



PODSUMOWANIE DRUGIEJ CZĘŚCI

Wiadomości ogólne

- *Klasyfikacja elementów konstrukcji*

Pręt to bryła geometryczna wypełniona materiałem, której jeden wymiar (długość) jest zdecydowanie większy od dwóch pozostałych. Linia łącząca środki ciężkości przekrojów pręta nazywa się osią pręta. Przekrój pręta może być stały lub zmienny. Pręt prostoliniowy o stałym przekroju nazywa się prętem pryzmatycznym.

Powłoka to bryła geometryczna wypełniona materiałem, której jeden wymiar (grubość) jest zdecydowanie mniejszy od dwóch pozostałych. Powłoka jest utworzona przez dwie powierzchnie S_g i S_d ograniczone walcową powierzchnią brzegową C . Grubość powłoki jest równa odległości powierzchni S_g i S_d , zaś symetralna tych powierzchni nazywa się powierzchnią środkową.

Blok to bryła geometryczna wypełniona materiałem, której trzy wymiary są tego samego rzędu. Jeżeli wymiary bloku są nieskończenie duże, to otrzymujemy pewną **przestrzeń** fizyczną wypełnioną materiałem.

Półprzestrzeń to bryła o wymiarach nieskończenie dużych ograniczona powierzchnią lub płaszczyzną.

- *Zasada de Saint Venanta*

Jeżeli dany układ sił działających na niewielki obszar ciała będącego w równowadze zastąpimy innym układem sił statycznie równoważnym i działającym bezpośrednio na ten obszar, to w odległości większej od jego wymiarów powstają jednakowe stany naprężenia, odkształcenia i przemieszczenia.

Zasada de Saint-Venanta wynika z przesłanek intuicyjnych i jest potwierdzona wieloma doświadczeniami. Obliczenia obszaru zaburzeń (np. strefa zakotwienia kabli w konstrukcjach wstępnie sprężonych, punkty podparcia belek) traktuje się zazwyczaj jako oddzielne zadanie.

- *Siły wewnętrzne*

Pręt będący w równowadze przecinamy myślowo płaszczyzną prostopadłą do osi pręta. Na płaszczyźnie przekroju wystąpią rozłożone w sposób ciągły wektory naprężenia, które zastępujemy wypadkową siłą i wypadkowym momentem w środku ciężkości przekroju. Jeśli znamy wszystkie zewnętrzne siły czynne i bierne, to siły z sześciu równań równowagi ułożonych dla jednej z odciętych części pręta wyznaczamy sześć współrzędnych wektorów siły i momentu: siłę normalną N i dwie siły poprzeczne Q_y , Q_z oraz moment skręcający \mathcal{M} i dwa momenty zginające M_y , M_z . Współrzędne te nazywamy **siłami wewnętrznymi** (przekrojowymi) lub uogólnionymi naprężeniami.

Definicje sił wewnętrznych:

$$\begin{aligned} N &= \int_A \sigma_{11} dA, & \mathcal{M} &= \int_A (\sigma_{13}x_2 - \sigma_{12}x_3) dA, \\ Q_y &= Q_2 = \int_A \sigma_{12} dA, & M_y &= M_2 = \int_A \sigma_{11}x_3 dA, \\ Q_z &= Q_3 = \int_A \sigma_{13} dA, & M_z &= M_3 = -\int_A \sigma_{11}x_2 dA. \end{aligned}$$

- *Zakres obliczeń konstrukcji. Projekty dopuszczalne*

Głównym celem obliczeń konstrukcji jest wyznaczenie w każdym punkcie współrzędnych tensora naprężenia, tensora odkształcenia i wektora przemieszczenia.

Każda poprawnie zaprojektowana konstrukcja musi spełniać *warunki wytrzymałościowe i warunki sztywnościowe*. W najprostszym ujęciu projektowania metodą naprężeń dopuszczalnych warunki te zazwyczaj zapisuje się następująco:

- warunek wytrzymałościowy: $\sigma_{\text{red}}(x_1, x_2, x_3) \leq \sigma_{\text{dop}}$,
- warunek sztywnościowy: $|u(x_1, x_2, x_3)| \leq u_{\text{dop}}$.

Ostatecznym efektem obliczeń konstrukcji jest podanie takich wymiarów elementów (przekrojów prętów, grubości płyt, ilości zbrojenia itp.), które gwarantują bezpieczne przeniesienie obciążeń zewnętrznych. Proces obierania wymiarów konstrukcji nazywa się *wymiarowaniem*.

W zakres obliczeń konstrukcji wchodzi następujące czynności:

- 1) wyznaczenie sił wewnętrznych,
- 2) obliczenie naprężeń na podstawie znanych już sił wewnętrznych,
- 3) obliczenie odkształceń ze związków fizycznych,
- 4) obliczenie przemieszczeń ze związków geometrycznych,
- 5) sprawdzenie warunków wytrzymałościowych i sztywnościowych oraz ewentualna korekta wymiarów.

• Koncentracja naprężeń

Koncentracja naprężeń występuje w miejscach nagłych zmian przekroju. Jest ona szczególnie groźna dla materiałów kruchych lub obciążonych dynamicznie materiałów ciągliwych. Gdy materiał jest ciągliwy, to przy statycznym obciążeniu następuje wyrównywanie naprężeń, a zniszczeniu towarzyszą widoczne deformacje.

Przekroje osłabione wcięciami (otworami) mają mniejszą zdolność do przenoszenia obciążeń, a o nośności pręta decyduje najmniejszy przekrój. Złagodzenie efektu koncentracji uzyskuje się wówczas, gdy zmiana przekroju przebiega w sposób płynny, a zaokrąglenia mają możliwie duży promień krzywizny. Ogólnie biorąc, koncentracji naprężeń można się spodziewać tam, gdzie zbiór punktów tworzących ciało jest niewypukły. Do takich przypadków oprócz otworów lub wcięć zaliczamy również miejsca przyłożenia obciążeń skupionych. Wynika to stąd, że obciążenia skupione przekazywane są na niewielkich obszarach przez inne części konstrukcji (lub narzędzia), tworzące łącznie z daną konstrukcją zbiory niewypukłe.

