptyczny o osi pokrywającej się z osią $y_{1'}$:

$$(i) \quad \frac{(y_2')^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{(y_3')^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1.$$

Przypadek 3 ($\sigma_I - \sigma_{III} = -\sigma_2$)

Analiza tego przypadku przebiega identycznie jak przypadku 1. W efekcie otrzymujemy również stożek eliptyczny w odpowiednio przesuniętym układzie współrzędnych.

W rezultacie analizy wszystkich przypadków otrzymujemy powierzchnię graniczną przedstawioną na rys. 7.10. Widzimy, że warunek plastyczności *Treski* w przestrzeni naprężeń σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} składa się z walca eliptycznego i dwóch stożków eliptycznych. Zwróćmy uwagę na to, że elipsoida *Hubera* z rys. 7.6 zawiera w sobie powierzchnię plastyczności *Treski*.

7.2.3. Porównanie warunków plastyczności HMM i TG

1. Najistotniejsze różnice ilościowe między warunkami plastycznymi *HMM* i *TG* występują dla czystego ścinania, gdzie $\sigma_{11} = \sigma_{22} = 0$. Stan ten odpowiada punktowi *C*, zaznaczonemu na rys. 7.6 i 7.10. Dla warunku *HMM* mamy:

$$\frac{\sigma_{12}^{(P)}}{\sigma_P} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \text{zatem} \quad \sigma_{12}^{(P)} = \tau_P = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_P = 0,58 \sigma_P.$$

Dla warunku *TG* mamy:

$$\frac{\sigma_{12}^{(P)}}{\sigma_P} = \frac{1}{2}, \quad \text{zatem} \quad \sigma_{12}^{(P)} = \tau_P = 0,50 \sigma_P.$$

Różnice te były decydującym argumentem na rzecz hipotezy *Hubera-Misesa-Hencky'ego*. Z badań laboratoryjnych wynika, że uplastycznienie podczas czystego ścinania zachodzi dla naprężeń stycznych bliskich wartości $0,6\sigma_P$, a nie $0,5\sigma_P$ jak przewiduje hipoteza *Treski*. W nawiązaniu do dzisiejszego stanu wiedzy warto dodać, że jeżeli materiał składa się z bezładnie ułożonych kryształów, których warunkiem uplastycznienia jest warunek *Treski*, to makroskopowo otrzymujemy warunek *Hubera-Misesa-Hencky'ego*. Współczesne normy projektowania konstrukcji metalowych są oparte na warunku *HMM*, najlepiej opisującym zachowanie się materiałów ciągliwych.

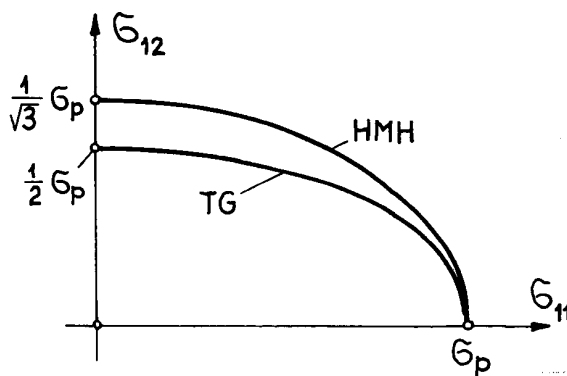
2. Drugą istotną cechą różniącą oba warunki plastyczności jest to, że warunek *Treski* w przeciwieństwie do warunku *Hubera* nie zależy od wartości pośredniego naprężenia głównego σ_{II} . O wyteżeniu materiału według hipotezy *TG* decyduje więc tylko największe koło naprężeń *Mohra*.

3. Często występują płaskie stany naprężenia, w których jedno z naprężeń normalnych jest zawsze równe zero (np. $\sigma_{22} = 0$). Zdarza się to w teorii belek. Odpowiedni warunek plastyczności uzyskamy po przecięciu powierzchni plastyczności płaszczyzną $\sigma_{22} = 0$. W efekcie zarówno dla warunku *HMM* (rys. 7.6), jak i warunku *TG* (rys. 7.10) otrzymujemy elipsy opisane równaniami:

$$\text{– warunek HMM} \quad \sqrt{\sigma_{11}^2 + 3\sigma_{12}^2} = \sigma_P,$$

$$\text{– warunek TG} \quad \sqrt{\sigma_{11}^2 + 4\sigma_{12}^2} = \sigma_P.$$

Ilustracją tych równań jest rys. 7.11.

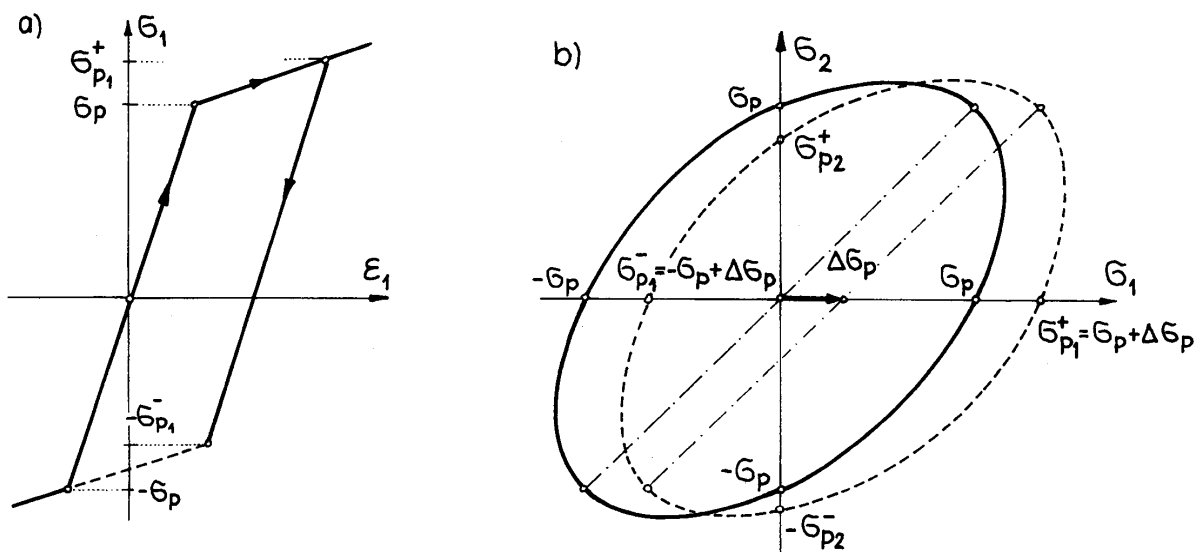


Rys. 7.11

4. W pewnych sytuacjach przy stosowaniu warunku *HMH* do uplastycznienia można doprowadzić przez zmniejszenie bezwzględnej wartości jednej ze współrzędnych tensora naprężenia, podczas gdy pozostałe się nie zmieniają. Fakt ten ilustruje rys. 7.4. Zmniejszenie wartości $|\sigma_2|$, odpowiada odcinkowi *ab*. W punkcie *a* mamy stan sprężysty ($F < 0$), a w punkcie *b* występuje stan plastyczny ($F = 0$). Opisany przypadek często umyka uwadze projektantów konstrukcji. Warto zwrócić uwagę na to, że uplastycznienie materiału jest tym trudniejsze, im tensor naprężenia jest bardziej „kulisty”.

