



PODSUMOWANIE PIERWSZEJ CZĘŚCI

Wytrzymałość Materiałów opiera się na założeniu ciągłości materii. Założenie to leży u podstaw tzw. mechaniki ośrodków ciągłych, wywodzącej się z mechaniki klasycznej, zbudowanej na trzech zasadach dynamiki *Newtona*.

Stan naprężenia

• Rodzaje sił działających na ciało – obciążenia

a) siły powierzchniowe $\mathbf{p}dS$; gęstość sił powierzchniowych:

$$\mathbf{p} = p_i(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S; \quad p_i [\text{N} / \text{m}^2];$$

b) siły objętościowe (masowe) $\mathbf{G}dV$; – gęstość sił masowych:

$$\mathbf{G} = G_i(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in V; \quad G_i [\text{N} / \text{m}^3].$$

• Definicja wektora naprężenia

Wektor naprężenia zależy od położenia punktu i nachylenia płaszczyzny. Wielkość

$$\mathbf{f}^{(n)}(B) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta S} = \frac{d\mathbf{F}}{dS}$$

nazywamy **wektorem naprężenia w punkcie B, odniesionym do płaszczyzny o normalnej \mathbf{n}** : $\mathbf{f}^{(n)}(B) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$; $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$; $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = n_j n_j = 1$.

• Stan naprężenia w punkcie \mathbf{x}

$$\mathbf{p} = p_i^{(n)}(\mathbf{x}) = f_i^{(n)}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S; \quad \boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij}(\mathbf{x}) = f_j^{(n_i)}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in V;$$

– warunki wewnątrz ciała (w objętości ciała V):

$$f_i^{(n)} = \sigma_{ji} n_j, \quad i, j = 1, 2, 3; \quad \mathbf{x} \in V$$

– warunki na powierzchni ciała S :

$$p_i = \sigma_{ji} n_j, \quad i, j = 1, 2, 3; \quad \mathbf{x} \in S$$

Stan naprężenia jest jednoznacznie określony przez tensor naprężenia $\boldsymbol{\sigma}$, opisany przez 9 liczb (współrzędnych) σ_{ji} w danym układzie osi x_1, x_2, x_3 :

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{ji}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{– płaszczyzna } \perp \text{ do } x_1, \\ \text{– płaszczyzna } \perp \text{ do } x_2, \\ \text{– płaszczyzna } \perp \text{ do } x_3. \end{array}$$

• Naprężenie normalne σ i naprężenie styczne τ na płaszczyźnie o normalnej $\mathbf{n}=(n_1, n_2, n_3)$

$$\sigma^{(n)} = f_i^{(n)} n_i = \sigma_{ji} n_j n_i; \quad \tau^{(n)} = \sqrt{f_i^{(n)} f_i^{(n)} - \sigma^{(n)} \sigma^{(n)}}.$$

• Równania różniczkowe równowagi (sumy rzutów sił na kolejne osie układu x_i)

$$\sigma_{ji,j} + G_i = 0, \text{ gdzie } \frac{\partial}{\partial x_j} (\) \equiv (\)_{,j}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

- *Symetria tensora naprężenia (sumy momentów sił względem osi układu x_i)*

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \text{lub} \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T.$$

Symbol „ T ” oznacza znak transpozycji macierzy. Liczba niezależnych współrzędnych tensora naprężenia wynosi zatem 6.

- *Transformacja współrzędnych tensora naprężenia przy obrocie układu współrzędnych fizycznych z położenia \mathbf{x} do położenia \mathbf{x}'*

Kosinusy kątów pomiędzy osiami układów \mathbf{x} i \mathbf{x}' $a_{p'i} = a_{ip'} = \cos(x_{p'}, x_i)$ spełniają warunki ortogonalności:

$$a_{p'i} a_{ik'} = \delta_{p'k'} \quad \text{lub} \quad a_{p'i} a_{jp'} = \delta_{ij}; \quad i, j = 1, 2, 3; \quad p', k' = 1', 2', 3',$$

gdzie δ_{ij} jest symbolem *Kroneckera*.

Wzory transformacyjne składowych tensora naprężenia przy obrocie układu współrzędnych

$$\sigma_{k'p'} = \sigma_{ji} a_{jk'} a_{ip'} = a_{k'j} \sigma_{ji} a_{ip'},$$

lub

$$\sigma_{ij} = \sigma_{k'p'} a_{k'i} a_{p'j} = a_{ik'} \sigma_{k'p'} a_{p'j},$$

gdzie $j, i = 1, 2, 3; \quad k', p' = 1', 2', 3'$. Postać macierzowa:

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{A} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{A}^T \quad \text{lub} \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{A}^T \boldsymbol{\sigma}' \mathbf{A},$$

gdzie macierz transformacji:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1'1} & a_{1'2} & a_{1'3} \\ a_{2'1} & a_{2'2} & a_{2'3} \\ a_{3'1} & a_{3'2} & a_{3'3} \end{bmatrix}.$$

- *Definicja tensora*

Każdy obiekt podlegający transformacji według prawa

$$C_{p'r's',...,t'} = C_{ijk,...,l} a_{ip'} a_{jr'} a_{ks'}, ..., a_{lt'}$$

jest tensorem. Liczba wskaźników m to rząd lub walencja tensora. Tensor naprężenia jest tensorem drugiego rzędu, wektor – tensorem pierwszego rzędu, skalar – tensorem zerowego rzędu. Liczba współrzędnych tensora w przestrzeni 3-wymiarowej wynosi 3^m .