Zestawienie równań mechaniki elementów prętowych

Pomiędzy równaniami mechaniki ośrodka ciągłego a równaniami mechaniki elementów prętowych występuje wyraźne pokrewieństwo. Istotna różnica polega na tym, że równania mechaniki ośrodka ciągłego dotyczą punktu, a równania mechaniki elementów prętowych dotyczą przekroju. Okazuje się, że dzięki wprowadzeniu pojęć uogólnionych naprężeń i odkształceń możemy zbudować analogony równań równowagi, równań geometrycznych i fizycznych, z których wynikają podstawowe metody obliczania układów prętowych.

Ograniczymy do pryzmatycznych prętów sprężystych o przekrojach zwartych (tzn. niecienkościenych) Uogólnionymi naprężeniami w takich przypadkach są: siła normalna, siły poprzeczne, momenty zginające i moment skręcający. Uogólnione odkształcenia muszą być zgodne z uogólnionymi naprężeniami w sensie energetycznym. Chodzi mianowicie o to, by praca naprężeń na odkształceniach, scałkowana względem objętości pręta V była równa pracy uogólnionego naprężenia na stosownie obranym uogólnionym odkształceniu, scałkowanej po długości pręta l , tzn., by:

$$(a) \quad \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \int_l Y e dl,$$

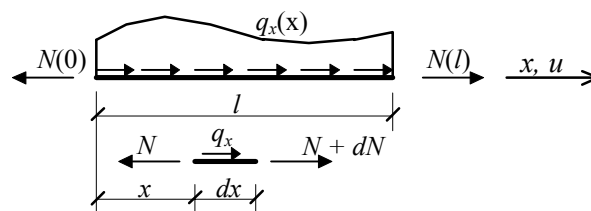
gdzie Y i e oznaczają odpowiednio uogólnione naprężenie i stowarzyszone z nim uogólnione odkształcenie.

W celu zilustrowania pokrewieństwa równań teorii ośrodka ciągłego i teorii elementów prętowych przyjmujemy, że pionowa oś przekroju pręta pokrywa się z główną osią bezwładności, a przekrój jest poddany działaniu siły normalnej N , siły poprzecznej $Q = Q_z$, momentu zginającego $M = M_y$ oraz momentu skręcającego $\mathcal{M} = M_x$. Z powyższymi uogólnionymi naprężeniami są stowarzyszone odpowiednio następujące uogólnione odkształcenia: wydłużenie osi pręta λ , kąt ścinania β , krzywizna osi odkształconej k oraz jednostkowy kąt skręcenia θ . Odkształcenia te będą związane będą z uogólnionymi przemieszczeniami przekroju pręta za pośrednictwem stosownych związków geometrycznych. Budowa związków fizycznych we wszystkich przypadkach ma postać odpowiadającą prawu Hooke'a, w którym miejsce modułu Younga zajmują odpowiednie sztywności przekroju, wg schematu:

$$\text{odkształcenie uogólnione} = \text{naprężenie uogólnione} / \text{sztywność przekroju}.$$

Przy omawianiu efektów poszczególnych naprężeń uogólnionych sprecyzujemy najpierw hipotezę kinematyczną (w przypadku siły poprzecznej – równania różniczkowe równowagi dla ośrodka ciągłego). Następnie podamy konkretną postać zależności całkowitej (a) oraz równania: równowagi, geometryczne i fizyczne, mające podstawowe znaczenie w teorii elementów prętowych. Uzupełnimy je wzorami na obliczanie naprężeń w poszczególnych punktach przekroju na podstawie znanych naprężeń uogólnionych. Na zakończenie sformułujemy analogony równań różniczkowych Naviera (5.17) oraz analogony równań (5.19), odnoszących się do teorii ciągłego ośrodka sprężystego.

• **Działanie siły normalnej**



Oznaczenia (definicje):

- N – naprężenie uogólnione (siła normalna)
- λ – odkształcenie uogólnione (odkształcenie liniowe osi pręta)
- q_x – obciążenie styczne
- u – uogólnione przemieszczenie (wydłużenie osi pręta)
- EA – sztywność przekroju (moduł Younga \times pole przekroju)

1. Podstawowe założenie – hipoteza płaskich przekrojów:

$$\varepsilon_x(x, y, z) = \varepsilon_x(x, 0, 0) = \lambda(x)$$

2. Zależność całkowita:

$$\int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \int_l N \lambda dx$$

3. **Równanie różniczkowe równowagi:**

$$\frac{dN}{dx} + q_x(x) = 0$$

4. **Równanie geometryczne:**

$$\lambda = \frac{du}{dx}$$

5. **Równanie fizyczne:**

$$\lambda = \frac{N}{EA}$$

6. Obliczanie naprężeń:

$$\sigma_x = \frac{N}{A}$$

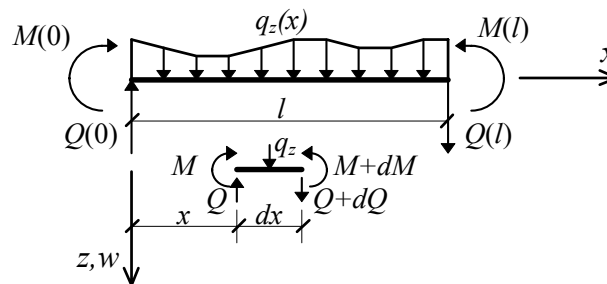
7. Równanie różniczkowe wydłużenia

a) postać ogólna:
$$\frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) + q_x(x) = 0$$

b) pręt jednorodny i pryzmatyczny:
$$EA \frac{d^2 u}{dx^2} + q_x(x) = 0$$

c) przy znanej funkcji siły normalnej:
$$\frac{du}{dx} = \frac{N(x)}{EA}$$

• **Działanie momentu zginającego**



Oznaczenia (definicje)