7.2.4. Uwagi o wzmocnieniu plastycznym

Do tej pory rozważaliśmy materiały idealnie sprężysto-plastyczne, scharakteryzowane na rys. 7.2. Okazuje się, że uzyskane wyniki można uogólnić na materiały wykazujące wzmocnienie i zjawisko *Bauschingera* (rys. 7.12a). Efekt *Bauschingera* odpowiada **przesunięciu** powierzchni plastyczności jako bryły sztywnej w przestrzeni naprężeń (rys. 7.12b). Dlatego takie wzmocnienie nazywamy **wzmocnieniem kinematycznym**. Deformacja plastyczna powoduje, że granice plastyczności na ściskanie i rozciąganie w każdym z kierunków głównych są różne. Przesunięcie powierzchni plastyczności ilustruje więc także zjawisko anizotropii plastycznej pojawiającej się wskutek deformacji plastycznej. Stąd wzmocnienie kinematyczne nazywa się czasami **wzmocnieniem anizotropowym**.

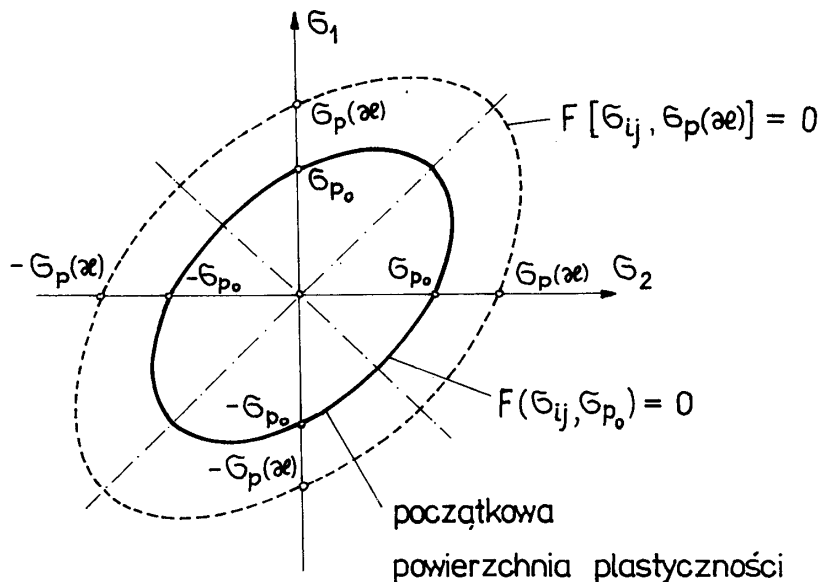


Rys. 7.12

Warunek plastyczności przy wzmocnieniu kinematycznym zapisuje się w następujący sposób:

$$F[(\sigma_{ij} - \Delta\sigma_{ij}), \sigma_P] = 0, \quad (7.20a)$$

gdzie $\Delta\sigma_{ij}$ oznacza współrzędne wektora przesunięcia powierzchni plastyczności w przestrzeni naprężeń.



Rys. 7.13

Poza koncepcją wzmocnienia anizotropowego posługujemy się również koncepcją **wzmocnienia izotropowego**. Dla rzeczywistych metali początkowo obserwuje się wzmocnienie kinematyczne. Dla różnych odkształceń dominuje wzmocnienie izotropowe. Tak więc obie koncepcje wzmocnienia są jedynie elementami pewnej hipotezy wzmocnienia. Wzmocnienie izotropowe odpowiada równomiernemu „puchnięciu” powierzchni plastyczności (por. rys. 7.13). Warunek plastyczności dla wzmocnienia izotropowego można zapisać następująco:

$$F[\sigma_{ij}, \sigma_P(\chi)] = 0, \quad (7.20b)$$

gdzie współczynnik χ oznacza tzw. parametr wzmocnienia.

7.3. HIPOTEZY WYTRZYMAŁOŚCIOWE DLA MATERIAŁÓW PLASTYCZNO - KRUCHYCH

7.3.1. Hipoteza ekstremalnych naprężeń głównych

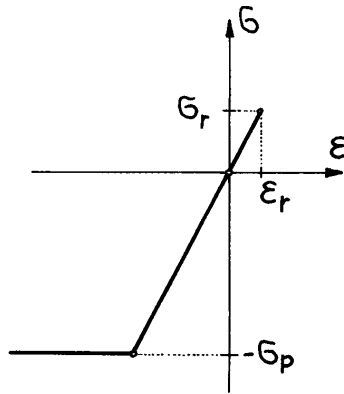
Omówimy teraz niektóre hipotezy wytrzymałościowe dla materiałów o charakterystyce przedstawionej na rysunku 7.14. Podczas ściskania materiały te wykazują cechy plastyczne, podczas rozciągania zachowują się liniowo-sprężyste, aż do momentu osiągnięcia wytrzymałości na rozciąganie σ_r , w którym następuje kruche pęknięcie. Tak przyjęty model dość dobrze opisuje tzw. materiały plastyczno-kruche. Do materiałów tych można zaliczyć beton, skały oraz ośrodki gruntowe. Ponieważ określenie stanu mechanicznego zależy teraz od większej liczby parametrów, poprzestaniemy na podaniu zależności granicznych.

W roku 1632 *Galileusz* poddał myśl, że o wytrzymałości materiału decyduje największe naprężenie rozciągające. Łatwo stwierdzić, że hipoteza ta zawodzi już dla osiowego ściskania. Myśl *Galileusza* pod-

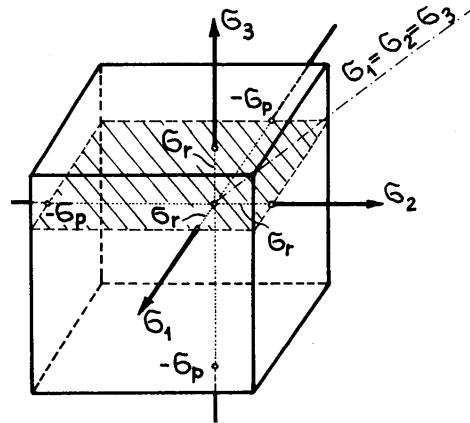
jeli jednak *Rankine* (1856 rok) i *Clebsch* (1862 rok), którzy ograniczyli także wartość ściskających naprężeń normalnych. Według tych badaczy stan bezpieczny określają nierówności:

$$-\sigma_P \leq \sigma_i \leq \sigma_r \quad (i = 1, 2, 3), \quad (7.21)$$

gdzie σ_P i σ_r oznaczają odpowiednio naprężenia niszczące przy ściskaniu i rozciąganiu a σ_1 , σ_2 i σ_3 – naprężenia główne. Obszar bezpieczny opisany nierównościami (7.21) przedstawia rys. 7.15. Zależność graniczna (7.21) bywa czasami stosowana do materiałów kruchych.



