

## 16. KONSTRUKCJE STATYCZNIE NIEWYZNACZALNE

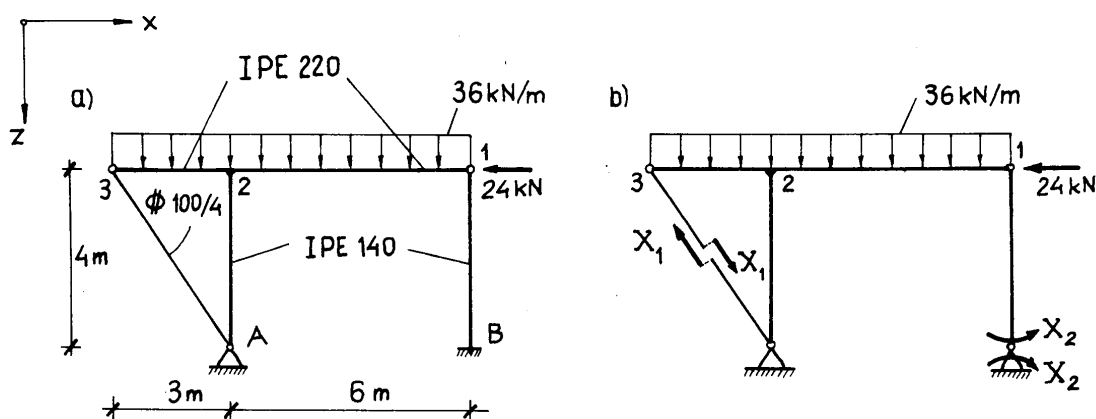


### 16.1. METODA SIŁ

#### 16.1.1. Obliczanie sił wewnętrznych

Z rozważań poprzedniego rozdziału wynika, że istnieje ścisły związek między statyczną wyznaczalnością a geometryczną niezmiennością konstrukcji. Konstrukcja statycznie niewyznaczalna jest układem przesztynionym, przy czym stopień przesztynienia jest równy stopniowi statycznej niewyznaczalności, czyli liczbie brakujących równań niezbędnych do określenia pola statycznego.

Podstawową metodą obliczania konstrukcji statycznie niewyznaczalnych jest tzw. **metoda sił**. Wywodzi się ona z następującego rozumowania. Konstrukcję statycznie niewyznaczalną można przekształcić w wyznaczalną (w tzw. **układ podstawowy**) przez usunięcie odpowiedniej liczby więzów i dodatkowe jej obciążenie reakcjami tych więzów (tzw. **siłami nadliczbowymi**). Liczba usuniętych więzów równa się stopniowi statycznej niewyznaczalności, a wartości sił nadliczbowych muszą być takie, by były spełnione kinematyczne **warunki ciągłości** (zgodności) przemieszczeń.