- M – naprężenie uogólnione (moment zginający)
- k – odkształcenie uogólnione (krzywizna odkształconej osi pręta)
- q_z – obciążenie poprzeczne
- $w = w_M$ – uogólnione przemieszczenie (ugięcie pręta od momentu zginającego)
- EJ – sztywność przekroju (moduł Younga \times moment bezwładności)

1. Podstawowe założenie – hipoteza płaskich przekrojów *Bernoulliego*:

$$\varepsilon_x(x, y, z) = \varepsilon_x(x, z) = k(x) \cdot z$$

2. Zależność całkowita:

$$\int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \int_l M k \, dx$$

3. **Równanie równowagi:**

$$\frac{d^2 M}{dx^2} + q_z(x) = 0$$

4. **Równanie geometryczne:**

$$k = -\frac{d^2 w}{dx^2}$$

5. **Równanie fizyczne:**

$$k = \frac{M}{EJ}$$

6. Obliczanie naprężeń:

$$\sigma_x = \frac{M}{J} z$$

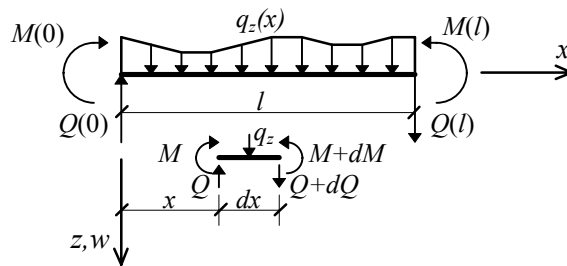
7. Równanie różniczkowe linii ugięcia pochodzącego od momentu zginającego

a) postać ogólna:
$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EJ \frac{d^2 w}{dx^2} \right) - q_z(x) = 0$$

b) pręt jednorodny i pryzmatyczny:
$$EJ \frac{d^4 w}{dx^4} - q_z(x) = 0$$

c) przy znanej funkcji momentu zginającego:
$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EJ}$$

• Działanie siły poprzecznej



Oznaczenia (definicje)

- Q – naprężenie uogólnione (siła poprzeczna)
 β – odkształcenie uogólnione (kąt ścinania)
 q_z – obciążenie (poprzeczne)
 $w = w_Q$ – uogólnione przemieszczenie (ugięcie belki od ścinania)
 GA/k – sztywność ścinania przekroju (moduł *Kirchhoffa* \times pole przekroju/ k)

1. Podstawowe założenie – równanie różniczkowe równowagi dla pręta nieważkiego:

$$\sigma_{j1,j} = 0$$

2. Zależność całkowa:

$$\int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \int_l Q \beta dx$$

3. **Równanie równowagi:**

$$\frac{dQ}{dx} + q_z(x) = 0$$

4. **Równanie geometryczne:**

$$\beta = \frac{dw_Q}{dx}$$

5. **Równanie fizyczne:**

$$\beta = \frac{Q}{(GA/k)}; \quad k = \frac{A}{J^2} \int_A \frac{S^2}{b^2} dA$$

6. Obliczanie naprężeń:

$$\tau_{xz} = \frac{QS}{Jb}$$

7. Równanie różniczkowe ugięcia pochodzącego od siły poprzecznej

- a) postać ogólna:

$$\frac{d}{dx} \left((GA/k) \frac{dw_Q}{dx} \right) + q_z(x) = 0$$

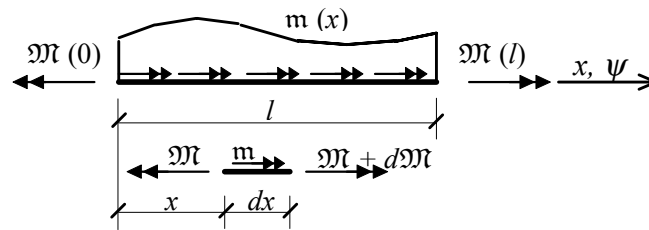
- b) pręt jednorodny i pryzmatyczny:

$$(GA/k) \frac{d^2 w_Q}{dx^2} + q_z(x) = 0$$

- c) przy znanej funkcji sił poprzecznych:

$$\frac{dw_Q}{dx} = \frac{Q(x)}{(GA/k)}$$

• Działanie momentu skręcającego



Oznaczenia (definicje)

- M – napężenie uogólnione (moment skręcający)
 θ – odkształcenie uogólnione (jednostkowy kąt skręcenia)
 m – obciążenie (moment skręcający rozłożony w sposób ciągły)
 ψ – uogólnione przemieszczenie (kąt skręcenia przekroju)
 GJ_s – sztywność przekroju (moduł *Kirchhoffa* \times moment bezwładności na skręcanie)
 t – funkcja deplanacji (deplanacja nieskrępowana = skręcanie swobodne)

1. Podstawowe założenie – hipoteza „sztywnych” przekrojów:

$$u_1 = \theta t(x_2, x_3) = \theta t(y, z); \quad u_2 = -\theta x_1 x_3 = -\theta xz; \quad u_3 = \theta x_1 x_2 = \theta xy$$

2. Zależność całkowita:

$$\int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \int_l M \theta dx$$

3. **Równanie równowagi:**

$$\frac{dM}{dx} + m(x) = 0$$

4. **Równanie geometryczne:**

$$\theta = \frac{d\psi}{dx}$$

5. **Równanie fizyczne:**

$$\theta = \frac{M}{GJ_s}$$

6. Obliczanie naprężeń:

$$\tau_{xy} = \frac{dF}{dz}; \quad \tau_{xz} = -\frac{dF}{dy}; \quad \text{przy czym} \quad M = 2 \int_A F(y, z) dA,$$

gdzie $F(y, z)$ = funkcja naprężeń spełnia równanie $\nabla^2 F(y, z) = -2G\theta$;
 z warunkiem brzegowym $F(y, z) = 0$; $y, z \in c$

