

20.



O PROJEKTOWANIU KONSTRUKCJI

20.1. WIADOMOŚCI OGÓLNE

Każda poprawnie zaprojektowana konstrukcja powinna spełniać dwa zasadnicze wymagania:

- a) bezpieczeństwa,
- b) ekonomiczności.

Termin „bezpieczeństwo” jest rozumiany dosyć szeroko. Chodzi głównie o to, by konstrukcja spełniała dwa warunki: **wytrzymałości** i **sztwności**. Dochodzą do tego jeszcze inne wymagania związane ze specyfiką materiałów użytych do wykonania konstrukcji i warunkami eksploatacji (np. w konstrukcjach żelbetowych: rysoodporność, szerokość rozwarcia rys). Dobra konstrukcja musi także **sygnalizować przeciążenie** poprzez wyraźne ugięcia, rysy, osiadania itp. Najniebezpieczniejsze są bowiem sytuacje, w których zniszczenie konstrukcji występuje w sposób nagły, uniemożliwiający ewakuację ludzi i sprzętu.

Względy ekonomiczne wymagają, by koszty wykonania i eksploatacji konstrukcji były możliwie niskie. Koszt wykonania konstrukcji jest zazwyczaj proporcjonalny do jej wagi (masy). Dlatego konstrukcja powinna być jak najlżejsza. Problem ten szczególnie ostro występuje w konstrukcjach lotniczych, w których i koszt eksploatacji jest proporcjonalny do masy obiektu. Miarą kosztu może być również energia zużyta na wyprodukowanie materiałów, transport, wykonanie i eksploatację konstrukcji.

Poza wymaganiami bezpieczeństwa i ekonomiczności bardzo często wprowadza się jeszcze inne **dotkliwe ograniczenia**. Szeroką klasę ograniczeń stanowią tzw. więzy geometryczne, nałożone na gabaryty konstrukcji (maksymalna wyniosłość łuku), wymiary elementów (maksymalne i minimalne grubości płyt, wysokości belek itp.) lub np. usytuowanie krawędzi fundamentów względem konstrukcji nadziemnej. Więzy geometryczne wynikają zazwyczaj ze względów użytkowych lub technologicznych. Dodatkowymi więzami mogą być więzy materiałowe i asortymentowe.

Wymienione wyżej wymagania bezpieczeństwa, ekonomii i dodatkowe ograniczenia oraz wymagania użytkowe decydują o wyborze koncepcji konstrukcyjnej projektowanego obiektu. Spełnieniu wymagań bezpieczeństwa towarzyszy dążenie do powiększania wymiarów i ciężaru elementów. Względy ekonomiczne z kolei wymuszają tendencje do obniżenia ciężaru konstrukcji. Ostateczny projekt jest więc pewnym rozwiązaniem kompromisowym.

Specjalne miejsce w omawianej tematyce zajmuje **optymalizacja** projektowania. Każdy projekt spełniający wymagania bezpieczeństwa i ograniczenia dodatkowe nosi nazwę **projektu dopuszczalnego**. Problem optymalizacji polega zazwyczaj na znalezieniu w zbiorze projektów dopuszczalnych rozwiązania o najmniejszym koszcie. Zadania optymalizacji są bardzo złożone. W dalszym ciągu ograniczymy się jedynie do omówienia problemów bezpieczeństwa konstrukcji.

20.2. WARUNKI WYTRZYMAŁOŚCIOWE

20.2.1. Definicje ograniczeń

Wszelkie warunki wytrzymałościowe polegają na ograniczeniu wielkości statycznych: naprężeń, sił wewnętrznych lub obciążeń.

Ograniczenie naprężeń σ_{ij} dotyczy każdego **punktu** materialnego konstrukcji i odpowiada spełnieniu nierówności:

$$F_1(\sigma_{ij}, \rho_k) \leq 0, \quad (i, j = 1, 2, 3; k = 1, 2, \dots). \quad (20.1)$$

Równanie $F_1 = 0$ określa pewną zamkniętą powierzchnię w przestrzeni naprężeń (np. powierzchnię plastyczności), a ρ_k oznacza parametry opisujące wytrzymałość materiału (np. granicę plastyczności, wytrzymałość doraźną). Bezpieczne stany naprężeń odpowiadają punktom leżącym wewnątrz obszaru ograniczonego powierzchnią $F_1 = 0$.

Ograniczenie sił wewnętrznych Y_t dotyczy z kolei każdego **przekroju** konstrukcji i odpowiada spełnieniu nierówności:

$$F_2(Y_t, r_k) \leq 0, \quad (t = 1, 2, \dots, 6; \quad k = 1, 2, \dots). \quad (20.2)$$

Podobnie jak poprzednio, równanie $F_2 = 0$ opisuje zamkniętą powierzchnię, ale w przestrzeni sił wewnętrznych, a r_k oznaczają parametry nośności przekroju (np. moment plastyczny, moment sprężysty). Bezpieczne wartości sił wewnętrznych odpowiadają punktom leżącym wewnątrz obszaru ograniczonego powierzchnią $F_2 = 0$.

Ograniczenie obciążeń P_m ma charakter globalny i dotyczy **całej konstrukcji**:

$$F_3(P_m, R_k) \leq 0, \quad (m = 1, 2, \dots; \quad k = 1, 2, \dots). \quad (20.3)$$

Równanie $F_3 = 0$ opisuje pewną powierzchnię graniczną w przestrzeni obciążeń, a R_k oznacza parametry nośności całej konstrukcji. Bezpieczne wartości obciążeń odpowiadają punktom leżącym wewnątrz obszaru ograniczonego powierzchnią $F_3 = 0$.

Konkretne postacie funkcji $F_1(\sigma_{ij}, \sigma_k)$, $F_2(Y_t, r_k)$ lub $F_3(P_m, R_k)$ zależą od przyjętej metody projektowania konstrukcji. Metody te omówimy pokrótce w p. 20.5.

Spełnienie warunków wytrzymałościowych polega na obraniu takich wymiarów i schematów konstrukcji oraz parametrów wytrzymałościowych materiałów, by były spełnione wymagania typu (20.1), (20.2) lub (20.3).

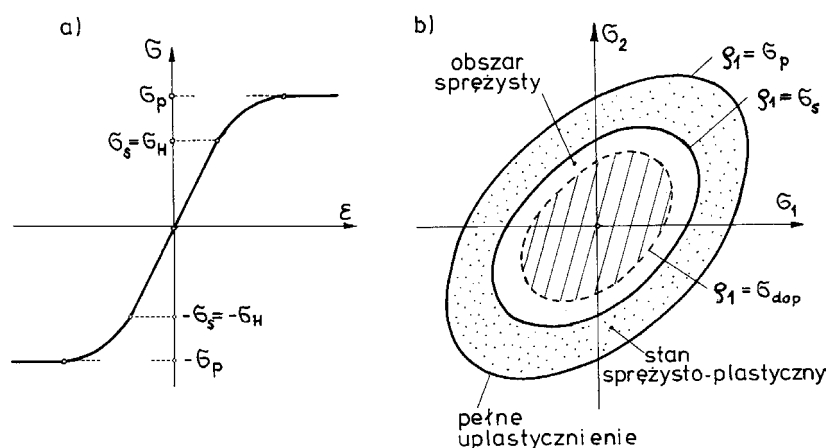
20.2.2. Ograniczenie naprężeń w punkcie

Sens lokalnego warunku naprężeniowego (20.1) objaśniono w rozdziale 7. przy omawianiu hipotez wytrzymałościowych. Rezultaty zawartych tam rozważań wykorzystamy do analizy warunku wytrzymałościowego odnoszącego się do materiału sprężysto-plastycznego o charakterystyce podanej na rys. 20.1a i odpowiadającego warunkowi plastyczności Hubera-Misesa-Hencky'ego.

Dla uproszczenia uwagi przyjmijmy, że w konstrukcji występuje płaski stan naprężenia. Zależność graniczną w tym przypadku można zapisać następująco:

$$F_1 = F_1(\sigma_{ij}, \rho_1) = \sigma_1^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2^2 - \rho_1^2 = 0, \quad (20.4)$$

gdzie σ_1 i σ_2 oznaczają nieuporządkowane naprężenia główne ($\sigma_3 = 0$), a ρ_1 jest parametrem wytrzymałościowym materiału i oznacza pewną wartość naprężenia, którą uznaje się za niebezpieczną (nieprzekraczalną). Dla $\rho_1 = \sigma_P$ otrzymujemy elipsę odpowiadającą pełnemu uplastycznieniu materiału; dla $\rho_1 = \sigma_S$ otrzymujemy elipsę ograniczającą obszar sprężysty (por. rys. 20.1b). Parametr ρ_1 ma zatem sens granicznego naprężenia zredukowanego (zastępczego).