- *Naprężenia główne*

Każdy stan naprężenia można przedstawić w postaci trzech naprężeń normalnych $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (tzw. naprężeń głównych), działających na trzech wzajemnie prostopadłych płaszczyznach, opisanych wektorami normalnymi pokrywającymi się z tzw. kierunkami głównymi. Naprężenia główne i kierunki główne wyznacza się z układu czterech równań:

$$\sigma_{ji} n_j - \sigma n_i = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = n_i n_i = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1.$$

Z układu tego wynika, że naprężenia główne $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ są pierwiastkami równania trzeciego stopnia, tzw. równania charakterystycznego:

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0,$$

gdzie I_1, I_2, I_3 są tzw. niezmiennikami głównymi tensora naprężenia:

$$I_1(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{kk}; \quad I_2(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2}(\sigma_{kk}\sigma_{rr} - \sigma_{ij}\sigma_{ij}); \quad I_3(\boldsymbol{\sigma}) = \det[\sigma_{ij}] .$$

Niezmienne zachowują swe wartości przy obrocie układu współrzędnych. W układzie osi głównych tensor naprężenia przyjmuje postać

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} .$$

Pierwiastki równania charakterystycznego są liczbami rzeczywistymi, co zachodzi zawsze wtedy, gdy tensor naprężenia jest symetryczny. Uporządkowane naprężenia główne: $\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$, przy czym $\sigma_I = \max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, $\sigma_{III} = \min(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, a naprężenie σ_{II} przyjmuje wartość pośrednią. Geometryczną interpretacją wzorów transformacyjnych i problemu naprężeń głównych są tzw. koła *Mohra*.

• Maksymalne naprężenia styczne

$$|\tau|_{\max} = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} .$$

Ekstremalne (tj. maksymalne i minimalne) naprężenia styczne występują na płaszczyznach nachylonych pod kątem 45° w stosunku do płaszczyzn głównych. Naprężenia normalne na płaszczyznach ekstremalnych naprężeń stycznych:

$$\sigma_{(\tau)} = \frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2} .$$

• Rozkład tensora naprężenia na aksjator i dewiator

Każdy symetryczny tensor drugiego rzędu można rozłożyć na dwie części:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(o)} + \sigma_{ij}^{(d)}, \text{ gdzie } \sigma_{ij}^{(o)} = \sigma_0 \delta_{ij}; \quad \sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = \frac{1}{3}I_1 .$$

W wyrażeniu tym $\sigma_{ij}^{(d)}$ jest dewiatorem, a $\sigma_{ij}^{(o)}$ – aksjatozem. Aksjator odpowiada wszechstronnemu rozciąganiu (ściskaniu) średnim naprężeniem normalnym σ_0 . Aksjator jest więc określony tylko przez jedną wartość σ_0 . Cechą charakterystyczną dewiatora jest natomiast zerowanie się pierwszego niezmiennika:

$$I_1^{(d)} = \sigma_{11}^{(d)} + \sigma_{22}^{(d)} + \sigma_{33}^{(d)} = 0 .$$

Dlatego dewiator ma 5 niezależnych współrzędnych. O nachyleniu płaszczyzn głównych tensora decyduje tylko dewiator.

• Płaski stan naprężenia

W płaskim stanie naprężenia (w płaszczyźnie x_1, x_2) tensor naprężenia ma postać:

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ,$$

a wszystkie składowe σ_{ij} są tylko funkcjami x_1, x_2 .

Równania transformacyjne przy obrocie osi układu o kąt φ :

$$\sigma_{1'1'} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \cos 2\varphi + \sigma_{12} \sin 2\varphi,$$

$$\sigma_{2'2'} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} - \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \cos 2\varphi - \sigma_{12} \sin 2\varphi,$$

$$\sigma_{1'2'} = -\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \sin 2\varphi + \sigma_{12} \cos 2\varphi.$$

Naprężenia główne wyrażają wzory:

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2}, \quad \sigma_3 = 0.$$

Kąt φ_0 opisujący położenie głównych osi naprężeń:

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}}.$$

Po zastosowaniu znakowania inżynierskiego:

$$\sigma_x = \sigma_{11}, \sigma_y = \sigma_{22}, \tau_{xy} = -\sigma_{12}, \tau_{yx} = +\sigma_{21},$$

według którego dodatnie naprężenie styczne ma obrót zgodny z kierunkiem ruchu wskazówek zegara, wzory transformacyjne oraz wzór na kąt nachylenia osi głównych naprężeń wyraża się następująco:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x'} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi - \tau_{xy} \sin 2\varphi \\ \sigma_{y'} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi \\ \tau_{x'y'} &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi \end{aligned} \right\}, \quad \operatorname{tg} 2\varphi_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}.$$

• Czyste ścinanie

Czyste ścinanie jest szczególnym przypadkiem płaskiego stanu naprężenia. Zachodzi ono wtedy, gdy na ściankach elementarnego czworokąta występują wyłącznie naprężenia styczne τ . W układzie osi nachylonych pod kątem 45° odpowiada to elementowi np. rozciąganyemu naprężeniem $\sigma = \tau$ w kierunku osi x_1 oraz ściskanemu naprężeniem $\sigma = -\tau$ w kierunku osi x_2 . Czyste ścinanie jest stanem dewiatorowym i ma duże znaczenie przy wyprowadzaniu związków fizycznych.

Stan odkształcenia

• Definicja wektora przemieszczenia

We współrzędnych materialnych (*Lagrange'a*):

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = \xi_i(x_1, x_2, x_3) - x_i.$$

We współrzędnych przestrzennych (*Eulera*):

$$u_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \xi_i - x_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3),$$

gdzie położenie danego punktu materialnego przed odkształceniem opisane jest współrzędnymi x_1, x_2, x_3 , a po odkształceniu – współrzędnymi ξ_1, ξ_2, ξ_3 .

• Tensor małych odkształceń - równania geometryczne (kinematyczne)

Odształcenie ciała występuje wówczas, gdy zmieniają się odległości między poszczególnymi punktami ciała. Jeżeli gradienty przemieszczeń i składowe wektora przemieszczenia są małe, to opisy *Lagrange'a* i *Eulera* prowadzą do identycznych związków kinematycznych (zwanymi również związkami geometrycznymi), łączących przemieszczenia \mathbf{u} i odkształcenia $\boldsymbol{\varepsilon}$. Są to tzw. wzory *Cauchy'go*:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Wszystkie współrzędne tensora $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

są bezwymiarowe. Współrzędne równowskaznikowe są odkształceniami liniowymi wzdłuż odpowiednich osi i mają sens względnego wydłużenia, tzn. stosunku przyrostu długości elementarnego odcinka do jego długości przed odkształceniem. Współrzędne różnowskaznikowe są odkształceniami kątowymi mierzonymi w płaszczyznach określonych indeksami współrzędnych (np. ε_{23} jest połową sumy kątów odkształcenia w płaszczyźnie x_2, x_3). W większości starszych podręczników stan odkształcenia opisuje się za pomocą odkształceń liniowych $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ i całkowitych kątów odkształcenia γ_{ij} , tzn.: $\varepsilon_x = \varepsilon_{11}$, $\varepsilon_y = \varepsilon_{22}$, $\varepsilon_z = \varepsilon_{33}$, $\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{12}$, $\gamma_{yz} = 2\varepsilon_{23}$, $\gamma_{zx} = 2\varepsilon_{13}$. Jednak wyszczególnione wyżej tradycyjne składowe stanu odkształcenia niestety nie tworzą współrzędnych tensora.