7. Równanie różniczkowe kąta skręcenia:

a) postać ogólna:

$$\frac{d}{dx} \left(GJ_s \frac{d\psi}{dx} \right) + m(x) = 0,$$

b) pręt jednorodny i pryzmatyczny:

$$GJ_s \frac{d^2 \psi}{dx^2} + m(x) = 0,$$

c) przy znanej funkcji momentu skręcającego: $\frac{d\psi}{dx} = \frac{M}{GJ_s}.$

Jednoczesne działanie siły normalnej i momentu zginającego

• Obliczanie naprężeń. Oś obojętna

Ostateczny efekt jednoczesnego działania siły normalnej i momentu zginającego w prętach liniowo-sprężystych można uzyskać z wykorzystaniem zasady superpozycji. W przypadku dowolnych osi środkowych naprężenia wyraża wzór:

$$\sigma_x = \sigma_x^N + \sigma_x^M = \frac{N}{A} - \frac{M_y J_{yz} + M_z J_y}{J_y J_z - J_{yz}^2} \cdot y + \frac{M_y J_z + M_z J_{yz}}{J_y J_z - J_{yz}^2} \cdot z,$$

a w przypadku głównych osi środkowych ($J_{yz} = 0$) wzór upraszcza się do postaci:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{J_z} y + \frac{M_y}{J_y} z.$$

Wzory powyższe nie zawierają w zasadzie żadnych nowych elementów. Okazuje się jednak, że równoczesne działanie siły normalnej i momentu zginającego można interpretować jako działanie siły normalnej przyłożonej nie w osi ciężkości przekroju, lecz w punkcie o współrzędnych y_N i z_N obranych w ten sposób, by $M_y = Nz_N$; $M_z = -Ny_N$. Wtedy

$$\sigma_x = \frac{N}{A} \left(1 + \frac{y_N y}{i_z^2} + \frac{z_N z}{i_y^2} \right).$$

Jest to wzór na tzw. mimośrodkowe działanie siły normalnej. Współrzędne y_N i z_N nazywamy odpowiednio mimośrodkami siły normalnej względem osi z i y , natomiast i_z oraz i_y oznaczają tzw. główne promienie bezwładności przekroju:

$$i_y = \sqrt{J_y / A}; i_z = \sqrt{J_z / A}.$$

Równanie osi obojętnej wynika z przyrównania σ_x do zera:

$$1 + \frac{y_N y}{i_z^2} + \frac{z_N z}{i_y^2} = 0 \quad \text{lub} \quad \frac{y}{y_0} + \frac{z}{z_0} = 1, \quad \text{gdzie} \quad y_0 = -\frac{i_z^2}{y_N}, \quad z_0 = -\frac{i_y^2}{z_N}.$$

Praktyczne uwagi dotyczące mimośrodkowego działania siły podłużnej:

– oś obojętna przy mimośrodkowym działaniu siły normalnej nie przechodzi przez środek ciężkości przekroju,

– w środku ciężkości przekroju występuje naprężenie $\sigma_{x0} = N/A$,

– środek ciężkości przekroju leży zawsze między osią obojętną a punktem przyłożenia siły normalnej.

– im y_N i z_N są większe, tym oś obojętna leży bliżej środka ciężkości przekroju.

Można wykazać, że pękowi osi obojętnych przechodzących przez dany punkt A odpowiadają punkty przyłożenia siły N leżące na linii prostej. W przypadku szczególnym, gdy siła przemieszcza się wzdłuż prostej przechodzącej przez środek ciężkości przekroju, osie obojętne przesuwają się równolegle. Spostrzeżenia te jest wykorzystywane do konstrukcji rdzenia przekroju.

• Rdzeń przekroju

Oś obojętna jest linią dzielącą przekrój na dwie części: rozciąganą i ściskaną. Tak jest, jeżeli oś obojętna przecina przekrój. Jeżeli oś obojętna nie przecina przekroju, to występują naprężenia jednakowego znaku. Często interesują nas przypadki, w których przekrój może przenosić tylko naprężenia jednego znaku. Chodzi wówczas o wyznaczenie tzw. rdzenia przekroju, tzn. takiego obszaru przyłożenia siły normalnej, by naprężenia σ_x były tego samego znaku. W celu wyznaczenia rdzenia przekroju należy sporządzić pokrycie wypukłe przekroju. Wówczas punktom przyłożenia siły podłużnej na granicy rdzenia odpowiadają osie obojętne pokrywające się ze stycznymi do tego pokrycia.

Są dwa sposoby wyznaczania rdzenia przekroju.

Sposób I (na podstawie definicji rdzenia). Dla osi obojętnych, stycznych do obwiedni konturu przekroju, wyznaczamy współrzędne przyłożenia siły podłużnej $y_r = -i_z^2/y_0$, $z_r = -i_y^2/z_0$. Symbole y_0, z_0 odpowiadają tutaj znanym współrzędnym odcinającym na głównych osiach bezwładności przekroju przez poszczególne styczne. Przy dużej liczbie osi obojętnych można wyznaczyć kształt i rozmiary rdzenia z żadaną dokładnością. W przypadkach, gdy obwiednia jest wielobokiem, rozpatrujemy tylko osie obojętne pokrywające się z kolejnymi bokami wieloboku. Rdzeń przekroju jest wtedy również wielobokiem, a granicę rdzenia otrzymujemy łącząc liniami prostymi wyznaczone punkty y_r, z_r .

Sposób II (na podstawie liniowości równania osi obojętnej względem y_N i z_N). Przykładamy siłę podłużną w punktach leżących na obwiedni przekroju. Punktom przyłożenia siły podłużnej odpowiadają osie obojętne styczne do rdzenia przekroju. Dostatecznie duża liczba punktów przyłożenia siły pozwala wyznaczyć rdzeń przekroju. Gdy obwiednia jest wielobokiem, siłę przykładamy tylko w wierzchołkach wieloboku. Odpowiadające tym położeniom osie obojętne tworzą granicę rdzenia przekroju.