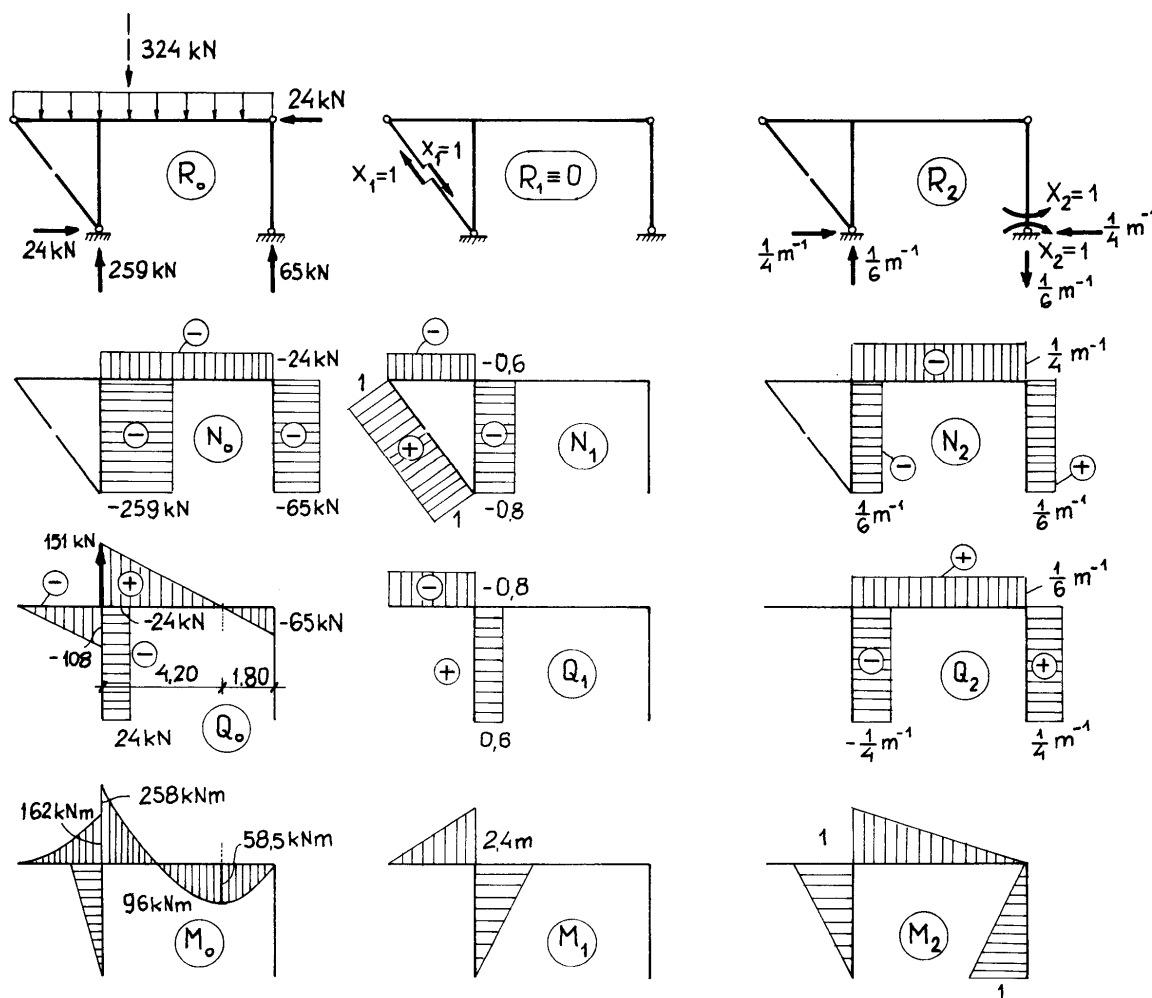


Rys. 16.1

Rozważmy konstrukcję dwukrotnie statycznie niewyznaczalną, przedstawioną na rys. 16.1a. Przy przyjmowaniu układu podstawowego mamy dużo swobody, gdyż układów takich jest nieskończenie wiele. Przyjmijmy układ podstawowy zobrazony na rys. 16.1b. Jest on statycznie wyznaczalny i geometrycznie niezmienny. Reakcje usuniętych więzów oznaczmy przez  $X_1$  i  $X_2$ . Na obciążenie układu podstawowego składają się zarówno obciążenia zewnętrzne  $q$  i  $P$ , jak i siły nadliczbowe  $X_1$  i  $X_2$ . Ponieważ przyczyny (tzn. siły nadliczbowe) i skutki (siły przekrojowe, reakcje) są powiązane liniowymi równaniami równowagi, niezależnie od charakterystyki fizycznej materiału obowiązuje zasada superpozycji zapisana zależnościami (15.3). Z zależności tych otrzymujemy następujące wyrażenia na wielkości statyczne w układzie niewyznaczalnym:

$$\begin{aligned}
 R &= R_0 + R_1 X_1 + R_2 X_2, \\
 N &= N_0 + N_1 X_1 + N_2 X_2, \\
 Q &= Q_0 + Q_1 X_1 + Q_2 X_2, \\
 M &= M_0 + M_1 X_1 + M_2 X_2,
 \end{aligned}
 \tag{a}$$

gdzie indeksem 0 oznaczono wielkości statyczne występujące w statycznie wyznaczalnym układzie podstawowym, wywołane przez obciążenie zewnętrzne, natomiast indeksy 1 i 2 odnoszą się do wielkości statycznych w układzie podstawowym wywołanych odpowiednio przez obciążenia  $X_1=1$  i  $X_2=1$ . Wymienione wyżej wielkości statyczne zestawiono na rys. 16.2. Wzór (a) opisuje nieskończenie wiele statycznie dopuszczalnych reakcji i pól sił wewnętrznych, gdyż wartości nadliczbowe  $X_1$  i  $X_2$  są na razie niewiadome.