• Transformacja składowych tensora odkształcenia

Współrzędne tensora małych odkształceń transformują się identycznie jak współrzędne tensora naprężenia, stosownie do zależności:

$$\varepsilon_{p'k'} = \varepsilon_{ij} a_{ip'} a_{jk'} \quad \text{lub w postaci macierzowej: } \boldsymbol{\varepsilon}' = \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{A}^T.$$

• Odkształcenia główne

Każdy stan odkształcenia można przedstawić w postaci trzech odkształceń liniowych $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ (tzw. odkształceń głównych), działających w trzech wzajemnie prostopadłych kierunkach (tzw. kierunkach głównych). Odkształcenia główne i kierunki główne wyznacza się z układu czterech równań:

$$\varepsilon_{ji} n_j - \varepsilon n_i = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = n_i n_i = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1.$$

Odkształcenia główne $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ są pierwiastkami równania charakterystycznego:

$$\varepsilon^3 - I_1 \varepsilon^2 + I_2 \varepsilon - I_3 = 0,$$

gdzie I_1, I_2, I_3 są tzw. niezmiennikami głównymi tensora odkształcenia:

$$I_1(\boldsymbol{\sigma}) = \varepsilon_{kk}; \quad I_2(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2}(\varepsilon_{kk} \varepsilon_{rr} - \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}); \quad I_3(\boldsymbol{\sigma}) = \det[\varepsilon_{ij}].$$

W układzie osi głównych tensor odkształcenia przyjmuje postać:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

• Tensor obrotów (spin)

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}); \quad \omega_{ij} = -\omega_{ji}; \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Tensor obrotu jest tensorem skośnie symetrycznym (antysymetrycznym) o zerowych składowych na głównej przekątnej. Tensor ten nie wpływa na wartości naprężeń.

• *Rozkład gradientu przemieszczenia na tensory odkształcenia i obrotu*

$$u_{i,j} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}.$$

• *Maksymalne odkształcenia kątowe*

$$|\tau|_{\max} = \frac{\varepsilon_I - \varepsilon_{III}}{2}.$$

Ekstremalne (tj. maksymalne i minimalne) odkształcenia kątowe występują w kierunkach nachylonych pod kątem 45° w stosunku do kierunków głównych.

• *Rozkład tensora odkształcenia na aksjator i dewiator*

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(o)} + \varepsilon_{ij}^{(d)}, \quad \text{gdzie } \varepsilon_{ij}^{(o)} = \varepsilon_0 \delta_{ij}; \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{3}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) = \frac{1}{3}I_1,$$

gdzie $\varepsilon_0 = \varepsilon_{kk}$ i oznacza średnie odkształcenie liniowe.

• *Równania nierozdzielności*

Funkcje $\varepsilon_{ij}(x_1, x_2, x_3)$ nie mogą być zupełnie dowolne i powinny spełniać tzw. równania nierozdzielności. Spełnienie równań nierozdzielności oznacza, że po odkształceniu w ośrodku nie powstaną „dziury” lub że myślowo wycięte elementy ciała nie będą się przenikały. Równań tych jest sześć i odpowiadają one zerowaniu się współrzędnych tensora niespójności η_{ij} :

$$\eta_{ij} = \eta_{ji} = e_{ikm} e_{jln} \varepsilon_{kl,mn} = 0.$$

Okazuje się, że wystarcza, by wewnątrz ciała zniknęły tylko trzy równania równowskaznikowe lub tylko trzy różnowskaznikowe. Na powierzchni ciała o dowolnych warunkach brzegowych muszą być natomiast spełnione wszystkie (tzn.6) równania.

• *Względna zmiana objętości*

$$\frac{\Delta dV}{dV} = \varepsilon_I + \varepsilon_{II} + \varepsilon_{III} = I_1(\varepsilon) = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = 3\varepsilon_0.$$

Ponieważ $I_1^{(d)} = 0$, zatem za odkształcenia objętościowe jest „odpowiedzialny” aksjator tensora odkształcenia.

• *Płaski stan odkształcenia*

W płaskim stanie (w płaszczyźnie x_1, x_2) tensor odkształcenia ma postać:

$$\varepsilon = [\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

a wszystkie składowe ε_{ij} są tylko funkcjami x_1, x_2 .

Równania transformacyjne przy obrocie osi układu o kąt φ :

$$\varepsilon_{1'1'} = \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}}{2} + \frac{\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}}{2} \cos 2\varphi + \varepsilon_{12} \sin 2\varphi,$$

$$\varepsilon_{2'2'} = \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}}{2} - \frac{\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}}{2} \cos 2\varphi - \varepsilon_{12} \sin 2\varphi,$$

$$\varepsilon_{1'2'} = -\frac{\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}}{2} \sin 2\varphi + \varepsilon_{12} \cos 2\varphi.$$

Odształcenia główne wyrażają wzory:

$$\left. \begin{matrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{matrix} \right\} = \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}}{2}\right)^2 + \varepsilon_{12}^2}, \quad \varepsilon_3 = 0.$$

Kąt φ_0 , opisujący położenie głównych osi naprężeń:

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{2\varepsilon_{12}}{\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}}.$$

• Odształcenie czysto postaciowe

Odształcenie czysto postaciowe jest szczególnym przypadkiem płaskiego stanu odkształcenia, w którym nie ma zmian objętościowych. Zachodzi ono wtedy, gdy elementarny czworokąt wykazuje wyłącznie odkształcenia kątowe. W układzie osi nachylonych pod kątem 45° odpowiada to elementowi o odkształceniu liniowym ε (wydłużenie) w kierunku osi x_1 oraz odkształceniu liniowym $-\varepsilon$ (skrócenie) w kierunku osi x_2 . Odształcenie czysto postaciowe jest stanem deformacją izochoryczną (dewiatorową) i ma duże znaczenie przy wyprowadzaniu związków fizycznych. Jest ono odpowiednikiem czystego ścinania.