Rys. 20.1

Decydując się na przyjęcie wartości ρ_1 z przedziału $\langle \sigma_S, \sigma_P \rangle$ trzeba przeprowadzić analizę przystosowania się konstrukcji do założonego programu obciążenia zmiennego. W obszarze sprężystym problem ten nie występuje. Dlatego tradycyjne metody projektowania (np. metoda naprężeń dopuszczalnych), w których posługujemy się tylko warunkiem lokalnym typu (20.1), wymagają, by w każdym punkcie konstrukcji występowały tylko sprężyste stany naprężenia^{*)}. W metodzie naprężeń dopuszczalnych jako wartość nieprzekraczalną przyjmuje się naprężenie dopuszczalne σ_{dop} , mniejsze od granicy sprężystości σ_S . Naprężenie to definiuje się następująco:

$$\rho_1 = \sigma_{dop} = \frac{\sigma_P}{n_0}, \quad n_0 > 1, \quad (20.5)$$

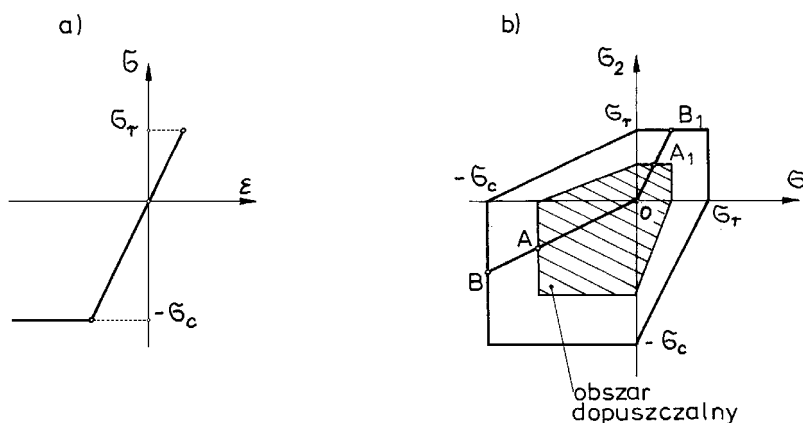
gdzie n_0 jest wymagany współczynnikiem bezpieczeństwa (pewności). W omawianej metodzie współczynnik ten musi być większy od stosunku σ_P/σ_S , gdyż w przeciwnym razie obszar dopuszczalny obejmowałby również stany sprężysto-plastyczne. Wobec tego

$$n_0 > \sigma_P / \sigma_S. \quad (20.6)$$

Dla orientacji podamy, że w przypadku miękkiej stali budowlanej $\sigma_S \approx 0,8\sigma_P$, skąd $n_0 > 1,25$. Obszar dopuszczalny (20.1) opisuje wówczas nierówność (por. rys. 20.1b – linia przerywana):

$$F_1 = \sigma_1^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2^2 - \sigma_{dop}^2 \leq 0.$$

Warunek *Hubera-Misesa-Hencky'ego* stosuje się do materiałów ciągliwych, które sygnalizują przeciążenie pojawieniem się trwałych odkształceń. Materiały kruche nie wykazują tej własności przy rozciąganiu (rys. 20.2a). Dlatego też w obszarze



Rys. 20.2

naprężeń rozciągających jest uzasadnione przyjmowanie większej wymaganej wartości współczynnika pewności $n_0^{(r)}$ od wartości wymaganej w obszarze ściskania $n_0^{(c)}$. Ilustruje to rysunek 20.2b, na którym

$$n_0^{(r)} = \frac{OB_1}{OA_1} > n_0^{(c)} = \frac{OB}{OA},$$

a obszar dopuszczalny odpowiadający nierówności (20.1) został zakreskowany.

20.2.3. Ograniczenie sił wewnętrznych na poziomie przekroju

Rozważmy działanie siły normalnej i momentu zginającego na prostokątny przekrój pręta wykonanego z materiału sprężysto-plastycznego (rys. 20.3). Nośność sprężystą przekroju określają dwa parametry wytrzymałościowe: siła normalna N_S i moment zginający M_S , opisane wzorami:

^{*)} Wyjątek stanowią tu uplastycznienia występujące na bardzo małym obszarze (np. przy docisku lub nagłej zmianie przekroju).

$$r_1 = N_S = \sigma_S \cdot A, \quad r_2 = M_S = \sigma_S \cdot W^{(S)}, \quad (20.7)$$

gdzie σ_S oznacza granicę sprężystości równą granicy proporcjonalności σ_H , a $A = bh$ oraz $W^{(S)} = bh^2/6$ oznaczają odpowiednio pole i „sprężysty” wskaźnik wytrzymałości przekroju. Ze wzoru na naprężenia ekstremalne przy mimośrodowym działaniu siły normalnej na przekrój pręta liniowo-sprężystego otrzymujemy nierówność wyznaczającą obszar sprężysty:

$$\frac{|N|}{A} + \frac{|M|}{W^{(S)}} \leq \sigma_S,$$

skąd

$$F_2(N, M; N_S, M_S) = \frac{|N|}{N_S} + \frac{|M|}{M_S} - 1 \leq 0. \quad (20.8)$$

Górną ocenę nośności plastycznej określają parametry wytrzymałościowe: siła normalna N_P i moment zginający M_P , wyrażone zależnościami:

$$r_1 = N_P = A \cdot \sigma_P, \quad r_2 = M_P = \sigma_P \cdot W^{(P)}, \quad (20.9)$$

gdzie $W^{(P)} = bh^2/4$ i oznacza „plastyczny” wskaźnik wytrzymałości. Odpowiednia zależność graniczna ma w tym przypadku postać (por. wzór (18.30)):

$$F_2(N, M; N_P, M_P) = \frac{|M|}{M_P} + \left(\frac{N}{N_P} \right)^2 - 1 = 0. \quad (20.10)$$

Obszar sprężysto-plastyczny jest określony nierównościami:

$$\begin{aligned} F_2(N, M; N_S, M_S) &> 0, \\ F_2(N, M; N_P, M_P) &< 0. \end{aligned} \quad (20.11)$$

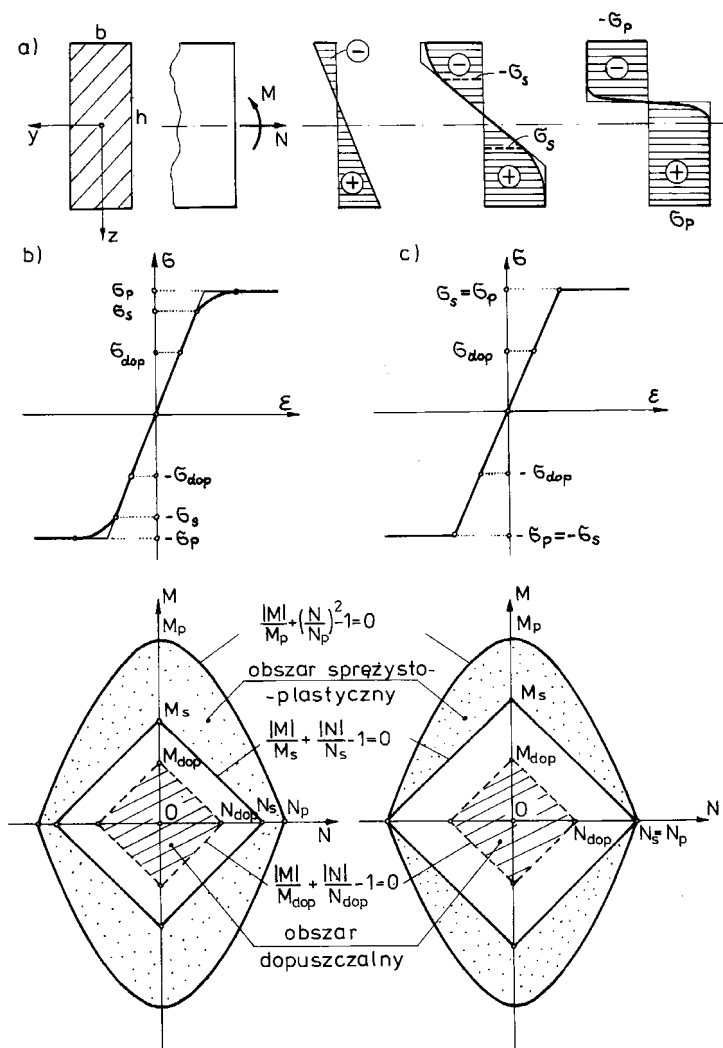
Przyjęcie koncepcji naprężenia dopuszczalnego pozwala wyznaczyć obszar dopuszczalny. Obszar ten, zawarty wewnątrz obszaru sprężystego, wyznaczają siła normalna N_{dop} i moment zginający M_{dop} :