Rys. 16.2

Zwróćmy uwagę, że w układzie statycznie wyznaczalnym stan  $X_1 = 1$  jest równoznaczny z występowaniem reakcji podporowych  $R_1$  oraz sił wewnętrznych  $N_1$ ,  $Q_1$  i  $M_1$ . W konstrukcji statycznie niewyznaczalnej układ sił  $R_1$ ,  $N_1$ ,  $Q_1$ ,  $M_1$  pozostaje zatem w równowadze z zerowym obciążeniem zewnętrznym. Pod wpływem czynników zewnętrznych (obciążenie, temperatura, błędy wykonania, osiadanie podpór) układ niewyznaczalny zdeformuje się. Miara tej deformacji są rzeczywiste uogólnione odkształcenia  $\lambda$ ,  $\beta$ ,  $k$  i związane z nimi rzeczywiste przemieszczenia uogólnione  $u$ ,  $w$ ,  $\varphi$  oraz rzeczywiste osiadania podpór  $\Delta_f^*$ . Ponieważ siły  $R_1$ ,  $N_1$ ,  $Q_1$ ,  $M_1$  są statycznie dopuszczalne, a układ  $\lambda$ ,  $\beta$ ,  $k$ ,  $u$ ,  $w$ ,  $\varphi$  i  $\Delta_f^*$  jest kinematycznie dopuszczalny, więc wielkości te spełniają równanie pracy wirtualnej (14.4) w układzie statycznie niewyznaczalnym:

$$\int_s (N_1 \lambda + Q_1 \beta + M_1 k) ds = \int_s (q_{x1} u + q_{z1} w + m_{y1} \varphi) ds + \sum_f R_{f1} \Delta_f^*.$$

Po uwzględnieniu, że obciążenie zewnętrzne jest równe zero, tzn.  $q_{x1} = q_{z1} = m_{y1} = 0$ , otrzymujemy bardzo ważną zależność:

$$(b) \quad \int_s (N_1 \lambda + Q_1 \beta + M_1 k) ds = \sum_f R_{f1} \Delta_f^*,$$

gdzie symbol całkowania dotyczy wszystkich prętów konstrukcji, a sumowanie przedstawia pracę reakcji  $R_{f1}$  na rzeczywistych przemieszczeniach podpór  $\Delta_f^*$  w układzie statycznie niewyznaczalnym. Analogiczną zależność można ułożyć dla stanu  $X_2 = 1$ . Dysponujemy zatem następującymi równaniami:

$$(c) \quad \int_s (N_i \lambda + Q_i \beta + M_i k) ds - \sum_f R_{fi} \Delta_f^* = 0, \quad i = 1, 2.$$

Równania (c) są poszukiwanymi równaniami ciągłości lub tzw. warunkami zgodności przemieszczeń. Odnotujmy, że zależność (c) obowiązuje dla każdego materiału pod warunkiem, że jest słuszna zasada zeszytnienia, czyli gdy przemieszczenia są bardzo małe.

Aby wyznaczyć wartości sił nadliczbowych, trzeba sprecyzować zależności fizyczne. Dla prętów wykonanych z materiału liniowo-sprężystego zależności te przyjmują postać (por. wzory (15.6)):

$$(d) \quad \begin{cases} \lambda = \frac{N}{EA} + \lambda^0 = \frac{1}{EA} \cdot (N_0 + N_1 X_1 + N_2 X_2) + \lambda^0, \\ \beta = \frac{Q}{(GA/k)} + \beta^0 = \frac{k}{GA} \cdot (Q_0 + Q_1 X_1 + Q_2 X_2) + \beta^0, \\ \kappa = \frac{M}{EJ} + \kappa^0 = \frac{1}{EJ} \cdot (M_0 + M_1 X_1 + M_2 X_2) + \kappa^0. \end{cases}$$