• Odształcenia objętościowe i postaciowe

Dowolny stan odkształcenia składa się ze zmian objętościowych i zmian postaciowych. Zmiany objętościowe opisuje tylko aksjator tensora odkształcenia (równomierne rozszerzenie lub skurczenie). Zmianę postaci wyraża z kolei dewiator tensora odkształcenia, na który składają się dwa odkształcenia czysto postaciowe.

Zasada pracy wirtualnej

• Pola statycznie i kinematycznie dopuszczalne

Pole naprężeń $\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)$ jest statycznie dopuszczalne, jeśli spełnia ono równania statyki, tzn. różniczkowe równowagi we wnętrzu ciała, $\sigma_{ji,j} + G_i = 0$, oraz naprężeniowe warunki brzegowe na powierzchni ograniczającej ciało, $\sigma_{ji}n_j = p_i^{(n)}$.

Pole odkształceń jest kinematycznie dopuszczalne, jeśli spełnia ono związki kinematyczne $\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$, a przemieszczenia $u_i(x_1, x_2, x_3)$ spełniają kinematyczne warunki brzegowe.

• Równanie pracy wirtualnej dla ciał odkształcalnych

$$\int_S p_i u_i dS + \int_V G_i u_i dV = \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV,$$

gdzie odkształcenia $\varepsilon_{ij}(x_1, x_2, x_3)$ są dowolnym kinematycznie dopuszczalnym polem odkształceń, a $\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)$ jest dowolnym kinematycznie dopuszczalnym polem naprężeń. Ważne jest, że pomiędzy wielkościami statycznymi i kinematycznymi nie musi zachodzić żaden związek przyczynowy.

Zasada pracy wirtualnej obowiązuje dla dowolnego materiału. Ma ona podstawowe znaczenie dla mechaniki ciał sztywnych i ciał odkształcalnych. Zazwyczaj jest tak, że jedno z omawianych pól jest rzeczywiste a drugie fikcyjne (wymyślone, uprzednio przygotowane), czyli wirtualne. Wirtualny stan naprężenia służy do obliczania rzeczywistych przemieszczeń, a wirtualny stan odkształcenia – do wyznaczania rzeczywistych wielkości statycznych.

• Równanie mocy wirtualnej

$$\int_S p_i \dot{u}_i dS + \int_V G_i \dot{u}_i dV = \int_V \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dV,$$

gdzie kinematyczna dopuszczalność dotyczy tutaj prędkości przemieszczeń \dot{u}_i i odkształceń. Równanie mocy wirtualnej ma duże zastosowanie w mechanice ciał plastycznych i lepkich.

• Równania pracy i mocy wirtualnej dla ciał sztywnych

$$\sum_k P_k \Delta_k = 0, \quad \sum_k P_k \dot{\Delta}_k = 0.$$

Siły skupione P_k oraz przemieszczenia Δ_k mają sens uogólniony (tzn. mogą być siłami lub momentami oraz przesunięciami lub kątami obrotu). Podobnie prędkości $\dot{\Delta}_k$ oznaczają albo prędkości przesunięć, albo prędkości kątów obrotu. Układ sił P_k jest w równowadze (tzn. ich wypadkowe są równe zero), a przemieszczenia Δ_k i prędkości przemieszczeń $\dot{\Delta}_k$ są kinematycznie dopuszczalne, tzn. zgodne z kinematyką ciała sztywnego. Iloczyny P_k i Δ_k oraz P_k i $\dot{\Delta}_k$ muszą mieć odpowiednio sens pewnej pracy lub sens pewnej mocy.

Podstawowe rezultaty badań doświadczanych

• Próba rozciągania próbki izotropowej i jednorodnej

Nominalne naprężenie rozciągające $\sigma = \sigma_{11}$ oblicza się ze wzoru:

$$\sigma = \frac{P}{A_0}.$$

gdzie P jest siłą rozciągającą próbkę, a A_0 jest początkowym polem przekroju próbki w części pomiarowej przed odkształceniem.

Do obliczenia odkształceń przyjmujemy hipotezę płaskich przekrojów i jednorodność deformacji na długości części pomiarowej l_0 . Wtedy

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{podł}} = \frac{\Delta l}{l_0},$$

gdzie Δl oznacza wydłużenie części pomiarowej mierzone w kierunku długości próbki.

W obszarze liniowo sprężystym zależność pomiędzy naprężeniem a odkształceniem nosi nazwę prawa Hooke'a:

$$\sigma = E\varepsilon,$$

gdzie E jest stałą sprężystości, zwaną modułem sprężystości lub modułem *Younga*. Stosunek odkształceń liniowych w kierunku poprzecznym i podłużnym w obszarze sprężystym jest stały i odpowiada współczynnikowi *Poissona* ν :

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{\text{poprz}}}{\varepsilon_{\text{podł}}} = -\frac{\Delta R}{R_0} \cdot \frac{\Delta l}{l_0} = \text{const},$$

gdzie $\Delta R/R$ oznacza przewężenie względne próbki równe odkształceniu poprzecznemu $\varepsilon_{\text{poprz}}$. Współczynniki E i ν są podstawowymi stałymi sprężystości dla ciała izotropowego.

W obszarze odkształceń sprężysto-plastycznych całkowite odkształcenie jest sumą odkształcenia sprężystego i plastycznego:

$$\varepsilon = \varepsilon^{(s)} + \varepsilon^{(p)}, \quad \text{gdzie} \quad \varepsilon^{(s)} = \frac{\sigma}{E}.$$

Odształcenia plastyczne mają charakter trwały. Odciążenie w tym zakresie przebiega sprężysto.

• Pełzanie i relaksacja

Pełzaniem materiału nazywamy zmianę odkształceń w czasie przy stałym naprężeniu:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \neq 0.$$

Relaksacją materiału nazywamy zmianę naprężeń w czasie przy stałym odkształceniu:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} \neq 0, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 0.$$

• Wpływ temperatury

Temperatura w materiale termicznie izotropowym wywołuje zmianę objętości. Odształcenia określa wzór:

$$\varepsilon_{ij}^{(T)} = \alpha_T T \delta_{ij},$$

gdzie α_T jest współczynnikiem rozszerzalności termicznej, a T przyrostem temperatury.