$$\begin{aligned} r_1 = N_{\text{dop}} &= \sigma_{\text{dop}} \cdot A = \frac{\sigma_P}{n_0} \cdot A = \frac{N_P}{n_0}, \\ r_2 = M_{\text{dop}} &= \sigma_{\text{dop}} \cdot W^{(S)} = \frac{\sigma_P}{n_0} \cdot W^{(S)} = \frac{M_P W^{(S)}}{n_0 W^{(P)}}, \end{aligned} \quad (20.12)$$

przy czym

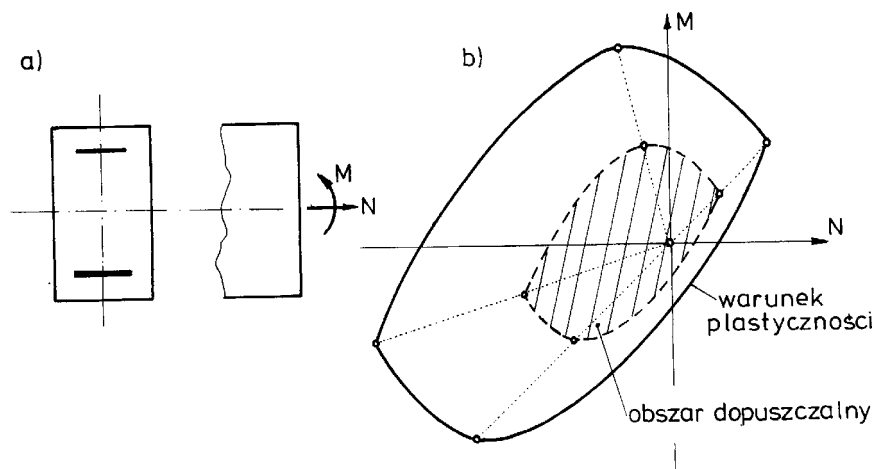
$$F_2(N, M; N_{\text{dop}}, M_{\text{dop}}) = \frac{|M|}{M_{\text{dop}}} + \frac{|N|}{N_{\text{dop}}} - 1 \leq 0. \quad (20.13)$$

Z zależności (20.12) i (20.13) wynika, że współczynnik pewności odniesiony do nośności plastycznej przekroju zmienia się w zależności od mimośrodu $z_N = M / N$. Najmniejsza wartość tego współczynnika odpowiada prostej $M = 0$ i wynosi n_0 , natomiast największa występuje dla $N = 0$ i wynosi $n_0 \cdot (W^{(P)} / W^{(S)})$.



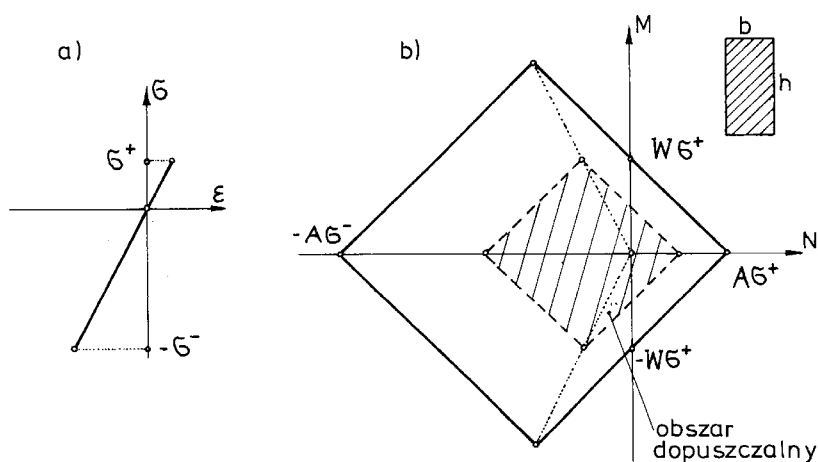
Rys. 20.3

W odniesieniu do materiałów zbrojonych poprzestajemy zazwyczaj tylko na warunku plastyczności, a krzywa graniczna przyjęta do projektowania jest zmniejszona proporcjonalnie do współczynnika pewności, zmieniającego się w zależności od znaków naprężeń (rys. 20.4b). Parametry wytrzymałościowe, określające kształt krzywej granicznej, zależą tu od intensywności zbrojenia oraz od stosunku granicy plastyczności zbrojenia i materiału rodzimego.



Rys. 20.4

Rysoodporność konstrukcji betonowych przeprowadza się na ogół przy założeniu, że materiał jest kruchy. Otrzymuje się wówczas odcinkowo-liniowe warunki graniczne (por. rys. 20.5).



Rys. 20.5

20.2.4. Ograniczenie obciążeń konstrukcji

Koncepcja obszaru dopuszczalnego w przestrzeni obciążeń pozwala uwzględnić nie tylko efekty lokalne i globalne, takie jak np. stateczność, nośność graniczną lub przystosowanie konstrukcji. Przykłady obszarów dopuszczalnych przy utracie stateczności w wyniku obciążeń złożonych omówiono w rozdziale 19.

Zasadnicze znaczenie w przedstawianej tematyce mają obszary czysto sprężystej reakcji konstrukcji oraz obszary nośności granicznej. Zagadnienia te zilustrujemy dwoma przykładami.

Rozważmy najpierw ramę portalową przedstawioną na rys. 20.6a. Jej obciążenie stanowią dwie siły: pozioma P_x i pionowa P_y . Załóżmy, że pręty ramy są wykonane z materiału sprężysto-idealnie plastycznego (rys. 20.5b), a przekroje prętów są idealnymi dwuteownikami. Oznacza to, że moment plastyczny M_P jest równy momentowi sprężystemu M_S . Dla uproszczenia przyjmijmy dalej, że pręty ramy są pryzmatyczne, a przekroje słupów i ryglu są takie same.

Przy wyznaczaniu obszaru sprężystego pominiemy wpływ sił normalnych na wartości naprężeń. Wobec tego osiągnięcie w jakimkolwiek przekroju ramy momentu zginającego równego $\pm M_S$ odpowiada punktom brzegowym obszaru sprężystego. Ekstremalne momenty zginające występują w czterech przekrojach krytycznych oznaczonych na rys. 20.6a liczbami 1, 2, 3 i 4. Do wyznaczenia obszaru sprężystej reakcji konstrukcji wystarczy zatem badanie wartości momentów zginających tylko w przekrojach krytycznych. Skorzystamy z rezultatów zadania zamieszczonego w p. 17.1. Otrzymujemy ($h = l$, $J_s = J_r$):

$$M_1 = -0,5063P_x l + 0,0380P_y l,$$

$$M_2 = 0,2785P_x l - 0,1709P_y l,$$

$$M_3 = 0,0316P_x l + 0,3101P_y l,$$

$$M_4 = -0,2150P_x l - 0,2090P_y l.$$

Obszar sprężysty wyznaczają warunki $|M_i| \leq M_S$ ($i = 1, 2, 3, 4$), co po rozpisaniu prowadzi do czterech nierówności jednoczesnych:

$$1) \quad -1 \leq -0,5063p_x + 0,0380p_y \leq 1,$$

$$2) \quad -1 \leq 0,2785p_x - 0,1709p_y \leq 1,$$

$$3) \quad -1 \leq 0,0316p_x + 0,3101p_y \leq 1,$$

$$4) \quad -1 \leq -0,2150p_x - 0,2090p_y \leq 1,$$

gdzie $p_x = P_x l / M_S$, $p_y = P_y l / M_S$. W rezultacie otrzymujemy ośmiobok zaznaczony na rysunku 20.6f linią ciągłą.