Po podstawieniu zależności fizycznych (d) do równań ciągłości (c) otrzymujemy układ równań algebraicznych do wyznaczenia sił nadliczbowych:

$$(e) \quad \begin{aligned} \Delta_{11} X_1 + \Delta_{12} X_2 + \Delta_{10} &= 0, \\ \Delta_{21} X_1 + \Delta_{22} X_2 + \Delta_{20} &= 0, \end{aligned}$$

gdzie

$$(f) \quad \begin{cases} \Delta_{ik} = \int_s \left( \frac{N_i N_k}{EA} + \frac{Q_i Q_k}{(GA/k)} + \frac{M_i M_k}{EJ} \right) ds, \quad i, k = 1, 2. \\ \Delta_{i0} = \int_s \left[ N_i \left( \frac{N_0}{EA} + \lambda^0 \right) + Q_i \left( \frac{Q_0}{(GA/k)} + \beta^0 \right) + M_i \left( \frac{M_0}{EJ} + \kappa^0 \right) \right] ds - \sum_f R_{fi} \Delta_f^*. \end{cases}$$

Układ równań (e) nosi nazwę **równań kanonicznych metody sił**. Jest to układ równań liniowych ze względu na niewiadome siły nadliczbowe  $X_1$  i  $X_2$ . Liniowość układu równań kanonicznych wynika z faktu, że materiał wszystkich prętów konstrukcji jest liniowo-sprężysty. Liniowe cechy materiału nadają współczynnikom  $\Delta_{ik}$  własność symetrii, polegającą na tym, że  $\Delta_{ik} = \Delta_{ki}$ . Własność ta wynika z twierdzenia o wzajemności *Betti* (por. p.5.4), gdyż współczynniki  $\Delta_{ik}$  mają sens przemieszczeń. Z budowy zależności (f) widać bowiem, że współczynnik  $\Delta_{ik}$  oznacza przemieszczenie punktu przyłożenia jednostkowej siły nadliczbowej  $X_i$  wywołane siłą nadliczbową działaniem  $X_k = 1$  w układzie podstawowym. Wyraz wolny  $\Delta_{i0}$  jest natomiast przemieszczeniem punktu przyłożenia siły  $X_i$  wywołanym przez działanie czynników zewnętrznych w układzie podstawowym. Każde z równań kanonicznych wyraża zatem fakt, że przemieszczenie względne w kierunku działania danej siły nadliczbowej jest równe zeru. Odnotujmy, że liczba równań kanonicznych (tzn. warunków zgodności przemieszczeń) jest równa liczbie niewiadomych sił  $X_i$ .

Dla ilustracji obliczeń metodą sił wyznaczmy siły nadliczbowe  $X_1$  i  $X_2$  oraz sporządzimy ostateczne wykresy sił są wykonane z dwuteowników walcowanych, a ukośny pręt (tzw. zastrzał) połączony przegubowo jest rurą o stałym przekroju (por. rys. 16.1a):

- słupy (IPE 140):  $A = 16,40 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2, J = 541 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4, k = 2,75,$
- rygiel (IPE 220):  $A = 33,40 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2, J = 2770 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4, k = 2,80,$
- zastrzał (rura 100/4):  $A = 12,06 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2, J = 139 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4.$

Wszystkie pręty są wykonane ze stali o module sprężystości  $E = 2,0 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$  oraz module ścinania  $G = 0,75 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$ .

Sztywności poszczególnych przekrojów wynoszą:

Słupy

$$\begin{aligned} EA &= 2 \cdot 10^8 \cdot 16,4 \cdot 10^{-4} &= 32,8 \cdot 10^4 \text{ kN}, \\ GA/k &= 0,75 \cdot 10^8 \cdot 16,4 \cdot 10^{-4} / 2,75 &= 4,45 \cdot 10^4 \text{ kN}, \\ EJ &= 2 \cdot 10^8 \cdot 541 \cdot 10^{-8} &= 0,1082 \cdot 10^4 \text{ kN} \cdot \text{m}^2, \end{aligned}$$

Rygiel

$$\begin{aligned} EA &= 2 \cdot 10^8 \cdot 33,4 \cdot 10^{-4} &= 66,8 \cdot 10^4 \text{ kN}, \\ GA/k &= 0,75 \cdot 10^8 \cdot 33,4 \cdot 10^{-4} / 2,80 &= 8,95 \cdot 10^4 \text{ kN}, \\ EJ &= 2 \cdot 10^8 \cdot 2770 \cdot 10^{-8} &= 0,554 \cdot 10^4 \text{ kN} \cdot \text{m}^2, \end{aligned}$$