Rys. 7.14

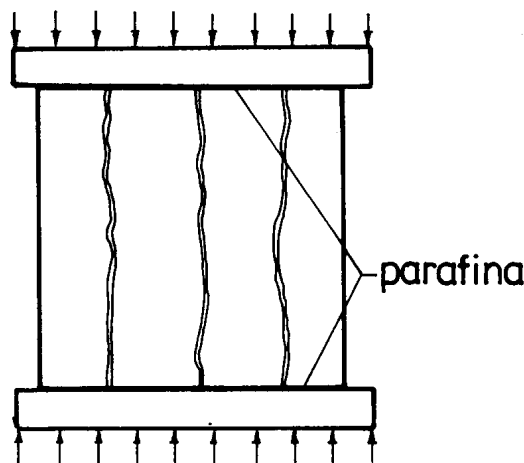


Rys. 7.15

W materiałach kruchych dobre wyniki daje hipoteza największego odkształcenia głównego, stosowana już przez *Ponceleta* i *de Saint-Venanta* w połowie XIX wieku. W myśl tej hipotezy bezpieczne wartości odkształceń głównych spełniają nierówności:

$$\varepsilon_i \leq \varepsilon_r \quad (i = 1, 2, 3), \quad (7.22)$$

gdzie $\varepsilon_r > 0$ i oznacza graniczną wartość odkształcenia, charakterystyczną dla danego materiału (por. rys. 7.14).



Rys. 7.16

Fakty doświadczalne wykazują, że graniczne wydłużenie nie zawsze jest związane z kierunkiem działania siły. Podczas ściskania próbki betonowej między dwiema sztywnymi płytami (rys. 7.16) zniszczenie następuje wskutek przekroczenia granicznych wartości odkształceń w kierunku prostopadłym do kierunku ściskania. Efekt ten występuje wówczas, gdy powierzchnie docisku płyt są pokryte warstwą parafiny i nie przenoszą sił tarcia.

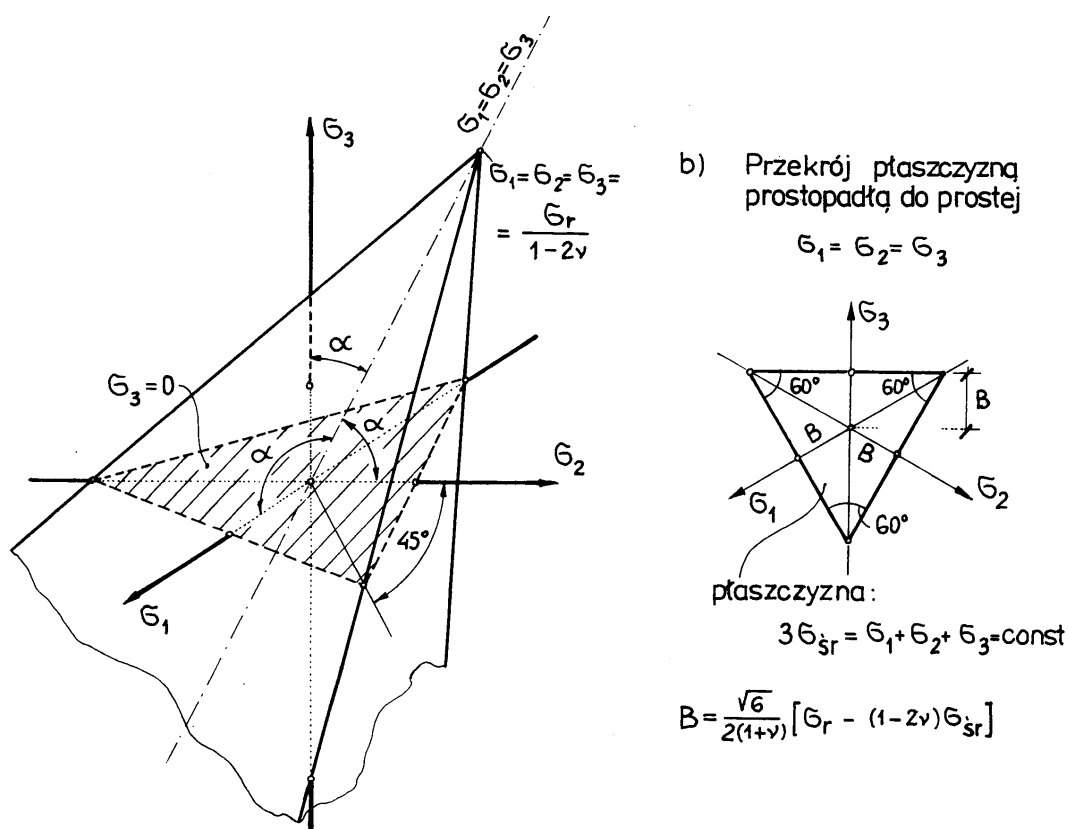
Aby zapisać zależność graniczną w przestrzeni naprężeń głównych, wykorzystamy fakt, że materiały kruche aż do zniszczenia zachowują się sprężysto. Jeśli materiał jest izotropowy, to dla osiowego rozciągania ważny jest wzór:

$$(a) \quad \varepsilon_r = \frac{\sigma_r}{E},$$

gdzie σ_r oznacza naprężenie zrywające, a E – moduł Younga. Po podstawieniu wzoru (a) oraz związków fizycznych (5.3) do zależności (7.22) otrzymujemy następujące nierówności:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) - \sigma_r &\leq 0, \\ \sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3) - \sigma_r &\leq 0, \\ \sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2) - \sigma_r &\leq 0, \end{aligned} \right\} \quad (7.23)$$

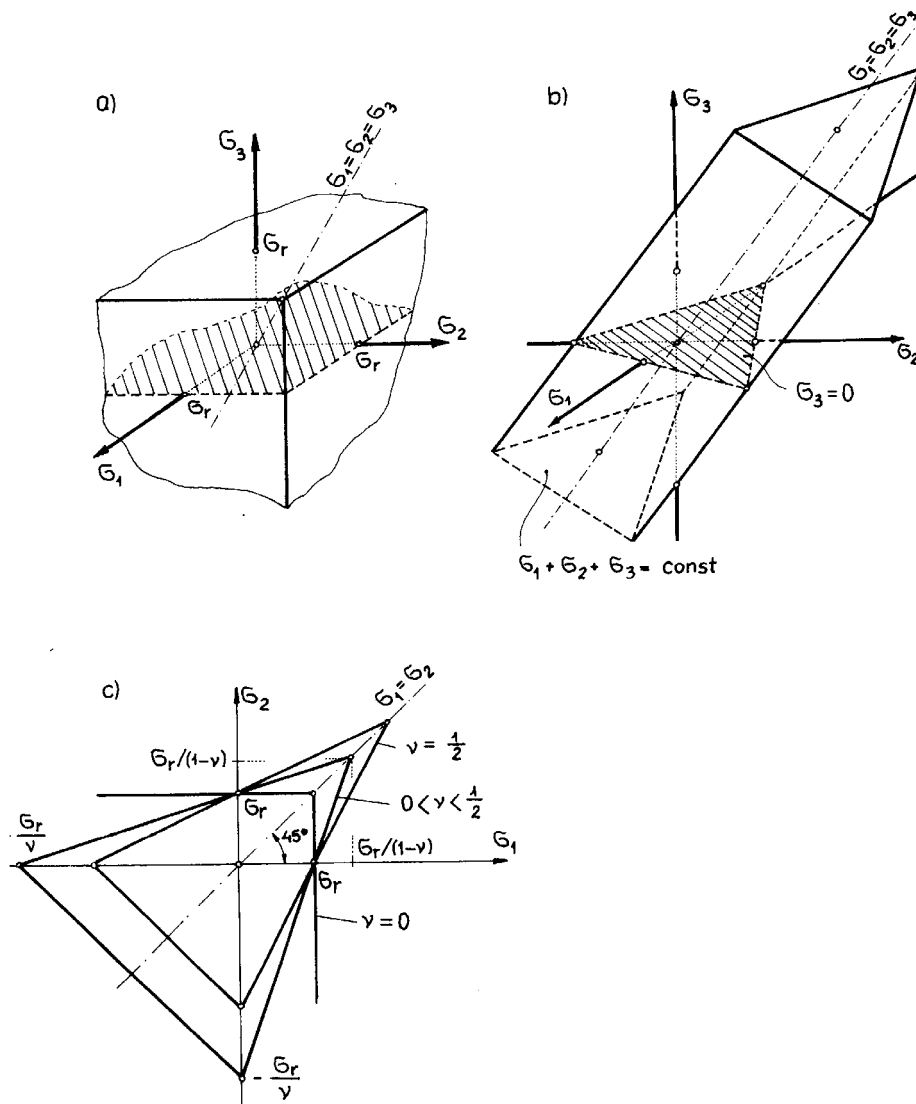
gdzie ν jest współczynnikiem Poissona.