Obszar nośności granicznej wyznaczamy na podstawie analizy mechanizmów zniszczenia ramy, po pominięciu wpływu sił normalnych na uplastycznienie. Liczba przekrojów krytycznych wskazuje, że układ ma dwa stopnie swobody. Jako niezależne mechanizmy podstawowe przyjęto mechanizm belkowy I (rys. 20.6c) i mechanizm przechyłu II (rys. 20.6d). Do analizy trzeba przyjąć również mechanizm kombinowany III, przedstawiony na rys. 20.6e (por. zadanie zamieszczone w p. 18.3.7). Dla wymienionych mechanizmów otrzymujemy następujące równania pracy wirtualnej:

$$\text{I: } |P_y| \cdot l \dot{\phi} = 4 M_P \cdot \dot{\phi},$$

$$\text{II: } |P_x| \cdot h \dot{\phi} = 3 M_P \cdot \dot{\phi},$$

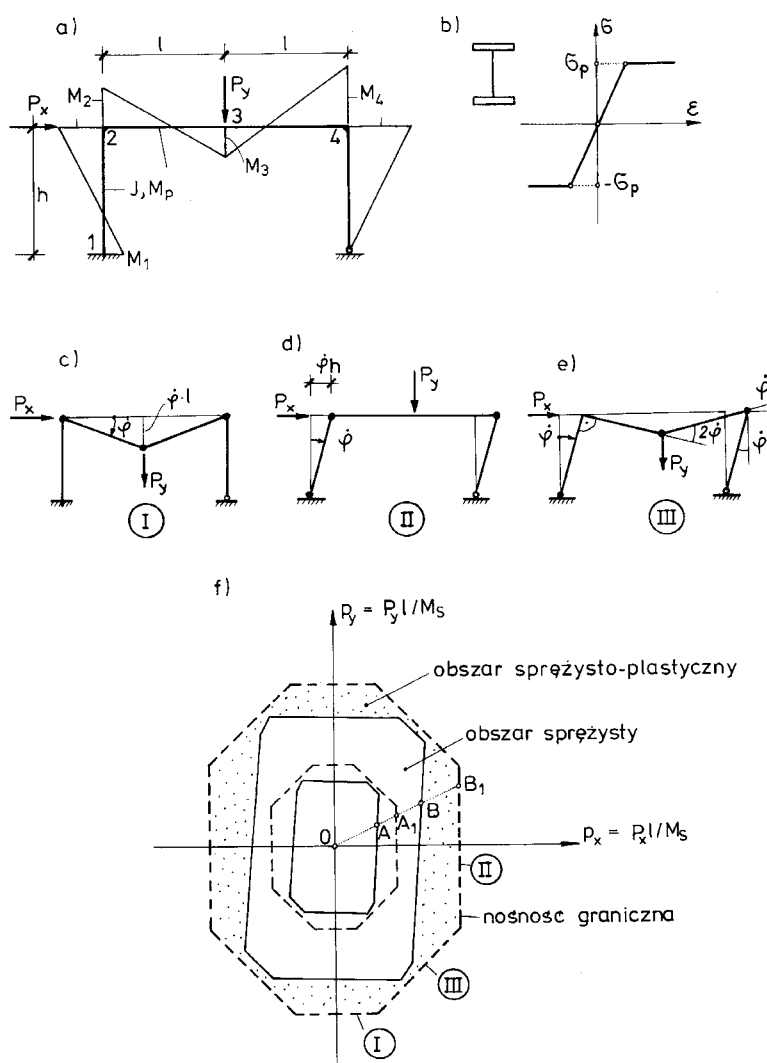
$$\text{III: } |P_x| \cdot h \dot{\phi} + |P_y| \cdot l \dot{\phi} = 5 M_P \cdot \dot{\phi},$$

skąd po uwzględnieniu, że $h = l$ i $M_P = M_S$, wynikają równania brzegu obszaru nośności granicznej:

$$|p_y| = 4$$

$$|p_x| = 3,$$

$$|p_x| + |p_y| = 5.$$

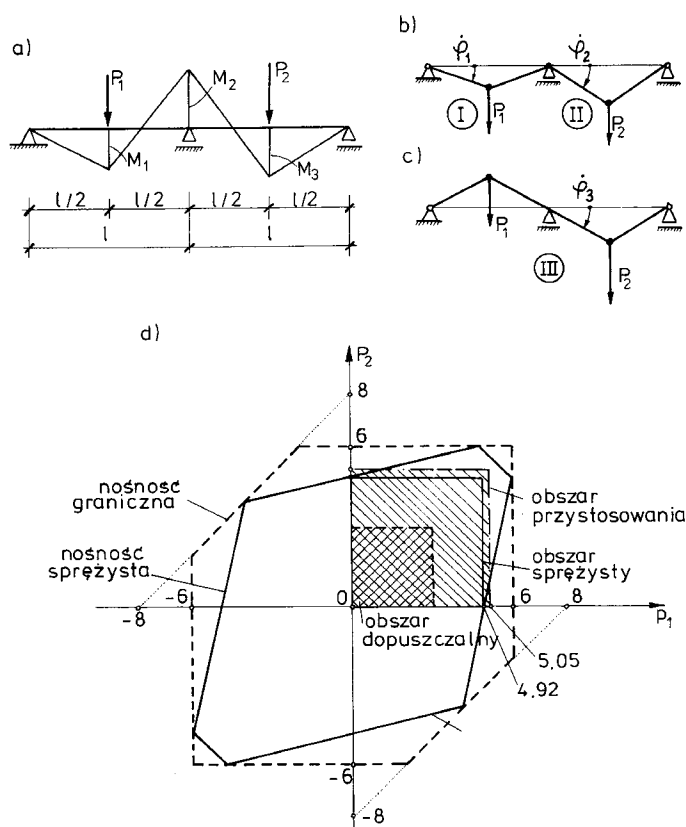


Rys. 20.6

Obszar nośności granicznej jest ograniczony przez osiem prostych (linie przerywane na rys. 20.6f) i w przeciwieństwie do obszaru sprężystego jest symetryczny względem osi układu obciążeń p_x i p_y .

Stany sprężysto-plastyczne odpowiadają obszarowi zakropkowanemu, zawartemu pomiędzy obszarem nośności granicznej a obszarem nośności sprężystej. Występowanie obszaru sprężysto-plastycznego gwarantuje, że przeciążenie konstrukcji będzie sygnalizowane widocznymi odkształceniami trwałymi.

Obszar obciążeń eksploatacyjnych powinien być wyraźnie mniejszy od obszaru nośności granicznej i zawierać się w obszarze dopuszczalnym. Jeżeli obszar dopuszczalny wyznaczamy na podstawie koncepcji naprężenia dopuszczalnego, to kształt tego obszaru jest podobny do obszaru sprężystego. Wówczas łatwo zauważyć, że współczynnik bezpieczeństwa mierzony stosunkiem OC/OA zmienia się w zależności od drogi obciążenia. Jeżeli analizę wytrzymałościową odnosimy wyłącznie do stanu nośności granicznej, to obszar dopuszczalny będzie figurą podobną do obszaru nośności granicznej. Współczynnik bezpieczeństwa mierzony stosunkiem OC/OA_1 jest teraz stały, jednak „odległość” brzegu obszaru dopuszczalnego od brzegu obszaru sprężystego zmienia się w zależności od drogi obciążenia. Warto jednak zwrócić uwagę, że mogą teraz wystąpić sytuacje, w których obszar dopuszczalny obejmuje również stany sprężysto-plastyczne. Jeżeli tak się zdarzy, to trzeba zbadać, czy konstrukcja przystosuje się do danego programu obciążenia.



Rys. 20.7

Problem przystosowania objaśnimy na przykładzie pryzmatycznej belki ciągłej rozważanej już w p. 18.4.3 i przedstawionej na rysunku 20.7a. Wartości momentów w przekrojach krytycznych dla stanu sprężystego wynoszą:

$$M_1 = \frac{13}{64} P_1 l - \frac{3}{64} P_2 l,$$

$$M_2 = -\frac{6}{64} P_1 l - \frac{6}{64} P_2 l,$$

$$M_3 = -\frac{3}{64} P_1 l + \frac{13}{64} P_2 l.$$

Wobec tego obszar nośności sprężystej opisują nierówności:

$$\begin{aligned}
 -1 &\leq \frac{13}{64} p_1 - \frac{3}{64} p_2 \leq 1, \\
 -1 &\leq -\frac{6}{64} p_1 - \frac{6}{64} p_2 \leq 1, \\
 -1 &\leq -\frac{3}{64} p_1 + \frac{13}{64} p_2 \leq 1,
 \end{aligned}$$

gdzie $p_1 = P_1/l/M_S$, $p_2 = P_2/l/M_S$.