• Wytrzymałość zmęczeniowa

Wytrzymałość zmęczeniowa jest równa największej amplitudzie naprężenia w symetrycznym cyklu obciążeń przy liczbie cykli $N \geq 10^8$.

Zmęczenie niskocyklowe zachodzi przy dosyć dużych amplitudach naprężenia, gdy oprócz deformacji sprężystych występują deformacje plastyczne. Zniszczenie tego typu zachodzi dla $N \leq 10^4$ cykli. Zmęczenie wysokocyklowe zachodzi wtedy, gdy największa amplituda naprężeń nie przekracza granicy sprężystości. Odpowiada to liczbie cykli $N > 10^4$.

Przy symetrycznych cyklach odkształceń plastycznych o stałej amplitudzie $\Delta\epsilon^{(p)}$ dla większości metali obowiązuje wzór *Coffina*:

$$\Delta\epsilon^{(p)}\sqrt{N} = \frac{1}{2}\epsilon_{gr},$$

gdzie ϵ_{gr} oznacza odkształcenie graniczne przy zerwaniu.

- *Podstawowe mechanizmy zniszczenia materiałów*

Rozróżnia się dwa rodzaje mechanizmów zniszczenia: poślizgowy i rozdzielczy. Mechanizm poślizgu jest efektem rozwoju deformacji plastycznych. Występuje on w materiałach ciągliwych (w większości metali). Mechanizm rozdzielczy obserwujemy w materiałach kruchych (beton, ceramika, skały). Jeżeli wytrzymałość na ścinanie jest większa niż wytrzymałość rozdzielcza, to materiał pęka w sposób kruchy, lecz jeżeli wytrzymałość na ścinanie jest mniejsza niż wytrzymałość rozdzielcza, to materiał jest ciągliwy i odkształci się, zanim pęknie. Warto zwrócić uwagę, że kruche pęknięcia materiału są bardzo niebezpieczne, gdyż konstrukcja może ulec zniszczeniu bez widocznych uprzednio oznak (deformacji).

Równania fizyczne dla ciał liniowo-sprężystych

- *Zasada superpozycji*

Ostateczny skutek działania kilku przyczyn jest równy sumie efektów działania każdej z przyczyn.

Zasięg jej stosowania jest jednak ograniczony. Zasada superpozycji obowiązuje bowiem tylko wówczas, gdy skutek jest liniową funkcją przyczyny.

- *Równania fizyczne dla ciał izotropowych*

Jeśli wykorzystamy zasadę superpozycji oraz opis czystego ścinania i odkształcenia czysto postaciowego, to otrzymamy odpowiednik prawa *Hooke'a* dla naprężeń stycznych:

$$\tau = G\gamma; \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

gdzie G oznacza moduł ścinania lub moduł *Kirchhoffa*.

Związki fizyczne dla sprężystego ciała izotropowego, tzw. uogólnione prawo *Hooke'a*, można zapisać w postaci:

$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{1}{E} [\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})], \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E} [\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})], \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1}{E} [\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})], \\ \varepsilon_{12} &= \frac{\sigma_{12}}{2G}, \quad \varepsilon_{23} = \frac{\sigma_{23}}{2G}, \quad \varepsilon_{13} = \frac{\sigma_{13}}{2G}.\end{aligned}$	<div style="text-align: center; margin-bottom: 10px;">lub</div> $\begin{aligned}\sigma_{11} &= 2G \left[\varepsilon_{11} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \right], \\ \sigma_{22} &= 2G \left[\varepsilon_{22} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \right], \\ \sigma_{33} &= 2G \left[\varepsilon_{33} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \right], \\ \sigma_{12} &= 2G\varepsilon_{12}, \quad \sigma_{23} = 2G\varepsilon_{23}, \quad \sigma_{13} = 2G\varepsilon_{13}.\end{aligned}$
--	--

• *Względna zmiana objętości:*

$$\frac{\Delta dV}{dV} = \varepsilon_{rr} = \frac{3(1-2\nu)}{E} \sigma_0 = \frac{\sigma_0}{K}, \quad \text{gdzie} \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)}.$$

Współczynnik K nosi nazwę modułu ścisłości. Dla materiałów nieściśliwych $\nu = 0,5$; wtedy $\Delta dV / dV = 0$. Współczynnik *Poissona* dla materiałów izotropowych i spełniających postulat ciągłości materii spełnia nierówność: $0 \leq \nu \leq 0,5$.

• *Inne postacie związków fizycznych*

Izotropia:

– zapis wskaźnikowy

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad \text{lub} \quad \varepsilon_{ij} = 2\mu' \sigma_{ij} + \lambda' \sigma_{rr} \delta_{ij},$$

gdzie μ , λ oraz μ' i λ' oznaczają stałe *Lamégo*:

$$\mu = G, \quad \lambda = \frac{2\nu}{1-2\nu} G, \quad \mu' = \frac{1}{4G}, \quad \lambda' = -\frac{\nu}{E};$$

– związki pomiędzy aksjatorami i dewiatorami:

$$\varepsilon_{ij}^{(o)} = \frac{1}{3K} \sigma_{ij}^{(o)}; \quad \varepsilon_{ij}^{(d)} = \frac{1}{2G} \sigma_{ij}^{(d)}.$$

Sprężystość izotropowa jest całkowicie określona przez dwie stałe sprężystości.

Anizotropia:

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad \text{lub} \quad \varepsilon_{ij} = C_{ijkl} \sigma_{kl},$$

gdzie E_{ijkl} oraz C_{ijkl} są odpowiednio tensorami sztywności i podatności sprężystej, mające w przypadku ogólnym po 18 niezależnych współrzędnych.