Rys. 7.17

Nierówności (7.23) przedstawiają pewien obszar w przestrzeni nieuporządkowanych naprężeń głównych σ_1 , σ_2 i σ_3 . Wnętrze tego obszaru odpowiada stanom sprężystym. Bliższa analiza nierówności (7.23) wskazuje, że badany obszar jest ostrosłupem, którego oś pokrywa się z prostą równo nachyloną do osi układu współrzędnych σ_1 , σ_2 i σ_3 . Przekroje płaszczyznami prostopadłymi do osi ostrosłupa dają trójkąty równoboczne. Środki ciężkości tych trójkątów leżą na osi ostrosłupa. Obszar graniczny ilustruje rys. 7.17.

Konkretne wymiary obszaru sprężystego w istotny sposób zależą od współczynnika Poissona. Dla $\nu = 0$ otrzymujemy warunek Galileusza (rys. 7.18a), a dla $\nu = 0,5$ uzyskujemy graniastosłup o podstawie trójkątnej (rys. 7.18b). Wpływ współczynnika Poissona na kształt i wymiary obszaru w płaskim stanie naprężenia ilustruje rys. 7.18c.

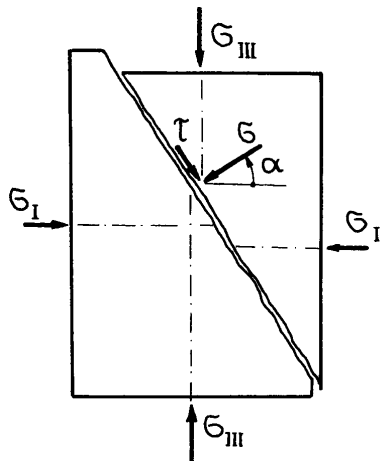


Rys. 7.18

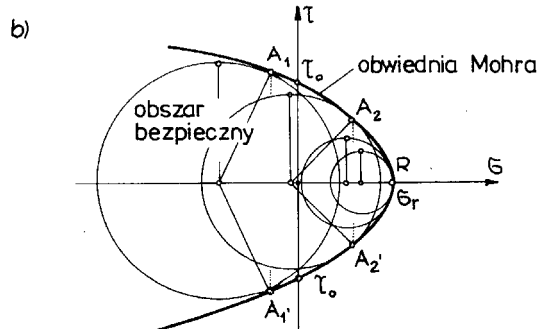
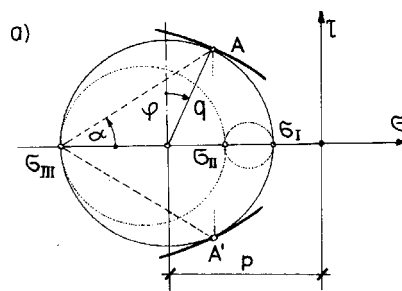
7.3.3. Hipotezy wywodzące się z warunku Mohra

Warunek *Mohra* obejmuje obszerną klasę tych hipotez, w których zniszczenie materiału nie zależy od wartości pośredniego naprężenia głównego σ_{II} . Szczególnym przypadkiem warunku *Mohra* jest więc hipoteza *Treski*.

Myśl przewodnia hipotezy *Mohra* jest następująca. Doświadczenie pokazuje, że zarówno zniszczenie poślizgowe, jak i rozdzielcze występuje na pewnych określonych powierzchniach. Dlatego uzasadnione jest założenie, że o zniszczeniu decyduje wektor naprężenia (tzn. naprężenie normalne σ i styczne τ) na tych właśnie powierzchniach (rys. 7.19). Można więc przyjąć, że wyteżenie materiału jest określone pewną funkcją $f(\sigma, \tau)$. Gdy funkcja ta, wyznaczona doświadczalnie, osiągnie wartość graniczną, to materiał ulega zniszczeniu. Wartości σ i τ , odpowiadające granicznej wartości funkcji $f(\sigma, \tau)$, tworzą dla różnych stanów naprężenia pewną krzywą graniczną w przestrzeni (σ, τ) , zwaną obwiednią *Mohra* i stanowiącą granicę obszaru bezpiecznego. Zniszczenie materiału następuje najpierw w tym punkcie i tej płaszczyźnie, dla których naprężenia σ i τ osiągną wartości wyznaczone punktami obwiedni. U podstaw hipotezy *Mohra* leży analogia związana ze zjawiskami tarcia. Pokonanie sił tarcia w spoczynku zależy od siły przesuwającej i od nacisku normalnego do powierzchni tarcia (rys. 7.19a).



Rys. 7.19



Rys. 7.20

W myśl warunku *Mohra* wszystkie graniczne stany naprężenia przedstawia się za pomocą największych kół naprężeń na płaszczyźnie (σ, τ) . Środki tych kół wyznacza wartość p , a ich promień wartość q :

$$p = \frac{1}{2}(\sigma_I + \sigma_{III}), \quad (7.24)$$

$$q = \frac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{III}). \quad (7.25)$$

Dla wybranego granicznego koła *Mohra* stan niebezpieczny osiąga się przy pewnej wartości σ i τ (punkt A na rys. 7.20a). Ponieważ zniszczenie nie może zależeć od znaku naprężenia stycznego, stan niebezpieczny musi wystąpić również dla wartości σ i $-\tau$ (punkt A' na rys. 7.20a). Wnioskujemy stąd, że obwiednia *Mohra* jest symetryczna względem osi σ .

Obwiednię *Mohra* ilustruje rys. 7.20b. Obwiednia jest styczna do największych kół *Mohra*, a współrzędne punktów styczności odpowiadają granicznym wartościom naprężeń σ i τ , dla których występuje zniszczenie materiału. Wszystkie koła styczne do obwiedni w punkcie R określają stany naprężeń, dla których pojawia się zniszczenie rozdzielcze. Pozostałe punkty obwiedni odpowiadają zniszczeniu poślizgowemu.