Uwagi dotyczące rdzenia przekroju:

- pojęcie rdzenia przekroju ma sens w odniesieniu do materiału liniowo-sprężystego,
- rdzeń przekroju można wyznaczyć nie precyzując wartości siły podłużnej N ,
- rdzeń przekroju jest zawsze zbiorem wypukłym,
- krzywoliniowej obwiedni odpowiada krzywoliniowa granica rdzenia,
- jeśli pokrycie wypukłe przekroju jest wielobokiem, to i rdzeń jest wielobokiem.
- rdzeń przekroju symetrycznego jest również symetryczny.

• **Materiał liniowo-sprężysty przenoszący naprężenia tylko jednego znaku**

Jeśli materiał sprężysty jest zdolny do przenoszenia naprężeń tylko jednego znaku, to do obliczenia naprężeń normalnych spowodowanych przez mimośrodowe działanie siły stosuje się inne metody. Jest to przypadek tzw. więzów jednostronnych. Problem taki jest nieliniowy i bardzo trudny. Jego rozwiązanie w ogólnym przypadku wymaga nader wyrafinowanych metod matematycznych. W praktyce zagadnienie takie występuje podczas obliczania naprężeń ściskających bezpośrednio pod fundamentem, gdyż styk fundamentu z gruntem nie przenosi naprężeń rozciągających. Gdy siła leży w rdzeniu, a jej znak odpowiada naprężeniom, które przenosi materiał, to wszystkie przytoczone wyżej wzory są nadal słuszne. Zwróćmy uwagę na to, że poprawny wykres naprężeń normalnych musi spełniać dwa warunki:

- sumy rzutów sił, tzn. objętość bryły naprężeń równa się sile wypadkowej
- sumy momentów, tzn. środek ciężkości bryły naprężeń odpowiada punktowi przyłożenia siły wypadkowej.

Warunki te nabierają szczególnego znaczenia, gdy siła podłużna jest przyłożona poza rdzeniem. W literaturze przedmiotu znane jest tylko rozwiązanie przypadku przekroju prostokątnego o wymiarach $b \times h$, obciążonego siłą N przyłożoną na osi przekroju w odległości c od boku b . Punkt przyłożenia siły leży poza rdzeniem przekroju, tzn. $c < h/2 - h/6 = h/3$. Wówczas największe co do modułu naprężenie σ_{ekstr} występuje na krawędzi przekroju:

$$\sigma_{ekstr} = \frac{2N}{3bc}.$$

Podczas stosowania tego wzoru trzeba pamiętać, że rozważane zagadnienie jest nieliniowe i nie obowiązuje zasada superpozycji.

• **Warunek projektowania. Obszar dopuszczalny**

W nawiązaniu do metody naprężeń dopuszczalnych warunek projektowania w obecności wyłącznie naprężeń normalnych polega na spełnieniu nierówności:

$$-\sigma_{dop} \leq \sigma \leq \sigma_{dop}.$$

Warunek ten w przypadku jednoczesnego działania siły normalnej i momentu zginającego pociąga za sobą ograniczenie sił wewnętrznych, stosownie do wzorów na ekstremalne naprężenia w skrajnych włókach przekroju:

$$\begin{aligned}
 -\sigma_{\text{dop}}^- &\leq \frac{N}{A} - \frac{M}{W_g} \leq \sigma_{\text{dop}}^+, & W_g &= J_y / z_g, \\
 -\sigma_{\text{dop}}^- &\leq \frac{N}{A} + \frac{M}{W_d} \leq \sigma_{\text{dop}}^+, & W_d &= J_y / z_d,
 \end{aligned}$$

przy czym osie y i z pokrywają się z głównymi osiami bezwładności przekroju, a $\sigma_{\text{dop}}^- > 0$, $\sigma_{\text{dop}}^+ > 0$ oznaczają odpowiednio naprężenia dopuszczalne na ściskanie i rozciąganie. W przestrzeni sił przekrojowych N i M nierówności powyższe ograniczają pewien tzw. obszar dopuszczalny. W zadaniach liniowych jest to równoległobok, którego wnętrzu odpowiada różnym parom N i M spełniającym warunek wytrzymałościowy. W zadaniach nieliniowych obszar dopuszczalny może być ograniczony brzegiem krzywoliniowym. Taki przypadek występuje czasami podczas projektowania fundamentu. Zadaniem projektanta jest takie dobranie wymiarów przekroju, by dla wszystkich schematów obciążenia siły przekrojowe mieściły się wewnątrz obszaru dopuszczalnego.

Podstawy teorii prętów cienkościennych Własowa

Jeżeli przekrój poprzeczny pręta składa się z elementów (np. prostokątów lub wycinków pierścienia) o grubości dużo mniejszej od gabarytów przekroju, to taki pręt nazywamy cienkościennym. Przekrój cienkościenny powstaje w ten sposób, że wzdłuż pewnej krzywej płaskiej (tzw. linii środkowej) przemieszcza się środek odcinka g (o długości stałej lub zmiennej), prostopadły do tej krzywej. Końce odcinka g tworzą krawędzie ścianek przekroju. Ogólnie biorąc, grubość ścianki może być zmienna, tzn. $g = g(c)$, przy czym c jest współrzędną krzywoliniową odmierzaną od pewnego punktu linii środkowej. Drugą współrzędną, prostopadłą do linii środkowej (wzdłuż grubości ścianki), oznaczamy symbolem n , a trzecia współrzędna x pokrywa się z osią pręta. Niezależnie od powyższego w płaszczyźnie przekroju wprowadza się środkowy układ współrzędnych y i z .

Jeżeli linia środkowa jest krzywą zamkniętą, to otrzymujemy przekrój cienkościenny zamknięty; gdy jest krzywą otwartą, to mamy przekrój cienkościenny otwarty. Teoria prętów cienkościennych Własowa jest w istocie rzeczy uproszczoną teorią długich powłok cylindrycznych i w swej standardowej formie dotyczy prętów cienkościennych o przekroju otwartym. Teoria Własowa służy przede wszystkim do uwzględnienia reakcji więzów wynikających ze skrupowanej deplanacji przekroju.