• *Równania zbiorcze teorii ciała liniowo sprężystego*

– 3 równania równowagi

$$\sigma_{ji,j} + G_i = \rho \ddot{u}_i,$$

– 6 związków kinematycznych (geometrycznych)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}),$$

– 6 równań fizycznych

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl}.$$

Te 15 równań wiąże ze sobą 15 niewiadomych funkcji:

$$u_1, u_2, u_3; \sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{22}, \sigma_{23}, \sigma_{33}; \varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{33}$$

oraz warunki brzegowe:

- dla naprężeń $\sigma_{ji} n_j = p_i^*$ na S_p ,
- dla przemieszczeń: $u_i = u_i^*$ na S_u .

Wyszczególnione wyżej równania i warunki brzegowe służą do rozwiązywania zadań teorii sprężystości.

Podstawy energetyczne

• Układy Clapeyrona

Układy *Clapeyrona* charakteryzują się tym, że zależności $P(u)$ są liniowe. Zachodzi to wtedy, gdy: materiał jest liniowo-sprężysty, w trakcie odkształcenia nie zmieniają się warunki podparcia, gdy nie ma naprężeń i odkształceń wstępnych oraz zmian temperatury.

• Twierdzenie Clapeyrona

Praca obciążeń L równa się energii sprężystej U , zmagazynowanej wewnątrz ciała:

$$L = U, \quad \text{gdzie } L = \frac{1}{2} \int_S p_i u_i dS + \frac{1}{2} \int_V G_i u_i dV; \quad U = \int_V \left(\frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \right) dV.$$

• Energia sprężysta właściwa (gęstość energii sprężystej)

Charakterystyczne cechy energii sprężystej właściwej są następujące:

- jest sumą energii aksjatorów i dewiatorów:

$$W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \sigma_{ij}^{(o)} \cdot \varepsilon_{ij}^{(o)} + \frac{1}{2} \sigma_{ij}^{(d)} \cdot \varepsilon_{ij}^{(d)} = W^{(o)} + W^{(d)};$$

- można ją wyrazić jako funkcję naprężeń lub odkształceń

$$W_\sigma = W_\sigma^{(o)} + W_\sigma^{(d)};$$

$$W_\sigma^{(o)} = \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})^2 = \frac{1}{18K} \cdot I_{1\sigma}^2,$$

$$W_\sigma^{(d)} = \frac{1}{12G} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 3 \cdot (\sigma_{12}^2 + \sigma_{21}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{32}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{31}^2)] = -\frac{1}{2G} I_\sigma^{(d)}.$$

$$W_\varepsilon = G \left[\frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})^2 + \varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2 + (\varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2 + \varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{32}^2 + \varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{21}^2) \right]$$

- jest kwadratową jednorodną funkcją naprężeń lub odkształceń, jest zatem określona dodatnio;

– energia wyrażona przez naprężenia jest potencjałem dla odkształceń, a energia wyrażona przez odkształcenia jest potencjałem dla naprężeń

$$\frac{\partial W_{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} = \varepsilon_{ij}, \quad \frac{\partial W_{\varepsilon}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij}.$$

• **Zasada wzajemności Bettiego**

Praca pierwszego układu sił na przemieszczeniach wywołanych przez drugi układ sił L_{12} jest równa pracy drugiego układu sił na przemieszczeniach wywołanych przez pierwszy układ sił L_{21} :

$$\int_S p'_i u''_i dS + \int_V G'_i u''_i dV = \int_S p''_i u'_i dS + \int_V G''_i u'_i dV.$$

Twierdzenie Maxwella:

Przemieszczenie punktu i wywołane przez jednostkową siłę przyłożoną w punkcie k jest równe przemieszczeniu punktu k wywołanemu przez siłę jednostkową przyłożoną w punkcie i :

$$\Delta_{ik} = \Delta_{ki}.$$

• **Zasada minimum energii potencjalnej**

$$\Pi(\varepsilon) = \int_V W_{\varepsilon} dV - \int_{S_p} p_i u_i dS_p - \int_V G_i u_i dV \rightarrow \min.$$

Spośród wszystkich kinematycznie dopuszczalnych pól odkształceń równowadze odpowiada to pole, które energii potencjalnej nadaje wartość minimalną.

Jeżeli zachodzi minimum, to równowaga jest stateczna. W przypadku maksimum równowaga jest niestateczna. Oba przypadki równowagi rozdziela stan krytyczny, odpowiadający punktowi siodłowemu.

Zasada minimum energii potencjalnej obowiązuje również dla materiałów nieliniowo-sprężystych, jeśli tylko istnieje dodatnio określony potencjał sprężysty W_{ε} .

• **Zasada minimum energii dopełniającej**

$$\Pi^*(\sigma) = \int_V W_{\sigma} dV - \int_{S_u} p_i u_i dS_u \rightarrow \min.$$

Spośród wszystkich statycznie dopuszczalnych pól naprężeń kinematycznej zgodności odpowiada to pole, które energii dopełniającej nadaje wartość minimalną.

Zasada minimum energii dopełniającej obowiązuje również w odniesieniu do ciał nieliniowo-sprężystych, jeśli tylko istnieje dodatnio określony potencjał sprężysty W_{σ} .

Hipotezy Wytrzymałościowe

• **Współczynnik bezpieczeństwa – hipotezy wytrzymałościowe**

Hipotezy wytrzymałościowe służą do określenia współczynnika bezpieczeństwa w złożonym stanie naprężenia. Jest to najważniejszy problem nauki o wytrzymałości materiałów. Współczynnik bezpieczeństwa jest liczbą, przez którą należy pomnożyć współrzędne aktualnego stanu naprężenia, by osiągnąć stan niebezpieczny. Za stan niebezpieczny uważa się zazwyczaj uplastycznienie lub pęknięcie materiału.

Współczynnik bezpieczeństwa n jest stosunkiem odległości punktu niebezpiecznego od stanu $\sigma = 0$, do odległości aktualnego punktu od stanu $\sigma = 0$. Współrzędne punktów niebezpiecznego i aktualnego są odmierzane w przestrzeni naprężeń. Punkty niebezpieczne tworzą w tej przestrzeni pewną powierzchnię,

opisaną przez tzw. zależność graniczną $F(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{k}) = 0$, gdzie \mathbf{k} oznacza zbiór parametrów opisujących dla danego materiału stan niebezpieczny. Jeżeli wytrzymałość materiału (stan niebezpieczny) jest opisana tylko przez jeden parametr, to można wprowadzić pojęcie naprężenia zredukowanego (zastępczego) σ_{red} , będącego funkcją współrzędnych aktualnego stanu naprężenia, właściwie jego niezmienników. Wówczas współczynnik bezpieczeństwa oblicza się z zależności:

$$n = \frac{\sigma_n}{\sigma_{\text{red}}},$$

gdzie σ_n oznacza naprężenie niebezpieczne w jednoosiowym stanie naprężenia.