Obszar nośności granicznej otrzymujemy z równań pracy wirtualnej dla mechanizmów podanych na rys. 20.7b, c:

$$\begin{aligned}
 |P_1| \cdot \frac{l}{2} \dot{\phi}_1 &= 3 M_P \cdot \dot{\phi}_1, \\
 |P_2| \cdot \frac{l}{2} \dot{\phi}_2 &= 3 M_P \cdot \dot{\phi}_2, \\
 \mp P_1 \frac{1}{2} \cdot \dot{\phi}_3 \pm P_2 \frac{1}{2} \cdot \dot{\phi}_3 &= 4 M_P \cdot \dot{\phi}_3.
 \end{aligned}$$

Przyjawszy, że $M_P = M_S$ (idealny przekrój dwuteowy) otrzymujemy bezwymiarową postać równań brzegu obszaru nośności granicznej:

$$|p_1| = 6, \quad |p_2| = 6, \quad \mp p_1 \pm p_2 = 8.$$

Oba obszary ilustruje rys. 20.7d (nośność sprężysta = linia ciągła; nośność graniczna = linia przerywana).

Założymy obecnie, że obszar obciążeń eksploatacyjnych jest określony przez następujące nierówności:

$$\begin{aligned}
 0 &\leq P_1 \leq P, \\
 0 &\leq P_2 \leq P.
 \end{aligned}$$

Chodzi o to, by wyznaczyć największą wartość obciążenia P .

Z analizy sprężystej wynika, że jeśli $M_S = M_P$, to $P_{\max} = 4,92 M_P/l$. Analiza plastyczna prowadzi do wartości $P_{\max} = 5,33 M_P/l$, przy czym nie mamy pewności, czy konstrukcja przystosuje się do danego obszaru zmienności obciążeń. Stosownie do rezultatu uzyskanego w p. 18.4.3 wiadomo, że konstrukcja przystosuje się,

jeśli $P_{\max} = 5,05 M_P/l$. Wartość tę można uważać za maksymalną nośność sprężystą pod warunkiem oszacowania ugięć.

Powyższa analiza wskazuje, że przyjęcie współczynnika bezpieczeństwa $n_0 > 5,33/5,05 = 1,055$ gwarantuje sprężystą pracę konstrukcji, jeżeli obciążenia zmieniają się stosownie do przyjętego obszaru obciążeń eksploatacyjnych.

20.3. WARUNKI SZTYWNOŚCIOWE

Sztywność konstrukcji charakteryzują wielkości kinematyczne pojawiające się na skutek czynników zewnętrznych (obciążeń).

Zapewnienie odpowiedniej sztywności konstrukcji polega przede wszystkim na ograniczeniu bezwzględnych wartości **przemieszczeń**, czyli na spełnieniu nierówności:

$$|u(x_1, x_2, x_3)| \leq u_n, \quad (20.14)$$

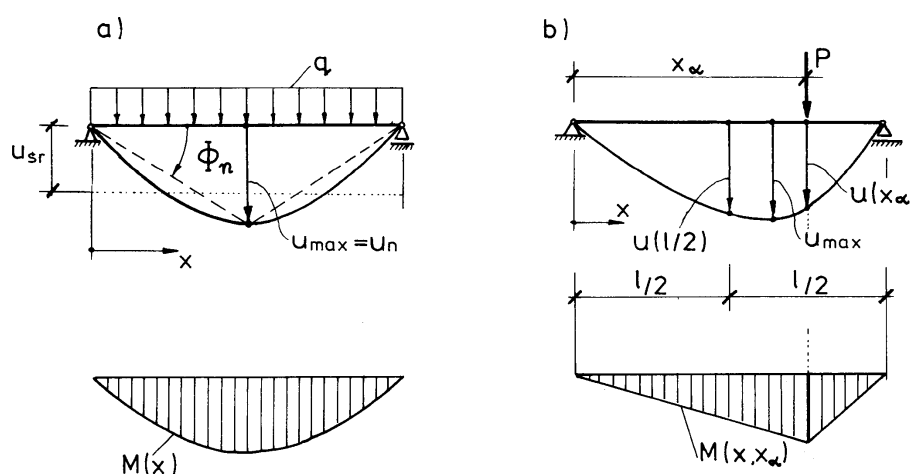
gdzie u_n oznacza pewną z góry ustaloną wartość nieprzekraczalną (dopuszczalną, graniczną).

W konstrukcjach wykazujących drgania oprócz spełnienia nierówności (20.14) wymaga się również ograniczenia bezwzględnych wartości **przyspieszeń**. W pewnych szczególnych przypadkach **krzywizny** elementów konstrukcji nośnej nie mogą przekraczać pewnych wartości granicznych. Sytuacja taka doty-

czy np. stropów tynkowanych, kiedy zależy nam na tym, by nie następowało pękanie tynku na skutek przekroczenia wytrzymałości na rozciąganie przy zginaniu.

Można zadać pytanie, dlaczego ograniczamy przemieszczenia, skoro nośność konstrukcji jest wystarczająca. Chodzi głównie o to, by były spełnione wymagania teorii geometrycznie liniowej, która jest podstawą większości przepisów projektowania konstrukcji. Poza tym bardzo istotne są czynniki estetyczne, psychologiczne i użytkowe. Duże przemieszczenia konstrukcji wpływają negatywnie na samopoczucie ludzi znajdujących się wewnątrz obiektu. Przy bardzo dużych rozpiętościach dźwigarów ograniczenie ugięć bywa konieczne ze względu na swobodne poruszanie się suwnic.

Warto zwrócić uwagę, że tendencje do spełnienia wymagań teorii liniowej oraz względy psychologiczne znajdują wyraz w sposobie ustalania wartości przemieszczeń dopuszczalnych, które określa się jako pewną część gabarytów konstrukcji. Na przykład, jeśli dopuszczalne ugięcie belki ustalamy jako pewną część jej rozpiętości: $u_n = l/200$ (por. rys. 20.8a), to w istocie rzeczy ograniczeniu nie podlega ugięcie belki, lecz kąt nachylenia cięciwy $\Phi_n = 1/100$ (por. rys. 20.8a). Subiektywna ocena deformacji polega bowiem na ocenie kąta nachylenia cięciwy linii ugięcia, a nie na bezwzględnej wartości ugięcia.



Rys. 20.8

Podczas analizy wartości ugięć trzeba pamiętać, że w przypadku obciążeń niesymetrycznych (por. rys. 20.8b) ugięcie w połowie rozpiętości nie odbiega wiele od ugięcia maksymalnego. Okoliczność ta bardzo ułatwia projektowanie, gdyż nie trzeba poszukiwać współrzędnych położenia punktu, w którym występują przemieszczenia ekstremalne. W praktyce przemieszczenia oblicza się tylko w pewnych z góry ustalonych punktach.

Warunek sztywności (20.14) ma charakter globalny, gdyż przemieszczenia każdego punktu zależą w istotny sposób od rozkładu sił wewnętrznych i wymiarów przekrojów w całej konstrukcji. W problemach optymalizacji jako miarę podatności konstrukcji przyjmuje się niekiedy całkowitą energię sprężystą, wyrażoną przez siły wewnętrzne. Dla belek przedstawionych na rys. 20.8a i b energie te, stosownie do twierdzenia *Clapeyrona*, przyjmują odpowiednio wartości:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M(x)^2}{EJ} dx = \frac{1}{2} \int_0^l q(x) \cdot u(x) dx = \frac{1}{2} q \int_0^l u(x) dx = \frac{1}{2} q l \cdot u_{sr},$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M(x, x_\alpha)^2}{EJ} \cdot dx = \frac{1}{2} P \cdot u(x_\alpha).$$

Widzimy zatem, że w obu przypadkach całkowita energia sprężysta jest proporcjonalna do ugięć belki. Istotną zaletą tej miary podatności jest fakt, że energia U jest zawsze nieujemna. Własność ta znacznie upraszcza rozwiązanie problemów optymalizacji. Opisaną koncepcję oceny sztywności konstrukcji wprowadził polski uczony *Wasiutyński* w 1939 roku.