Najprostsza postać warunku *Mohra* składa się z dwóch prostych (por. rys. 7.21):

$$|\tau| = c - \sigma \cdot \operatorname{tg} \varphi, \quad (7.26)$$

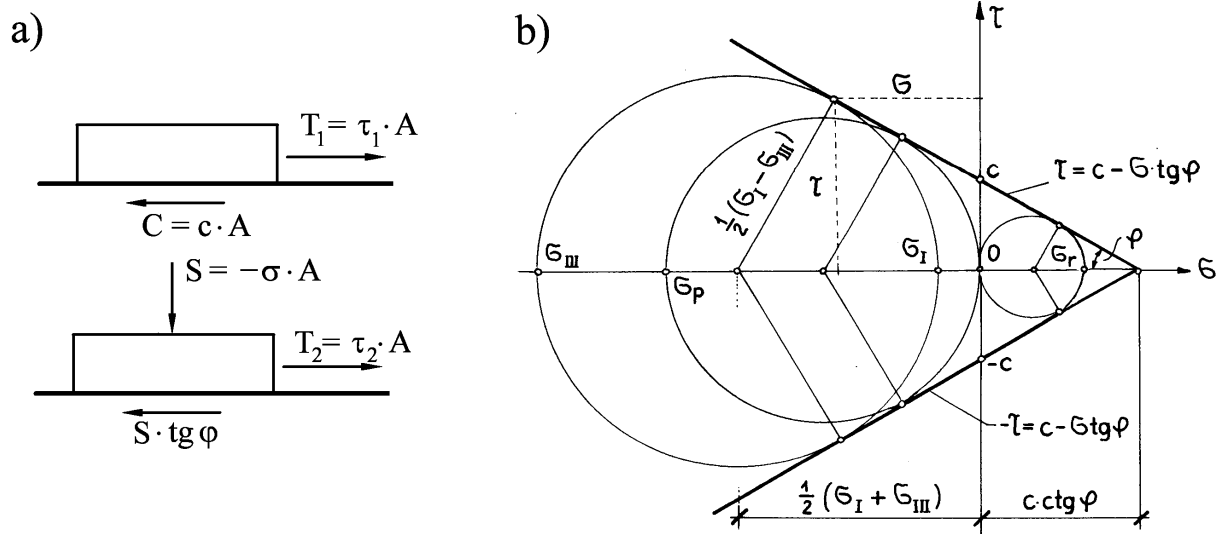
gdzie c i φ są stałymi materiałowymi. Warunek (7.26) sformułował już w 1776 roku *Coulomb*. Hipoteza *Coulomba-Mohra* znalazła zastosowanie w mechanice gruntów. Wówczas c i φ są odpowiednio: spójnością (tzn. wytrzymałością na ścinanie bez nacisku normalnego) i tzw. kątem tarcia wewnętrznego. Prosta interpretację mechaniczną wzoru (7.26) objaśnia rys. 7.21a. Przedstawiono na nim płaski element połączony z pewną płaszczyzną za pośrednictwem spoiwa o średniej wytrzymałości na ścinanie równej c . Wówczas graniczna wartość siły stycznej do płaszczyzny połączenia $T_1 = Ac$, gdzie A oznacza pole powierzchni kontaktu. Jeżeli element jest dodatkowo dociskany siłą S , to graniczna wartość siły powodującej przesunięcie elementu wzdłuż styku powiększy się o siłę T_2 pochodzącą od tarcia, czyli $T_2 = S \operatorname{tg} \varphi$,

gdzie φ jest kątem tarcia. Zatem całkowita wartość graniczna siły stycznej $T = T_1 + T_2$, co po podzieleniu przez pole kontaktu A odpowiada równaniu obwiedni granicznej dla $\tau > 0$:

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = c - \sigma \operatorname{tg} \varphi.$$

Symbol $\sigma = S/A$ oznacza naprężenie normalne (znak minus wynika ze znakowania naprężeń i oznacza ściskanie). Na płaszczyźnie naprężeń σ i τ warunek (7.26) stanowi prostoliniową obwiednię kół Mohra, przedstawioną na rys. 7.21. Z rysunku wynika, że

$$(\sigma_I - \sigma_{III}) + (\sigma_I + \sigma_{III}) \sin \varphi - 2 \cos \varphi = 0. \quad (7.27)$$

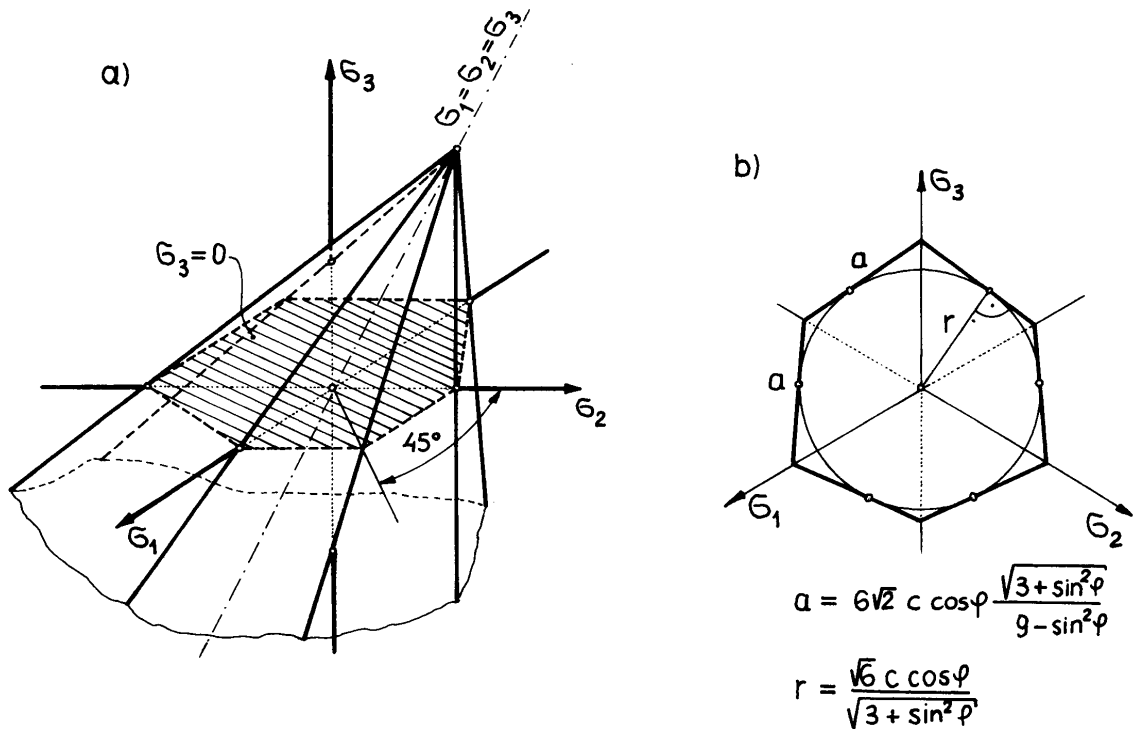


Rys. 7.21

Po przejściu do nieuporządkowanych naprężeń głównych otrzymujemy 6 równań:

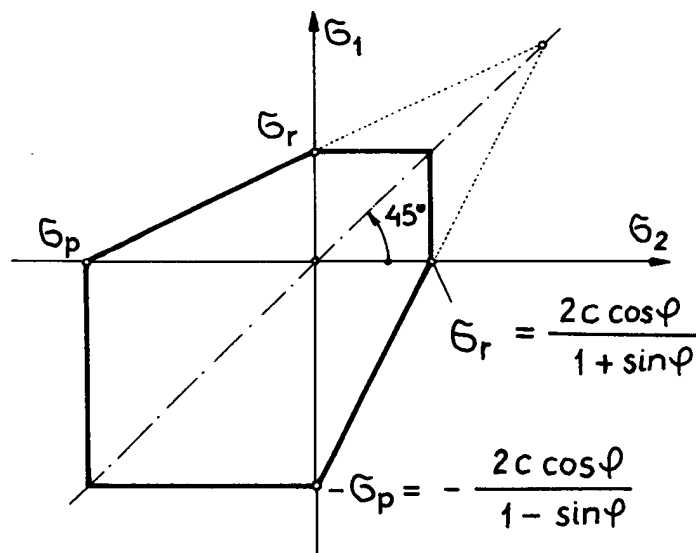
$$(\sigma_i - \sigma_j) + (\sigma_i + \sigma_j) \sin \varphi - 2c \cos \varphi = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (7.27a)$$

Szczegółowa analiza tych równań pozwala stwierdzić, że obszar bezpieczny odpowiada wnętrzu ostrosłupa o osi pokrywającej się z prostą $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ oraz o wierzchołku w punkcie $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = c \operatorname{ctg} \varphi$. Obszar ten obrazuje rys. 7.22. Przekroje ostrosłupa są nieregularnymi sześciobokami o trzech osiach symetrii. Dla kąta tarcia wewnętrznego $\varphi = 0$ obszar ten modyfikuje się do graniastosłupa, którego przekroje są sześciobokami foremnymi. Jest to po prostu warunek Treski, w którym kohezja oznacza naprężenia styczne powodujące uplastycznienie: $c = \tau_P = 0,5 \sigma_P$.



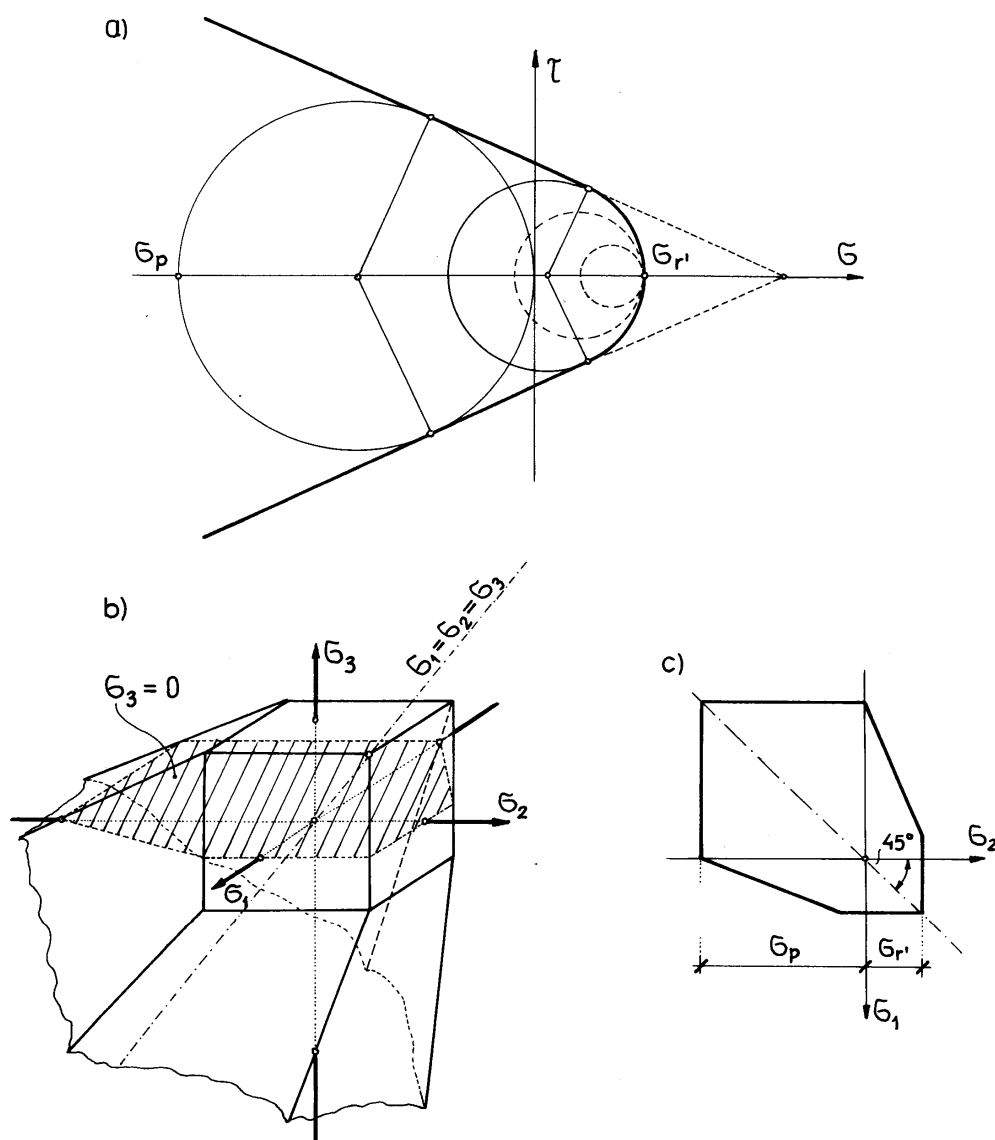
Rys. 7.22

Przekrój ostrosłupa płaszczyzną $\sigma_3 = 0$ daje warunek *Coulomba* dla płaskiego stanu naprężenia (por. rys. 7.23).



Rys. 7.23

Z hipotezy *Coulomba* nie wynikają różnice w mechanizmach zniszczenia dla naprężeń ściskających i rozciągających. Najprostszym warunkiem uwzględniającym te różnice jest tzw. zmodyfikowany warunek *Coulomba*, zilustrowany rysunkiem 7.24. Symbol $\sigma_{r'}$ oznacza tam wytrzymałość na równomierne trójosiowe rozciąganie lub na rozciąganie osiowe, jeżeli $\sigma_{r'} \leq 2c \cos\varphi / (1 + \sin\varphi)$, [19].



Rys. 7.24

Ogólniejszą klasę hipotez wynikających z warunku *Mohra* opisuje równanie:

$$\sigma = \sigma_r \left[1 - \left(\frac{\tau}{\tau_o} \right)^\beta \right], \quad (7.28)$$

gdzie τ_o oznacza wytrzymałość na ścinanie dla $\sigma = 0$ (por. rys. 7.20), przy czym $1 < \beta \leq 2$. W przestrzeni naprężeń głównych otrzymujemy wówczas ostrosłup krzywoliniowy. Przypadkowi $\beta \in 3/2$ odpowiada hipoteza *Caquota* (1949 rok), bardzo dobrze opisująca zniszczenie betonu. Gdy $\beta = 2$, otrzymujemy warunek paraboliczny, stosowany głównie do oceny wytrzymałości skał.