Celem hipotez wytrzymałościowych jest budowa wzorów opisujących zależności graniczne i – jeżeli jest to możliwe – wzorów na naprężenia zredukowane. Omawiana problematyka jest bardzo złożona, a do tej pory dobrze są rozpoznane tylko materiały izotropowe.

• Hipotezy wytrzymałościowe dla materiałów ciągłych

Dla materiałów ciągłych przyjmuje się model ciała idealnie sprężysto-plastycznego. Stan niebezpieczny odpowiada osiągnięciu granicy plastyczności σ_P . Dlatego hipotezy wytrzymałościowe dla materiałów ciągłych nazywają się warunkami plastyczności.

– Warunek plastyczności *Hubera-Misesa-Hencky'ego (HMH)*

Materiał przechodzi w danym punkcie w stan plastyczny wówczas, gdy gęstość energii odkształcenia postaciowego (tj. energii dewiatorów) osiąga pewną wartość graniczną, charakterystyczną dla tego materiału:

$$W_{\sigma}^{(d)} = C,$$

gdzie C jest pewną stałą materiałową.

Zależność graniczna przyjmuje postać:

$$F(\sigma_{ij}) = \frac{1}{2}[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)] - \sigma_P^2 = 0,$$

a naprężenie zredukowane:

$$\sigma_{\text{red}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)}.$$

W przypadku uplastycznienia wskutek czystego ścinania, gdy jedynym niezerowym naprężeniem jest $\sigma_{12} = \tau_P$, znajdujemy $\sigma_{\text{red}} = \sigma_P = \sqrt{3} \cdot \tau_P$, skąd można wyznaczyć granicę plastyczności przy czystym ścinaniu: $\tau_P = \sigma_P / \sqrt{3}$.

Zależność graniczną można zapisać za pomocą nieuporządkowanych wartości głównych:

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 2\sigma_P^2 = 0.$$

Obrazem geometrycznym tego równania jest walec kołowy o promieniu $\sqrt{(2/3)} \cdot \sigma_P$. Oś tego walca (tzw. oś aksjatorów) tworzy taki sam kąt z każdą z osi układu współrzędnych $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

W płaskich stanach naprężenia ($\sigma_3 = 0$) warunek plastyczności otrzymujemy w wyniku przecięcia powierzchni granicznej płaszczyzną $\sigma_3 = 0$. W głównych osiach naprężeń uzyskujemy wówczas elipsę:

$$F(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2^2 - \sigma_P^2 = 0.$$

W płaskich stanach odkształcenia ($\epsilon_3 = 0$) warunek plastyczności uzyskuje się przez rzutowanie powierzchni granicznej na płaszczyznę $\sigma_3 = \text{const}$. W przypadku głównych osi naprężeń odpowiada to obszarowi ograniczonemu dwoma równoległymi prostymi:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_P = \pm 2\tau_P.$$

– Warunek plastyczności *Treski-Guesta (TG)*

Materiał przechodzi w danym punkcie w stan plastyczny wówczas, gdy maksymalne naprężenie styczne osiągnie pewną graniczną wartość, charakterystyczną dla tego materiału:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{III}) = C_1,$$

gdzie C_1 jest pewną stałą materiałową, a σ_I i σ_{III} – największym i najmniejszym naprężeniem głównym. Zależność graniczna ma postać:

$$\sigma_I - \sigma_{III} = \sigma_P.$$

Jej obrazem geometrycznym w przestrzeni naprężeń głównych jest graniastosłup o podstawie sześcioboku foremnego i osi pokrywającej się z osią aksjatorów. Graniastosłup *Treski* jest wpisany w walec *Hubera*, a krawędzie graniastosłupa leżą na pobocznicach walca.

Naprężenie zredukowane

$$\sigma_{\text{red}} = \sigma_I - \sigma_{III}.$$

W płaskim stanie naprężenia zależność graniczna w osiach głównych jest sześciobokiem, a w płaskim stanie odkształcenia – dwoma równoległymi liniami prostymi:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \pm 2\tau_P,$$

gdzie τ_P jest granicą plastyczności przy czystym ścinaniu, która w przypadku hipotezy *Treski* określona jest wzorem: $\tau_P = \tau_P^T = \sigma_P / 2 = 0,50\sigma_P$. Granica plastyczności według warunku *Hubera* jest nieco większa: $\tau_P^H = \sigma_P / \sqrt{3} \approx 0,58\sigma_P$ i lepiej odpowiada wynikom doświadczalnym.

– Wzmocnienie plastyczne

Wzmocnienie kinematyczne (anizotropowe) odpowiada przesunięciu powierzchni plastyczności w przestrzeni naprężeń jako bryły sztywnej o wektor $\Delta\sigma_{ij}$. Warunek plastyczności można wówczas zapisać następująco:

$$F[(\sigma_{ij} - \Delta\sigma_{ij}), \sigma_P] = 0.$$

Wzmocnienie kinematyczne służy do opisu zjawiska *Bauschinger*a.

Wzmocnienie izotropowe odpowiada równomiernemu homotetycznemu „puchnięciu”. Warunek plastyczności w tym przypadku można zapisać następująco:

$$F[\sigma_{ij}, \sigma_P(\chi)] = 0,$$

gdzie χ oznacza tzw. parametr wzmocnienia.