Wymagania sztywnościowe spełniamy przez obranie odpowiednich wymiarów (przekrojów) elementów konstrukcji.

20. 4. WYMIAROWANIE

Termin „wymiarowanie” oznacza tę część procesu projektowania, w której wybieramy wymiary przekrojów i cechy mechaniczne materiałów konstrukcyjnych. Wymiarowanie jest z natury rzeczą procesem iteracyjnym, gdyż każda zmiana przekroju pociąga za sobą zmianę pola przemieszczeń i pola sił wewnętrznych. W układach statycznie wyznaczalnych zmiana sił wewnętrznych spowodowana przeprojektowaniem przekrojów jest związana wyłącznie ze zmianą ciężaru własnego konstrukcji. W układach statycznie niewyznaczalnych zmiana sił wewnętrznych występuje również w konstrukcjach nieważkich, rozkład tych sił zależy bowiem od proporcji sztywności przekrojów.

W praktyce projektowej postępujemy zazwyczaj w ten sposób, że najpierw wybieramy wymiary przekrojów konstrukcji ze względu na warunki wytrzymałościowe, a potem sprawdzamy warunki sztywnościowe. Sens tej procedury objaśnimy na przykładach.

Rozważmy przypadek najprostszy, w którym występuje tylko jeden rodzaj obciążenia zewnętrznego P i jedno ograniczenie przemieszczeniowe $|u|_{\max} \leq u_n$ (np. belka nieważka z rys. 20.8b, gdzie $u_{\max} \approx u(x_\alpha)$). Obciążenie i ugięcie belki muszą zawierać się w obrębie prostokąta w przestrzeni (P, u) o bokach P_n i u_n (por. rys. 20.9). Na podstawie warunku wytrzymałościowego obraliśmy takie wymiary przekroju poprzecznego, że $P < P_n^{(1)}$, przy czym $P_n^{(1)}$ zależy od własności mechanicznych materiału i przyjętego przekroju belki. Jeżeli przemieszczenie $u_{\max} = u(x_\alpha)$ wywołane przez siłę P jest mniejsze od u_n , to projekt belki spełnia wymagania bezpieczeństwa, gdyż punkt $A^{(1)}(P^{(1)}, u^{(1)})$ jest zawarty w obrębie obszaru dopuszczalnego. Sytuację tę objaśnia rys. 20.9a. Gdy układ jest liniowo-sprężysty, to droga dojścia do punktu $A^{(1)}$ jest linią prostą. W innych przypadkach droga ta może być krzywoliniowa.

Na rysunku 20.9b przedstawiono przypadek, w którym projekt 1 spełnia warunek wytrzymałościowy, a nie spełnia warunku sztywnościowego. Wobec tego projekt belki trzeba poprawić. Najprostszym rozwiązaniem jest przyjęcie projektu 2, w którym belka przyrównana ma odpowiednio większy przekrój. Wówczas na płaszczyźnie (P, u) otrzymujemy punkt $A^{(2)}(P^{(2)}, u^{(2)})$, leżący wewnątrz obszaru dopuszczalnego wyznaczonego przez wartości $P_n^{(2)}$ i $u_n^{(2)}$. Trzeba dodać, że $P_n^{(2)} > P_n^{(1)}$, gdyż powiększenie przekroju spowodowało zwiększenie nośności belki.

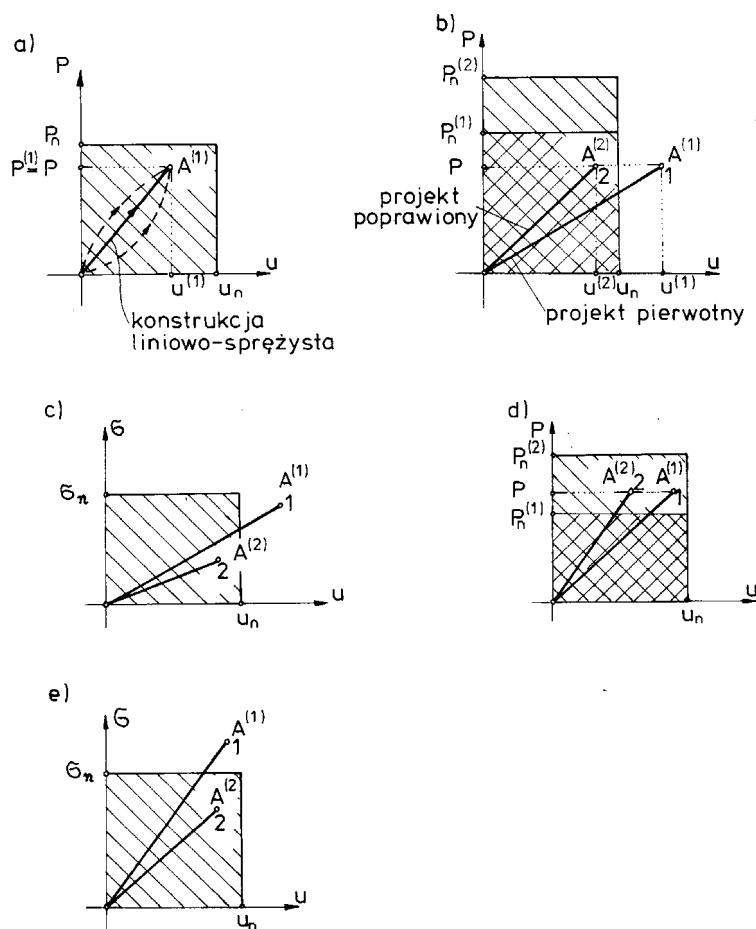
Jeżeli warunek wytrzymałościowy odniesiemy do naprężenia nieprzekraczalnego Z zależności (20.12) i (20.13) wynika, że współczynnik pewności odniesiony do nośności plastycznej przekroju zmienia się w zależności od mimośrodów $z_N = M/N$. Najmniejsza wartość tego współczynnika odpowiada prostej $M = 0$ i wynosi n_0 , natomiast największa występuje dla $N = 0$ i wynosi $n_0 \cdot (W^{(P)} / W^{(S)}) \cdot \sigma_n$, to obszar dopuszczalny w przestrzeni (σ, u) jest zawsze stały i nie zależy od wymiarów przekroju. Procedurę poprawienia projektu w tym wypadku ilustruje rys. 20.9c.

Podobna sytuacja występuje, gdy pierwszy projekt spełnia warunek sztywnościowy, a nie spełnia warunku wytrzymałościowego. Problem ten ilustrują rys. 20.9d, e. Na tych rysunkach widać wyraźniej sens kryterium energetycznego, które w istocie rzeczy ogranicza pole obszaru dopuszczalnego w przestrzeni obciążenie–przemieszczenie. Z tego względu kryterium to prowadzi zazwyczaj do projektów, które spełniają oba warunki bezpieczeństwa: wytrzymałościowy i sztywnościowy.

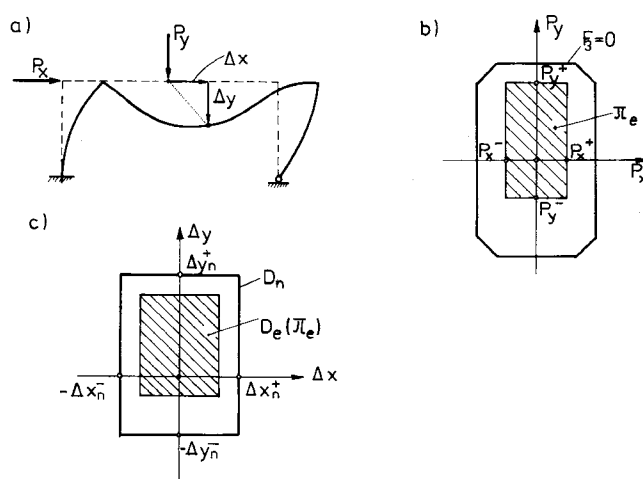
Problem wymiarowania konstrukcji poddanych obciążeniom złożonym przy ograniczeniu przemieszczeń w większej liczbie punktów jest już bardzo skomplikowany. Pewien pogląd na tę sprawę daje przykład ramy z rys. 20.10a, obciążonej siłami P_x i P_y , gdzie ograniczeniu podlegają przemieszczenia Δ_x i Δ_y . Obszar obciążeń eksploatacyjnych π_e opisują nierówności:

$$P_x^- \leq P_x \leq P_x^+, P_y^- \leq P_y \leq P_y^+.$$

Obszar ten zakreskowano na rys. 20.10b.