• Założenia

Teoria Własowa opiera się na dwóch zasadniczych założeniach kinematycznych:

- 1) przekroje poprzeczne pręta ulegają deformacji tylko w kierunku osi x (tzw. hipoteza sztywnego przekroju poprzecznego – założenie z teorii skręcania swobodnego *de Saint-Venanta*),
- 2) odkształcenia postaciowe powierzchni środkowej są równe zeru, tzn. $\gamma_{xc} = 0$.

• Charakterystyki wycinkowe przekroju cienkościennego

Współrzędna wycinkowa

$$\omega(R, O) = \int_0^c h(\bar{c}) d\bar{c} \quad [\text{m}^2],$$

gdzie $h(c)$ oznacza odległość bieguna R od stycznej do linii środkowej w punkcie o współrzędnej c , odmierzanej od pewnego punktu początkowego O leżącego na linii środkowej, zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Po zmianie bieguna z położenia $R(y_R, z_R)$ do położenia $R^*(y_R^*, z_R^*)$, przy stałym punkcie początkowym

$O(y_0, z_0)$, współrzędna wycinkowa punktu $M(y, z)$ zmienia się stosownie do zależności:

$$\omega(R^*, O) = \omega(R, O) - (z_R^* - z_R)(y - y_0) + (y_R^* - y_R)(z - z_0).$$

Współrzedną wycinkową punktu M po zmianie punktu początkowego z położenia O do położenia O^* oblicza się według wzoru:

$$\omega(O^*) = \omega(O) - \omega_{O^*}(O),$$

gdzie $\omega_{O^*}(O)$ jest współrzedną wycinkową punktu O^* obliczoną przy założeniu, że punkt początkowy przyjęto w punkcie O .

Wycinkowe parametry geometryczne przekroju cienkościennego:

– wycinkowy moment statyczny

$$S_\omega = \int_A \omega \, dA \quad [\text{cm}^4],$$

– wycinkowe momenty odśrodkowe

$$J_{\omega y} = \int_A \omega y \, dA \quad [\text{cm}^5], \quad J_{\omega z} = \int_A \omega z \, dA \quad [\text{cm}^5],$$

– wycinkowy moment bezwładności

$$J_\omega = \int_A \omega^2 \, dA \quad [\text{cm}^6].$$

• **Główne współrzedne i charakterystyki wycinkowe przekroju cienkościennego**

Główne współrzedne wycinkowe odnoszą się do bieguna głównego S , względem którego znikają wycinkowe momenty odśrodkowe (tzn. $J_{\omega y} = J_{\omega z} = 0$), oraz do głównego punktu początkowego G , dla którego wycinkowy moment statyczny jest równy zeru (tzn. $S_\omega = 0$). Jeżeli wycinkowe momenty odśrodkowe i wycinkowy moment statyczny są obliczone dla bieguna $R(y_R, z_R)$ i punktu początkowego O , to współrzedne bieguna głównego y_S i z_S oraz współrzedną głównego punktu początkowego ω_G wyznacza się z zależności:

$$y_S = y_R - \frac{J_{\omega z}}{J_y}, \quad z_S = z_R - \frac{J_{\omega y}}{J_z}, \quad \omega_G = \frac{S_\omega}{A}.$$

Biegun główny S pokrywa się ze środkiem ścinania, omówionym w rozdziale 11.

• **Naprężenia normalne. Bimoment**

W teorii *Własowa* przyjmuje się, że naprężenia normalne σ_x na grubości ścianki są stałe. Jeśli przyjmujemy główne środkowe osie bezwładności y, z oraz główne współrzedne wycinkowe przekroju, to ważne są następujące zależności:

$$\begin{aligned} N &= \int_A \sigma_x dA = E_1 A \lambda = E_1 A \hat{u}'_x(x); \quad \lambda = \hat{u}'_x(x) = \frac{N}{E_1 A}; \\ M_y &= \int_A \sigma_x z dA = E_1 J_y k_y = -E_1 J_y w''_S(x); \quad k_y = -w''_S(x) = \frac{M_y}{E_1 J_y}; \\ M_z &= -\int_A \sigma_x y dA = E_1 J_z k_z = E_1 J_z v''_S(x); \quad k_z = v''_S(x) = \frac{M_z}{E_1 J_z}; \\ B &= \int_A \sigma_x \omega dA = E_1 J_\omega k_\omega = E_1 J_\omega \psi''(x); \quad k_\omega = \psi''(x) = \frac{B}{E_1 J_\omega}; \quad E_1 = \frac{E}{1 - \nu^2}. \end{aligned}$$

W zależnościach tych $\lambda, k_y, k_z, k_\omega$ oznaczają odpowiednio odkształcenie osiowe, krzywiznę względem osi y , krzywiznę względem osi z oraz „krzywiznę skrętną”. Z kolei $\hat{u}_x, v_S, w_S, \psi(x)$ oznaczają odpowiednio przemieszczenie głównego punktu zerowego wzdłuż osi pręta, przemieszczenie środka skrę-

ciania w kierunku osi y , przemieszczenie środka skręcania w kierunku osi z oraz kąt skręcania. Wielkość B jest tzw. bimomentem, charakterystycznym dla teorii *Własowa*.

Podstawowy wzór na obliczenie naprężeń normalnych σ_x w przekroju cienkościennym ma postać:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{J_z} y + \frac{M_y}{J_y} z + \frac{B}{J_\omega} \omega.$$

Ostatni składnik prawej strony tego wzoru, charakterystyczny dla prętów cienkościennych, tworzy układ naprężeń samorównoważących się, tzn. siły normalne i oba momenty zginające, pochodzące od tych naprężeń, są zawsze równe zero.

• **Naprężenia styczne. Moment giętno-skrętny**

Naprężenia styczne w teorii *Własowa* - podobnie jak w teorii prętów zwartych - mają charakter drugorzędny. Są one różne od zera, mimo że z drugiego założenia teorii *Własowa* ($\gamma_{xc} = 0$) można by wnioskować, że $\tau_{xc} = 0$. Bezkrytyczna akceptacja tego wniosku uniemożliwiłaby jednak spełnienie równań równowagi.