7.4. HIPOTEZA BURZYŃSKIEGO

W latach 1928-1929 *Burzyński* sformułował warunek wyłączenia obejmujący te hipotezy, które w przestrzeni naprężeń głównych odpowiadają obrotowym powierzchniom granicznym. W myśl hipotezy *Burzyńskiego* materiał ulega zniszczeniu wówczas, gdy suma energii dewiatorów i pewnej części energii aksjatorów osiąga wartość graniczną C_2 , tzn. gdy

$$W_{\sigma}^{(d)} + \eta \cdot W_{\sigma}^{(o)} = C_2, \quad (7.29)$$

gdzie $0 \leq \eta \leq 1$. Współczynnik η zależy od stanu naprężenia i własności materiału. Konkretną postać warunku (7.29) ustala się doświadczalnie.

Jeżeli na podstawie prób rozciągania, ściskania i ścinania ustalono odpowiednie wytrzymałości σ_r , σ_c i τ_0 , to warunek *Burzyńskiego* można zapisać w postaci:

$$-\frac{\sigma_c \cdot \sigma_r}{\tau_0^2} I_2^{(d)} + \left(1 - \frac{\sigma_c \sigma_r}{3\tau_0^2}\right) I_1^2 + (\sigma_c - \sigma_r) I_1 - \sigma_c \cdot \sigma_r = 0.$$

W przestrzeni naprężeń głównych równanie to przedstawia elipsoidę lub hiperboloidę obrotową o osi pokrywającej się z osią aksjatorów ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$). Gdy $\tau_0 = \sqrt{\sigma_c \cdot \sigma_r} / 3$, otrzymuje się paraboloidę obrotową. Stożek kołowy uzyskujemy, jeśli $\tau_0 = 2\sigma_c \sigma_r / [\sqrt{3}(\sigma_c + \sigma_r)]$. W przypadkach, gdy $\sigma_r = \sigma_c = \sigma_P$ oraz $\tau_0 = \sigma_P / \sqrt{2(1+\nu)}$ otrzymujemy pewien szczególny przypadek elipsoidy opisującej warunek *Beltramiego* ($\eta = 1$). Z kolei, jeżeli $\tau_0 = \sigma_P / \sqrt{3}$, to dostajemy warunek *Hubera-Misesa-Hencky'ego* ($\eta = 0$) przedstawiający powierzchnię walcową.

Dzięki dużej różnorodności kształtów powierzchni granicznych hipotezę *Burzyńskiego* można zastosować zarówno do materiałów ciągłych, jak i *plastyczno-kruchych*. Z powyższego wynika, że hipoteza ta zajmuje pozycję analogiczną do warunku *Mohra*. Zasadnicza różnica geometryczna polega na tym, że powierzchnie *Burzyńskiego* są obrotowe i gładkie, a w warunku *Mohra* powierzchnie graniczne są nieobrotowe; ich elementy składowe tworzą w ogólności krzywoliniowy ostrosłup o sześciu krawędziach i wierzchołku leżącym na osi aksjatorów.

7.5. WSPÓŁCZYNNIK BEZPIECZEŃSTWA

Wspólną cechą omówionych zależności granicznych jest to, że punkty leżące na brzegu obszaru granicznego odpowiadają niebezpiecznym stanom naprężenia. Jest oczywiste, że chcąc uniknąć zniszczenia materiału, musimy wymagać, by stany naprężenia w każdym punkcie konstrukcji spełniały nierówność ostrą:

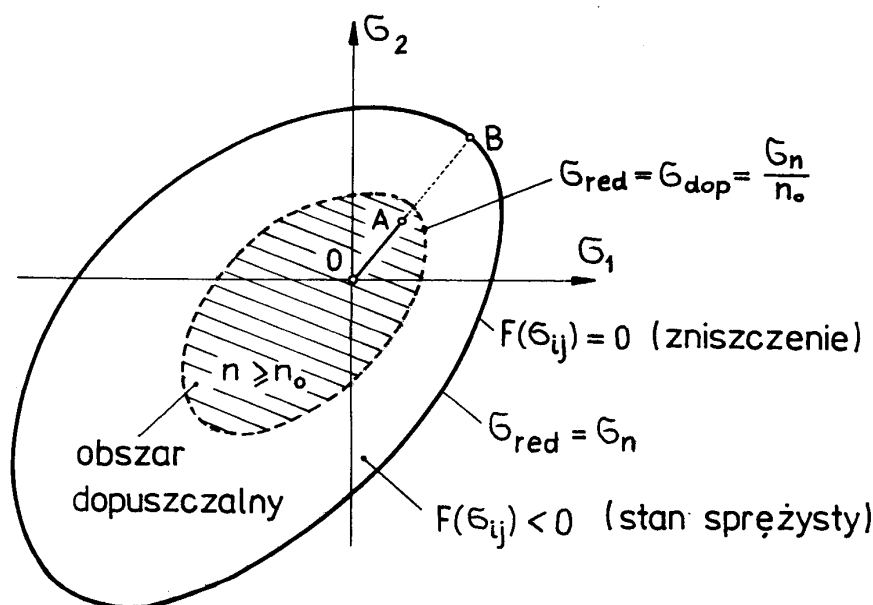
$$F[\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3), \sigma_n] < 0. \quad (7.30)$$

W jednoparametrowych warunkach wytrzymałościowych odpowiada to wymaganiu, by naprężenie zredukowane było mniejsze od wartości niebezpiecznej:

$$\sigma_{\text{red}}(x_1, x_2, x_3) < \sigma_n. \quad (7.31)$$

W bezpiecznie zaprojektowanej konstrukcji jest zachowana odpowiednio duża „odległość” aktualnego stanu naprężenia od stanu niebezpiecznego, określonego naprężeniem σ_n . Miarą tej odległości jest tzw. współczynnik bezpieczeństwa n .

Omówione zależności graniczne dla ciał ciągliwych i plastyczno-kruchych służą do opisu większości materiałów konstrukcyjnych. Jeżeli charakterystyki fizyczne rozważanych materiałów odpowiadają rys. 7.2 (materiały ciągliwe) i rys. 7.14 (materiały plastyczno-kruche), to wewnątrz obszaru granicznego odpowiada stanom sprężystym.



Rys. 7.25

Rozważmy obecnie stan naprężenia reprezentowany przez punkt A w przestrzeni naprężeń (rys. 7.25). Jeżeli ten stan jest bezpieczny, to punkt A leży wewnątrz obszaru granicznego. Zwróćmy uwagę na to, że naprężenie zastępcze jest funkcją jednorodną pierwszego stopnia względem współrzędnych stanu naprężenia. Rozumiemy przez to, że

$$\sigma_{\text{red}}(n \cdot \sigma_{ij}) = n \cdot \sigma_{\text{red}}(\sigma_{ij}),$$

czyli n -krotny wzrost składowych stanu naprężenia wywołuje również n -krotny wzrost naprężenia zredukowanego. Dzięki tej własności współczynnik bezpieczeństwa możemy zdefiniować jako stosunek długości odcinków OB i OA (por. rys. 7.25):

$$n = \frac{OB}{OA} > 1. \quad (7.32)$$

Współczynnik bezpieczeństwa jest liczbą większą od jedności, mówiącą, ile razy naprężenie zredukowane σ_{red} jest mniejsze od naprężenia niebezpiecznego σ_n :

$$n = \frac{\sigma_{\text{red}}^{(B)}}{\sigma_{\text{red}}^{(A)}} = \frac{\sigma_n}{\sigma_{\text{red}}^{(A)}} > 1.$$