Rys. 20.9



Rys. 20.10

Spełnienie warunków wytrzymałościowych polega na takim obraniu przekrojów prętów ramy, by obszar obciążeń eksploatacyjnych zawierał się w obszarze obciążeń nieprzekraczalnych, opisanym nierównością $F_3(P_x, P_y) \leq 0$. Obszarowi π_e odpowiada obszar D_e w przestrzeni przemieszczeń Δ_x, Δ_y . W poprawnie zaprojektowanej konstrukcji obszar D_e musi zawierać się w obszarze przemieszczeń nieprze-

kracalnych D_n (por. rys. 20.10c). Jeżeli wymaganie, by $D_e \subset D_n$ nie jest spełnione, niezbędna jest korekta projektu konstrukcji, polegająca na zmianie przekrojów ramy. Dalsze komplikacje powstają, gdy uwzględnimy ciężar własny konstrukcji nośnej. Zasadniczą trudność wynika stąd, że wartości obciążeń i wymiary obszaru nośności konstrukcji nie są niezależne, lecz są powiązane z wymiarami przekrojów elementów konstrukcji.

20.5. PRZEGLĄD METOD SPRAWDZANIA BEZPIECZEŃSTWA KONSTRUKCJI

20.5.1. Metoda naprężeń dopuszczalnych

Metodę tę stosuje się przy założeniu, że konstrukcja jest liniowo-sprężysta. Projekt dopuszczalny w każdym punkcie konstrukcji powinien spełniać dwa warunki:

$$\begin{aligned} F_1(\sigma_{ij}^{(e)} \cdot n_0, \rho_k) &\leq 0, \\ |u(x_1, x_2, x_3)| &\leq u_{\text{dop}}, \end{aligned} \quad (20.15)$$

gdzie symbol $\sigma_{ij}^{(e)}$ oznacza naprężenia wywołane przez obciążenia eksploatacyjne, n_0 – wymagany współczynnik bezpieczeństwa, ρ_k – parametry wytrzymałościowe materiału. Funkcja: $F_1(\sigma_{ij}^{(e)} \cdot n_0, \rho_k) = 0$ jest równaniem brzegu obszaru dopuszczalnego w przestrzeni naprężeń. Konkretna postać tej funkcji zależy od przyjętej hipotezy wytrzymałościowej. Jeżeli na przykład obowiązuje hipoteza *HMH*, a współczynnik bezpieczeństwa wynosi n_0 , to

$$\begin{aligned} F_1(\sigma_{ij}^{(e)} \cdot n_0, \rho_k) = F_1(\sigma_{ij}^{(e)} \cdot n_0, \sigma_P) = & \left[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + \right. \\ & \left. + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12} + \sigma_{23} + \sigma_{31})^2 \right] \cdot n_0^2 - 2\sigma_P^2. \end{aligned}$$

Gdy hipoteza wytrzymałościowa jest jednoparametrowa, tak jak np. hipoteza *HMH*, to wymaganie (20.15)₁ jest równoznaczne ze spełnieniem nierówności: $\sigma_{\text{red}} \leq \sigma_{\text{dop}} = \sigma_N / n_0$, gdzie σ_N oznacza granicę plastyczności materiałów ciągliwych lub wytrzymałość doraźną materiałów kruchych.

Wartość u_{dop} jest ustalana z góry i powinna być tak dobrana, by proces odkształcenia był geometrycznie liniowy oraz by konstrukcja spełniała wymagania użytkowe, estetyczne i psychologiczne.

Pewnego komentarza wymaga sposób określenia naprężeń $\sigma_{ij}^{(e)}$ z uwzględnieniem stateczności i obciążeń dynamicznych. Na przykład przy jednoczesnym ściskaniu i zginaniu pręta ekstremalne naprężenie normalne wyznacza się ze wzoru:

$$\sigma^{(e)} = \frac{|N|}{A\varphi} + \frac{|M|}{W\varphi_L},$$

gdzie φ i φ_L oznaczają odpowiednio współczynnik wyboczeniowy i współczynnik na zwichrzenie. Zależność ta wynika ze wzoru *Dunkerleya*. Jeśli występują obciążenia dynamiczne, wprowadza się współczynnik zwiększający $\psi > 1$, przez który mnoży się naprężenia wyznaczone przy założeniu, że obciążenie jest statyczne:

$$\sigma^{(e)} = \sigma_{\text{dyn}}^{(e)} = \psi \cdot \sigma_{\text{stat}}^{(e)}.$$

20.5.2. Metoda naprężeń granicznych

Istota tej metody polega na wprowadzeniu tzw. współczynników obciążenia α_i oraz współczynnika ω , uwzględniającego niejednorodność materiału, charakter obciążeń i warunki eksploatacji konstrukcji.

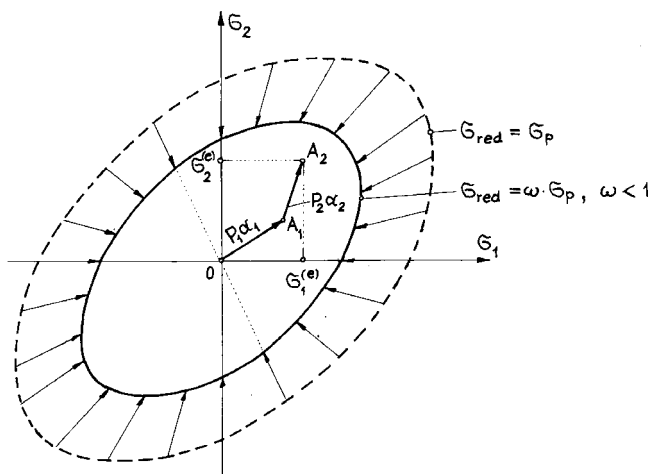
Współczynniki te stosuje się tylko przy sprawdzaniu warunku wytrzymałościowego. Tak zwane **obciążenie obliczeniowe** P^* wyznacza się ze wzoru:

$$P^* = \sum P_i^{(e)} \cdot \alpha_i. \quad (20.16)$$

Obciążenia $P_i^{(e)}$ są ustalane dla i -tego rodzaju obciążenia eksploatacyjnego (np. ciężar własny, wiatr, śnieg, temperatura, parcie cieczy, parcie gruntu itp.) i noszą nazwę **obciążeń charakterystycznych**. Wartości współczynników α_i zależą od rodzaju obciążenia i wahają się w granicach $\langle \alpha_i^-, \alpha_i^+ \rangle$, przy czym $\alpha_i^- \leq 1$, $\alpha_i^+ \geq 1$. Wartości mniejsze od jedności stosuje się tylko w tych przypadkach, w których zmniejszenie obciążenia powoduje zmniejszenie bezpieczeństwa konstrukcji. Dla obciążeń stałych współczynniki α_i^- równają się zazwyczaj 0,9, a najmniejsza wartość 0,8 odnosi się do obciążenia gruntem nasypowym. Współczynniki α_i^+ dla obciążeń stałych nie przekraczają wartości 1,3, a dla zmiennych wartości 1,45. W przypadkach standardowych obciążenia obliczeniowe są z reguły większe od obciążeń charakterystycznych.

Współczynnik ω jest liczbą mniejszą od jedności ($\omega < 1$), redukującą wymiary obszaru granicznego opisującego uplastycznienie materiału ciągłego lub osiągnięcie wytrzymałości doraźnej materiału kruchego.

Sens warunku wytrzymałościowego w metodzie naprężeń granicznych objaśnia rys. 20.11. Uplastycznienie (zniszczenie) materiału występuje dla naprężeń σ_1^P i σ_2^P , spełniających równanie $F_1(\sigma_1^P, \sigma_2^P, \sigma_P) = 0$ (linia przerywana). Zredukowany ω -krotnie obszar graniczny odpowiada obszarowi zaznaczonemu linią ciągłą. Granicę tego obszaru opisuje równanie $F_1(\sigma_1, \sigma_2, \omega \cdot \sigma_P) = 0$. Jeżeli na konstrukcję działają przykładowo dwa obciążenia $P_1^{(e)}$ i $P_2^{(e)}$, to końcowy stan naprężenia obliczeniowego odpowiada punktowi A_2 , wyznaczonemu przez koniec wektora wypadkowego, będącego sumą wektorów OA_1 i A_1A_2 , które odpowiadają obciążeniom $P_1^{(e)}\alpha_1$ i $P_2^{(e)}\alpha_2$. Warunek wytrzymałościowy jest spełniony wówczas, gdy punkt A_2 leży w obrębie zredukowanego obszaru granicznego. Rysunek 20.11 dowodzi, że w metodzie naprężeń granicznych nie ma sensu klasyczna definicja współczynnika bezpieczeństwa.