Rozkład naprężeń stycznych na grubości ścianki nie jest znany. Wobec powyższego przyjmujemy, że składają się one z najprostszych postaci funkcji nieparzystej τ_v i parzystej τ_ω :

$$\tau_{xc}(x, c, n) = \tau_\omega(x, c) + \tau_v(x, n),$$

gdzie τ_ω oznacza naprężenie średnie, stałe na grubości ścianki, a τ_v jest liniową jednorodną funkcją współrzędnej n ($-g(c)/2 \leq n \leq g(c)/2$):

$$\tau_v = \tau_v(x, n) = -n \frac{2\mathfrak{M}_v(x)}{J_s(x)},$$

gdzie \mathfrak{M}_v jest momentem odpowiadającym skręcaniu swobodnemu (tzw. moment *de Saint-Venanta*), a J_s jest momentem bezwładności na skręcanie. Dodajmy, że moment skręcający \mathfrak{M}_v pochodzący od od naprężeń τ_v , jest równy tylko połowie momentu skręcania swobodnego:

$$\mathfrak{M}_v = -2 \int_A \tau_v n dA.$$

Znak minus wynika stąd, że przyjęty wcześniej dodatni zwrot naprężeń τ_v daje moment lewoskrętny.

Wzór na naprężenia τ_ω zbudowano na podstawie równania równowagi rzutów sił na oś x , wzoru na naprężenia normalne oraz zależności różniczkowych pomiędzy momentami zginającymi a siłami poprzecznymi. Ostateczna postać tego wzoru jest następująca:

$$\tau_\omega(x, c) = \tilde{\tau}_\omega(x, c) - \frac{Q_y(x)S_z(c)}{J_z g(c)} - \frac{Q_z(x)S_y(c)}{J_y g(c)} + \frac{\mathfrak{M}_{\tau_\omega}(x)S_\omega(c)}{J_\omega g(c)},$$

gdzie $\tilde{\tau}_\omega(x, c)$ jest naprężeniem stycznym pochodzącym od dość rzadko występujących obciążeń równoległych do osi x , a $\mathfrak{M}_{\tau_\omega}(x)$ ma sens momentu skręcającego. Znaczenie pozostałych symboli jest analogiczne do wzoru na obliczanie naprężeń stycznych podczas zginania; momenty statyczne dotyczą pola odciętego bieżącą współrzędną c . Znaki minus w członach pochodzących od sił poprzecznych wynikają z odmiennej umowy znaków. Moment $\mathfrak{M}_{\tau_\omega}(x)$ oblicza się z zależności:

$$\mathfrak{M}(\tau_\omega) = -B'(x) + Q_z y_S - Q_y z_S.$$

Jeśli moment skręcający obliczymy nie względem środka ciężkości przekroju, lecz względem bieguna głównego S , to momenty pochodzące od sił poprzecznych są równe zero. Obliczony w ten sposób moment skręcający (tzw. *moment giętno-skrętny*) oznaczamy przez \mathfrak{M}_ω . Całkowity moment skręcający obli-

czony względem bieguna głównego \mathfrak{M}_S jest zatem sumą momentu pochodzącego od skręcania swobodnego \mathfrak{M}_v i skręcania skrepowanego \mathfrak{M}_ω :

$$\mathfrak{M}_S = \mathfrak{M}_v + \mathfrak{M}_\omega, \quad \text{przy czym} \quad \mathfrak{M}_\omega = -B'(x).$$

Znak minus we wzorze wynika z przyjętej umowy znaków.

• *Równania różniczkowe funkcji bimomentu i kąta skręcenia. Warunki brzegowe*

$$B''(x) - \vartheta^2 \cdot B(x) = m_S(x),$$

$$\psi^{IV}(x) - \vartheta^2 \cdot \psi''(x) = \frac{m_S(x)}{E_1 J_\omega}, \quad \text{gdzie} \quad \vartheta^2 = \frac{G J_s}{E_1 J_\omega}.$$

Symbol m_S oznacza rozłożone w sposób ciągły obciążenie momentem skręcającym. Pierwsze z równań stosujemy wówczas, gdy dane są statyczne warunki brzegowe, drugie - przy kinematycznych warunkach brzegowych.

Najczęściej spotykane warunki podparcia prętów cienkościennych używane w równaniu IV rzędu na kąt skręcenia ψ są następujące:

a) podparcie widelkowe:

$$\psi = 0, B = 0 \rightarrow \psi'' = 0,$$

b) sztywne zamocowanie uniemożliwiające deplanację:

$$\psi = 0, u_x = 0 \rightarrow \psi' = 0,$$

c) koniec swobodny, wolny od naprężeń:

$$B = 0 \rightarrow \psi'' = 0, \quad \mathfrak{M}_S = 0 \rightarrow -E_1 J_\omega \cdot \psi''' + G J_s \cdot \psi' = 0 \quad \text{lub} \quad \psi''' - \vartheta^2 \cdot \psi' = 0.$$

Statyczne warunki brzegowe występują w tych nielicznych przypadkach, gdy znamy rozkład naprężeń normalnych na końcu pręta. Jeżeli w punkcie M przekroju początkowego ($x = 0$) jest przyłożona siła skupiona P równoległa do osi x , to wartość brzegowa bimomentu stosownie do jego definicji:

$$B(0) = \int_A \sigma_x(0) \omega dA = P \int_A \delta(c - c_M) \omega dA = P \cdot \omega_M,$$

gdzie przez $\delta(c - c_M)$ oznaczono deltę *Diraca*, a przez ω_M współrzędną wycinkową punktu M .