• Ważniejsze hipotezy wytrzymałościowe dla materiałów plastyczno-kruchych

– Hipoteza największych odkształceń głównych

$$\varepsilon_i \leq \varepsilon_r \quad (i = 1, 2, 3),$$

gdzie $\varepsilon_r > 0$ oznacza graniczną wartość odkształcenia, charakterystyczną dla danego materiału. Odkształcenie to można wyliczyć z prawa *Hooke'a*, bo w trakcie próby rozciągania materiał kruchy zachowuje się sprężysto: $\varepsilon_r = \sigma_r / E$. Zależność graniczna odpowiada brzegowi obszaru określonego nierównościami:

$$\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) - \sigma_r \leq 0,$$

$$\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3) - \sigma_r \leq 0,$$

$$\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2) - \sigma_r \leq 0.$$

Zależność graniczna przedstawia ostrosłup o podstawie trójkąta równobocznego. Oś ostrosłupa pokrywa się z osią aksjatorów. Zależność tę opisują dwa parametry σ_r i ν (wytrzymałość na rozciąganie i współczynnik *Poissona*). Dlatego nie posługujemy się tutaj naprężeniem zredukowanym.

– Hipoteza *Coulomba-Mohra*

Z doświadczenia wiadomo, że zniszczenie poślizgowe lub rozdzielcze występuje na pewnych określonych powierzchniach. Hipoteza *Mohra* zakłada zatem, że o zniszczeniu materiału decyduje wektor naprężenia (tj. naprężenie normalne σ i styczne τ) na tych właśnie powierzchniach. Wartości σ i τ , odpowiadające granicznej wartości funkcji $f(\sigma, \tau)$, tworzą dla różnych stanów naprężenia pewną krzywą w przestrzeni (σ, τ) , stanowiącą granicę obszaru bezpiecznego. Ponieważ każdemu stanowi naprężenia można przypisać pewne koło *Mohra*, krzywa graniczna jest pewną obwiednią różnych kół, dla których występuje zniszczenie materiału.

Najprostsza obwiednia, zwana obwiednią *Coulomba-Mohra*, składa się z dwóch prostych:

$$|\tau| = c - \sigma \tan \varphi,$$

gdzie c i φ są stałymi materiałowymi. W przypadku gruntów, w odniesieniu do których obwiednia ma praktyczne zastosowanie, c oznacza spójność (kohezję), tzn. wytrzymałość na ścinanie bez nacisku normalnego, a φ – kąt tarcia wewnętrznego.

Obszar bezpieczny odpowiada wnętrzu ostrosłupa o osi pokrywającej się z osią aksjatorów. Przekroje ostrosłupa są nieregularnymi sześciobokami o trzech osiach symetrii. Dla kąta tarcia wewnętrznego $\varphi = 0$ obszar ten modyfikuje się do graniastosłupa, którego przekroje są sześciobokami foremnymi, co odpowiada warunkowi *Treski*, w którym kohezja oznacza naprężenia styczne powodujące uplastycznienie:

$$c = \tau_p = 0,5\sigma_p.$$

– Hipoteza *Burzyńskiego*

W myśl hipotezy *Burzyńskiego* materiał ulega zniszczeniu wówczas, gdy suma energii dewiatorów i pewnej części energii aksjatorów osiąga wartość graniczną C_2 , tzn. gdy

$$W_{\sigma}^{(d)} + \eta \cdot W_{\sigma}^{(o)} = C_2,$$

gdzie $0 \leq \eta \leq 1$. Współczynnik η zależy od stanu naprężenia i własności materiału. Dzięki dużej różnorodności kształtów powierzchni granicznych hipoteza *Burzyńskiego* znajduje zastosowanie zarówno do materiałów ciągliwych, jak i *plastyczno-kruchych*. Z powyższego wynika, że hipoteza ta zajmuje pozycję analogiczną

do warunku *Mohra*. Zasadnicza różnica geometryczna polega na tym, że powierzchnie *Burzyńskiego* są obrotowe i gładkie w przeciwieństwie do zależności *Mohra*, gdzie powierzchnie graniczne są nieobrotowe, a ich elementy składowe tworzą w ogólności krzywoliniowy ostrosłup o sześciu krawędziach i wierzchołku leżącym na osi aksjatorów.

• *Warunek projektowania wytrzymałościowego*

Aby uniknąć zniszczenia materiału musimy wymagać, by stany naprężenia w każdym punkcie konstrukcji spełniały nierówność ostrą:

$$F[\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3), \mathbf{k}] < 0.$$

W jednoparametrowych warunkach wytrzymałościowych odpowiada to wymaganiu, by naprężenie zredukowane było mniejsze od wartości niebezpiecznej:

$$\sigma_{\text{red}}(x_1, x_2, x_3) < \sigma_n.$$

W poprawnie zaprojektowanej konstrukcji musi być zachowana odpowiednio duża „odległość” aktualnego stanu naprężenia od stanu niebezpiecznego. Miarą tej odległości jest współczynnik bezpieczeństwa n .

Zwróćmy uwagę, że naprężenie zastępcze jest funkcją jednorodną pierwszego stopnia względem współrzędnych stanu naprężenia. Rozumiemy przez to, że:

$$\sigma_{\text{red}}(n\sigma_{ij}) = n\sigma_{\text{red}}(\sigma_{ij}).$$

Minimalne wartości współczynnika bezpieczeństwa n_0 podane są w normach projektowania konstrukcji. Bezpiecznie zaprojektowana konstrukcja powinna zatem spełniać warunek:

$$n \geq n_0.$$

Wartości n_0 pozwalają określić w przestrzeni naprężeń obszar dopuszczalny, którego granice odpowiadają wartościom naprężenia zastępczego $\sigma_{\text{red}} = \sigma_n / n_0$. Iloraz σ_n / n_0 nazywa się naprężeniem dopuszczalnym σ_{dop} .

Warunek projektowania wytrzymałościowego ma zatem postać:

$$\sigma_{\text{red}}(x_1, x_2, x_3) \leq \sigma_{\text{dop}} = \frac{\sigma_n}{n_0}.$$

Nierówność ta stanowi treść najprostszej metody projektowania, zwanej metodą naprężeń dopuszczalnych. Ma ona charakter lokalny i jest oparta na założeniu, że osiągnięcie w pewnym punkcie konstrukcji naprężenia niebezpiecznego oznacza zniszczenie całej konstrukcji. Jest to zasadnicza wada tej metody. Obserwujemy bowiem wiele takich konstrukcji, w których lokalnemu uplastycznieniu bądź pęknięciu towarzyszą obciążenia mniejsze od obciążeń niszczących. Wadą metody naprężeń dopuszczalnych jest również to, że współczynnik bezpieczeństwa nie zależy od charakteru oddziaływań (obciążeń).