Rys. 20.11

W zadaniach liniowych **naprężenia graniczne** można uważać za sumę naprężeń pochodzących od poszczególnych rodzajów obciążeń eksploatacyjnych:

$$\sigma_{ij}^* = \alpha_1 \sigma_{ij}(P_1^{(e)}) + \alpha_2 \sigma_{ij}(P_2^{(e)}) + \dots \quad (20.17)$$

Warunek wytrzymałościowy w metodzie naprężeń granicznych można zatem zapisać następująco:

$$F_1(\sigma_{ij}^*, \omega \rho_k) \leq 0, \quad (20.18)$$

gdzie $F_1(\sigma_{ij}^*, \omega \rho_k) = 0$ i jest równaniem ω -krotnie zmniejszonej powierzchni plastyczności lub wytrzymałości doraźnej.

Do obliczenia przemieszczeń przyjmuje się obciążenia charakterystyczne (tzn. $\alpha_i \approx 1$), a warunek sztywności formułuje się identycznie jak w metodzie naprężeń dopuszczalnych:

$$|u(x_1, x_2, x_3)| \leq u_{gr}, \quad (20.19)$$

gdzie u_{gr} oznacza pewną z góry ustaloną graniczną wartość maksymalnego przemieszczenia. Gdy warunek wytrzymałościowy pozwala na zdefiniowanie naprężenia zredukowanego, to wymaganie (20.18) można zapisać w postaci nierówności:

$$\sigma_{red}^* \leq \sigma_N \cdot \omega,$$

gdzie σ_N oznacza naprężenie niszczące.

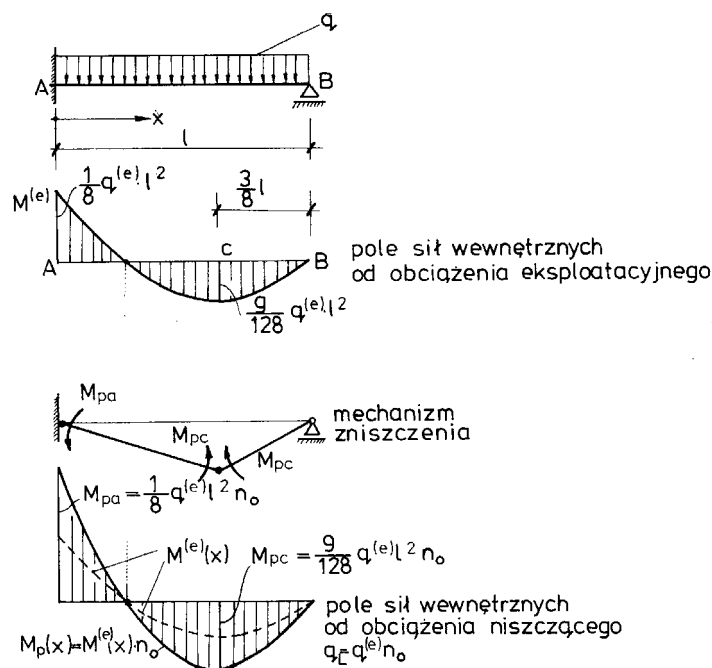
20.5.3. Metoda odkształceń plastycznych

Metodę tę stosuje się wyłącznie w odniesieniu do konstrukcji żelbetowych. Odpowiednią sztywność konstrukcji zapewnia się przez ograniczenie od dołu minimalnych przekrojów prętów oraz grubości płyt i powłok. Projektowanie według tej metody polega zatem tylko na spełnieniu warunku wytrzymałościowego, który ma charakter lokalny, ale jest już zapisany w przestrzeni sił wewnętrznych na szczeblu przekroju.

W metodzie odkształceń plastycznych wprowadza się jeden globalny współczynnik pewności n_0 . Pole sił wewnętrznych $Y_j^{(e)}$ wywołanych przez obciążenia eksploatacyjne oblicza się przy założeniu, że konstrukcja jest wykonana z betonu wykazującego cechy materiału idealnie liniowo-sprężystego. W wyniku przemnożenia tego pola przez współczynnik bezpieczeństwa n_0 otrzymuje się statycznie dopuszczalne pole sił wewnętrznych $Y_j^{(e)} \cdot n_0$, które – stosownie do głównego postulatu metody – towarzyszy wystąpieniu uogólnionych przegubów plastycznych i przekształceniu się konstrukcji w mechanizm. Procedurę tę objaśniono na przykładzie belki z rys. 20.12. Wymiarowanie polega na dobraniu odpowiedniej ilości zbrojenia w przekrojach niebezpiecznych, których położenie jest znane z rozwiązania sprężystego.

Warunek wytrzymałości polega na spełnieniu nierówności:

$$F_2\left(Y_j^{(e)} \cdot n_0, r_k\right) \leq 0. \quad (20.20)$$



Rys. 20.12

Opisana metoda daje poprawną ocenę nośności granicznej całej konstrukcji, aczkolwiek uzyskane za jej pomocą projekty zazwyczaj nie są optymalne. Wynika to stąd, że z góry narzuca się przebieg sił wewnętrznych w konstrukcji stosownie do rozwiązania sprężystego.

20.5.4. Metoda nośności granicznej

Metoda nośności granicznej służy do oceny wytrzymałości konstrukcji.

W porównaniu z omówionymi już metodami projektowania istotne jest to, że warunek wytrzymałości ma charakter globalny i odnosi się do przestrzeni obciążeń konstrukcji. Problem projektowania polega na znalezieniu takich wymiarów poprzecznych i ewentualnie zbrojenia konstrukcji elementów, by dany obszar obciążeń eksploatacyjnych znajdował się w obszarze dopuszczalnym. Obszar dopuszczalny jest n_0 -krotnie zmniejszonym obszarem nośności granicznej w przestrzeni obciążeń. Klasyczną metodę nośności granicznej opracowano dla obciążeń jednoparametrowych. Oznacza to, że poszukujemy takiego mnożnika n_0 układu obciążeń eksploatacyjnych $P_j^{(e)}$, by $\mu \geq n_0$.

Warunek wytrzymałościowy w metodzie nośności granicznej można zapisać, jak następuje:

$$F_3(P_j^{(e)} \cdot n_0, R_k) \leq 0, \quad (20.21)$$

gdzie $F_3(P_j, R_k) = 0$ i jest równaniem brzegu obszaru nośności granicznej w przestrzeni obciążeń. Wartość współczynnika bezpieczeństwa n_0 powinna gwarantować ewentualne przystosowanie się konstrukcji do danego obszaru zmienności obciążeń.

20.5.5. Metoda stanów granicznych

Na metodzie stanów granicznych są oparte wszystkie aktualnie obowiązujące normy projektowania konstrukcji budowlanych. W metodzie tej rozróżnia się dwa zasadnicze stany:

- stan graniczny nośności,
- stan graniczny użytkowania.

Stan graniczny nośności jest po prostu warunkiem wytrzymałościowym, w którym wprowadza się znane współczynniki obciążeń α_i i mnożnik materiałowy ω .

W konstrukcjach żelbetowych odpowiada to zmodyfikowanej metodzie odkształceń plastycznych, w której zamiast obciążeń niszczących wprowadza się obciążenia obliczeniowe, a zamiast warunku plastyczności – zmniejszony ω -krotnie warunek plastyczności. Dopuszcza się również stosowanie odpowiednio zmodyfikowanej metody nośności granicznej.

Do stanów granicznych użytkowania należą:

- stan graniczny przemieszczeń,
- stan graniczny pojawienia się rys (żelbet),
- stan graniczny rozwarcia rys (żelbet).

Warunek bezpieczeństwa w stanie granicznym przemieszczeń polega na spełnieniu nierówności $|u(x_1, x_2, x_3)| \leq u_{\text{gran}}$ przy stosowaniu mnożników $\alpha_i = 1$. Pozostałe stany graniczne są ściśle związane ze specyfiką konstrukcji żelbetowych i nie będziemy ich omawiać.