• *Zależności energetyczne*

$$\int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \int_s (N\lambda + M_y k_y + M_z k_z + B k_\omega + \mathfrak{M}_v \theta) ds.$$

Wzór ten obowiązuje dla dowolnego materiału, jeśli są spełnione założenia kinematyczne teorii *Własowa*. Dlatego znikają składniki zawierające siły poprzeczne i moment giętno-skrętny. Dla materiału liniowo-sprężystego otrzymujemy:

$$U = \frac{1}{2} \int_s \left(\frac{N^2}{E_1 A} + \frac{M_y^2}{E_1 J_y} + \frac{M_z^2}{E_1 J_z} + \frac{B^2}{E_1 J_\omega} + \frac{\mathfrak{M}_v^2}{G J_s} \right) ds,$$

$$\text{albo} \quad U = \frac{1}{2} \int_s (E_1 A \lambda^2 + E_1 J_y k_y^2 + E_1 J_z k_z^2 + E_1 J_\omega k_\omega^2 + G J_s \theta^2) ds.$$

Pręty silnie zakrzywione

Prętem silnie zakrzywionym nazywamy pręt, którego pierwotny promień krzywizny jest dostatecznie mały. Miara zakrzywienia jest stosunek h/r , gdzie h oznacza wymiar poprzeczny pręta (wysokość), a r początkowy promień krzywizny pręta nieodkształconego. Rozkład odkształceń w obrębie przekroju pręta silnie zakrzywionego odbiega w istotny sposób od rozkładu liniowego przyjmowanego w prętach prostoliniowych i słabo zakrzywionych.

• Kinematyka

Przyjmujemy, że oś pręta jest krzywą płaską, przekrój pręta jest stały, a płaszczyzna wyznaczona przez oś pręta pokrywa się z płaszczyzną symetrii przekroju pręta i płaszczyzną obciążenia poprzecznego.

Z zasady płaskich przekrojów wynika, że rozkład odkształceń liniowych $\varepsilon_s(z)$ na wysokości przekroju jest nieliniowy (hiperboliczny):

$$\varepsilon_s(z) = \lambda + k \cdot \frac{r \cdot z}{r + z}, \text{ gdzie } k = \frac{1}{r_a} - \frac{1}{r} = \frac{r \eta - \lambda}{r}, \quad \eta = \frac{\Delta d \varphi}{ds}.$$

W powyższych wzorach λ jest odkształceniem liniowym osi przekroju, k – zmianą krzywizny, r – pierwotnym promieniem krzywizny osi pręta, r_a – promieniem krzywizny odkształconej osi pręta, φ – krzywoliniową współrzędną kątową punktów osi pręta, ds – elementem długości osi pręta przed odkształceniem, η – przyrostem kąta obrotu przekroju, z – odległością danego punktu od osi pręta w płaszczyźnie przekroju.

• Naprężenia

Zakładamy, że materiał pręta jest liniowo-sprężysty. Naprężenia normalne $\sigma_s(z)$, odpowiadające odkształceniu $\varepsilon_s(z)$, oblicza się z zależności:

$$\sigma_s(z) = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{rA} + \frac{M_y}{J_y^*} \frac{r z}{r + z}, \quad \text{gdzie } J_y^* = r \int_A \frac{z^2}{r + z} dA.$$

Symbolem J_y^* oznaczono pewien zastępczy moment bezwładności przekroju pręta silnie zakrzywionego.

Trzeba dodać, że hiperboliczny rozkład naprężeń $\sigma_s(z)$ daje wyniki tylko nieznacznie różniące się od wartości ścisłych, uzyskanych na gruncie teorii sprężystości.

Dla naprężeń stycznych τ_{sz} i τ_{sy} przyjmujemy, że wystarczająco dokładne są znane wzory dla pręta o osi prostoliniowej.

W prętach silnie zakrzywionych występują dosyć znaczne promieniowe naprężenia normalne σ_z . Dla $r/h = 1$ naprężenie σ_z może sięgać nawet 20% wartości naprężeń σ_s .

• Zależności fizyczne

Zmianę krzywizny i wydłużenie osi pręta wyrażają wzory:

$$k = \frac{M_y}{EJ_y^*}, \quad \lambda = \frac{N}{EA} + \frac{M_y}{r EA},$$

Z zależności tych widać, że podczas czystego zginania ($M = \text{const}$, $N = 0$) oprócz zmiany krzywizny k występuje również wydłużenie osi pręta λ . Oznacza to, że towarzyszy temu przesunięcie osi obojętnej w kierunku środka krzywizny pręta oraz pojawienie się naprężeń normalnych w środku ciężkości. Zjawiska te są charakterystyczne dla prętów silnie zakrzywionych.

• **Zależności energetyczne**

Całkową postać iloczynu naprężeń σ_{ij} i odkształceń ε_{ij} po pominięciu naprężeń σ_z można zapisać następująco:

$$\int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \int_s (N\lambda + M\eta + Q\beta) ds.$$

Zależność ta jest słuszna dla dowolnego materiału.

W przypadku pręta liniowo-sprężystego możemy zbudować funkcje energii sprężystej właściwej $W_\sigma(N, M)$ i $W_\varepsilon(\lambda, \eta)$ wykazujące własności potencjału. Funkcje te przybierają postać:

$$W_\sigma(N, M, Q) = \frac{N^2}{2EA} + \frac{NM}{EA r} + \frac{M^2}{2EA r^2} + \frac{M^2}{2EJ^*} + \frac{Q^2}{2(GA/k)},$$

$$W_\varepsilon(\lambda, \eta, \beta) = \frac{1}{2} EA \lambda^2 + \frac{1}{2} EJ^* \left(\eta - \frac{\lambda}{r} \right)^2 + \frac{1}{2} (GA/k) \beta^2.$$

Łatwo sprawdzić, że

$$\frac{\partial W_\sigma}{\partial N} = \lambda, \quad \frac{\partial W_\sigma}{\partial M} = \eta, \quad \frac{\partial W_\sigma}{\partial Q} = \beta \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial W_\varepsilon}{\partial \lambda} = N, \quad \frac{\partial W_\varepsilon}{\partial \eta} = M, \quad \frac{\partial W_\varepsilon}{\partial \beta} = Q.$$

Obie funkcje energii W_σ i W_ε są zawsze dodatnie. Rolę uogólnionych naprężeń odgrywają tu siły wewnętrzne N i M , a rolę uogólnionych odkształceń wielkości kinematyczne λ i η .