Minimalne wartości współczynnika bezpieczeństwa n_0 podane są w normach projektowania konstrukcji. Dodajmy tu, że wartości n_0 mogą być różne dla różnych stanów naprężenia. Na przykład w materiałach plastyczno-kruchych w zakresie naprężeń rozciągających współczynnik bezpieczeństwa n_0 jest na ogół większy niż dla naprężeń ściskających. Bezpiecznie zaprojektowana konstrukcja powinna zatem spełniać warunek:

$$n \geq n_0. \quad (7.33)$$

Jeżeli wartości n_0 są dane, to określają one w przestrzeni naprężeń tzw. obszar dopuszczalny (rys. 7.25), którego granice odpowiadają wartościom $\sigma_{\text{red}} = \sigma_n / n_0$. Iloraz σ_n / n_0 nazywa się **naprężeniem dopuszczalnym**:

$$\sigma_{\text{dop}} = \frac{\sigma_n}{n_0}. \quad (7.34)$$

Wobec powyższego nierówności (7.33) można nadać następującą postać:

$$\sigma_{\text{red}}(x_1, x_2, x_3) \leq \sigma_{\text{dop}}. \quad (7.35)$$

Nierówność (7.35) stanowi treść najprostszej metody projektowania, zwanej **metodą naprężeń dopuszczalnych**. Ma ona charakter lokalny i jest oparta na założeniu, że osiągnięcie w pewnym punkcie konstrukcji naprężenia niebezpiecznego oznacza zniszczenie całej konstrukcji. Jest to zasadnicza wada tej metody. Obserwujemy bowiem wiele takich konstrukcji, w których lokalnemu uplastycznieniu bądź pęknięciu towarzyszą obciążenia znacznie mniejsze od obciążeń niszczących. Co więcej, w pewnych konstrukcjach dla obciążeń eksploatacyjnych z góry zakłada się lokalne zniszczenie materiału (np. w konstrukcjach żelbetowych). Problemy projektowania są dokładniej omówione w dodatku.

7.6. PRZYKŁADY

Przykład 1

Dany jest stan naprężenia w punkcie

$$\sigma = \begin{bmatrix} 100 & 100 & 80 \\ 100 & -200 & 0 \\ 80 & 0 & -100 \end{bmatrix} [\text{MN} / \text{m}^2].$$

Obliczyć współczynnik bezpieczeństwa na podstawie warunku *HMH*, jeśli:

$$\sigma_P = 550 \text{ MN/m}^2.$$

Rozwiązanie

Rozwiązanie polega tutaj na obliczeniu naprężenia zredukowanego i porównaniu go z wartością σ_P . Naprężenie zredukowane określa wzór (7.9):

$$\sigma_{\text{red}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{[100 - (-200)]^2 + [-200 - (-100)]^2 + (-100 - 100)^2 + 6(100^2 + 80^2)} = 345 \text{ MN/m}^2,$$

skąd
$$n = \frac{550}{345} = 1,59.$$

Przykład 2

Dla danych naprężeń niszczących przy ściskaniu σ_c i rozciąganiu σ_r obliczyć wytrzymałość betonu na ściskanie τ_0 za pomocą zmodyfikowanego warunku *Coulomba*.

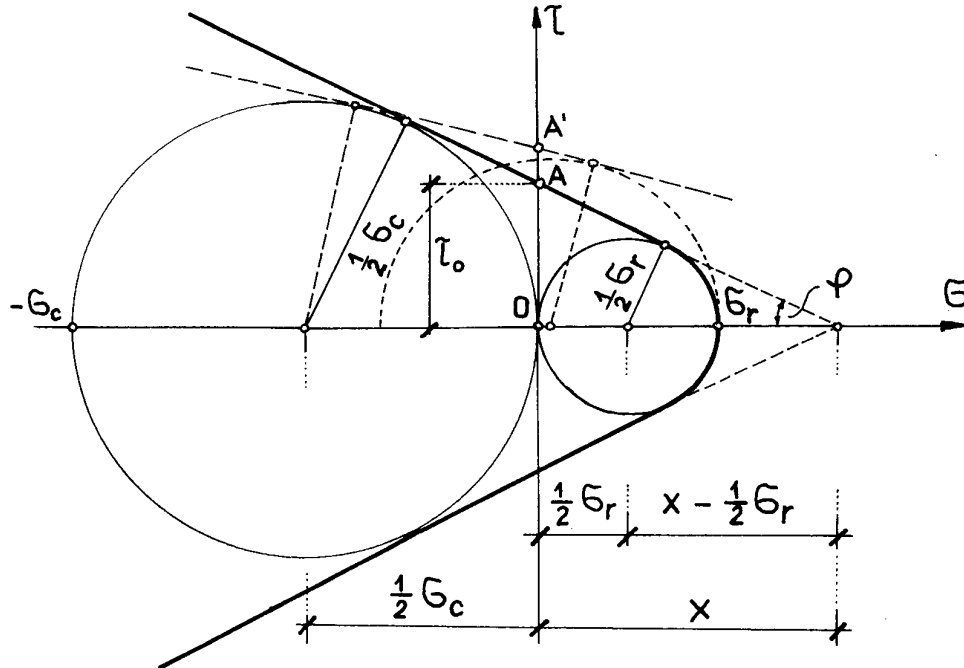
Rozwiązanie

Jako wytrzymałość na bezpośrednie ścinanie rozumiemy tutaj rzędną obwiedni Mohra dla $\sigma = 0$. Trzeba więc wyznaczyć długość odcinka *OA* na rys. 7.26. Z rysunku tego odczytujemy:

$$\sin \varphi = \frac{\sigma_c}{2\left(\frac{\sigma_c}{2} + x\right)} = \frac{\sigma_r}{2\left(x - \frac{\sigma_r}{2}\right)},$$

skąd

$$x = \frac{\sigma_c \cdot \sigma_r}{\sigma_c - \sigma_r} \text{ oraz } \sin \varphi = \frac{\sigma_c - \sigma_r}{\sigma_c + \sigma_r} \text{ i } \cos \varphi = \frac{2\sqrt{\sigma_c \cdot \sigma_r}}{\sigma_c + \sigma_r}.$$



Rys. 7.26

Poszukiwana wytrzymałość na ścinanie

$$\tau_0 = x \tan \varphi = \frac{\sigma_c \cdot \sigma_r}{\sigma_c - \sigma_r} \cdot \frac{\sigma_c - \sigma_r}{2\sqrt{\sigma_c \cdot \sigma_r}} = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_c \cdot \sigma_r}.$$

Wzór ten jest często cytowany w podręcznikach konstrukcji betonowych. Wytrzymałość betonu na ściskanie jest na ogół 10 razy większa od wytrzymałości na rozciąganie. Po uwzględnieniu tego faktu otrzymujemy:

$$\tau_0 = \frac{1}{2} \sqrt{10} \sigma_r = 1,6 \sigma_r.$$

Normy konstrukcji betonowych przyjmują, że $\tau_0 = 2\sigma_r$. Rezultat ten jest potwierdzony wieloma doświadczeniami. Wynika stąd, że przyjęty pierwotnie kształt obwiedni jest niewłaściwy. Odpowiednią korektę uwidoczniono na rysunku 7.26 linią przerywaną. Punkt A' należy obrać w ten sposób, by odcinek OA' był równy $2\sigma_r$.