Zastrzał

$$EA = 2 \cdot 10^8 \cdot 12,06 \cdot 10^{-4} = 24,12 \cdot 10^4 \text{ kN}.$$

Współczynniki  $\Delta_{ik}$  oraz  $\Delta_{i0}$  obliczymy według wzorów (f) z wykorzystaniem wykresów sił wewnętrznych podanych na rys. 16.2 ( $\lambda^0 = 0$ ,  $\beta^0 = 0$ ,  $k^0 = 0$ ,  $\Delta_f^* = 0$ ):

$$\begin{aligned} 10^4 \Delta_{11} &= \frac{0,8^2 \cdot 4}{32,8} + \frac{0,6^2 \cdot 3}{66,8} + \frac{1^2 \cdot 5}{24,15} + \frac{0,6^2 \cdot 4}{4,45} + \frac{0,8^2 \cdot 3}{8,95} + \\ &+ \frac{2,4 \cdot 3 \cdot 0,5 \cdot 0,67 \cdot 2,4}{0,1082} + \frac{2,4 \cdot 4 \cdot 0,5 \cdot 0,67}{0,554} = \\ &= 0,078 + 0,016 + 0,207 + 0,323 + 0,214 + 53,235 + 13,863 = 67,72 \text{ m / kN}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10^4 \Delta_{12} &= 10^4 \Delta_{21} = \frac{(-0,8)(-0,167)4}{32,4} + \frac{0}{66,8} + \frac{0}{24,12} + \frac{0,6(-0,25)4}{4,45} + \\ &+ \frac{0}{8,95} + \frac{-2,4 \cdot 4 \cdot 0,5 \cdot 0,67}{0,1082} + \frac{0}{0,554} = 0,016 - 0,135 - 29,575 = -29694 \text{ kN}^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10^4 \Delta_{22} &= \frac{2 \cdot 0,167^2 \cdot 4}{32,8} + \frac{0,25^2 \cdot 6}{66,8} + \frac{0}{24,12} + \frac{2 \cdot 0,25^2 \cdot 4}{4,45} + \frac{0,167^2 \cdot 6}{8,95} + \\ &+ \frac{2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 0,5 \cdot 0,67}{0,1082} + \frac{1 \cdot 6 \cdot 0,5 \cdot 0,67}{0,554} = \\ &= 0,0068 + 0,0056 + 0,1112 + 0,0186 + 24,6457 + 3,6101 = 28,3992 \text{ (kN} \cdot \text{m)}^{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10^4 \Delta_{10} &= \frac{(-0,8 \cdot 4) \cdot (-259)}{32,8} + \frac{0}{66,8} + \frac{0}{24,12} + \frac{(-0,6 \cdot 4 \cdot 24)}{4,45} + \\ &+ \frac{(-0,8 \cdot 3) \cdot (-108 \cdot 0,5)}{8,95} + \frac{(-96 \cdot 4 \cdot 0,5 \cdot 0,67 \cdot 2,4)}{0,1082} + \\ &+ \frac{162 \cdot 3 \cdot 0,5 \cdot 0,67 \cdot 2,4 - 36 \cdot 3^2 \cdot 0,125 \cdot 0,67 \cdot 3 \cdot 2,4 \cdot 0,5}{0,554} = \\ &= 25,26 - 12,94 + 14,48 - 2839,19 + 529,86 = -2282,53 \text{ m}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10^4 \cdot \Delta_{20} &= \frac{0,167 \cdot 4(259 - 65)}{32,8} + \frac{(-0,25 \cdot 6) \cdot (-2,4)}{66,8} + \frac{(-0,25 \cdot 4) \cdot (-2,4)}{4,45} + \\ &+ \frac{0,167 \cdot 6 \cdot 0,5 \cdot (151 - 65)}{8,95} + \frac{1 \cdot 4 \cdot 0,5 \cdot 96 \cdot 0,67}{0,1082} + \\ &+ \frac{258 \cdot 6 \cdot 0,67 - 36 \cdot 6^2 \cdot 0,125 \cdot 0,67 \cdot 6 \cdot 0,5}{0,554} = \\ &= 3,94 + 0,54 + 4,6 + 5,4 + 1182,99 + 346,57 = 1544,24 \text{ rad}. \end{aligned}$$

Układ równań kanonicznych (e) przybiera postać:

$$\begin{aligned} 67,72 X_1 - 29,69 X_2 &= -\Delta_{10} \cdot 10^4, \\ -29,69 X_1 + 28,40 X_2 &= -\Delta_{20} \cdot 10^4, \end{aligned}$$

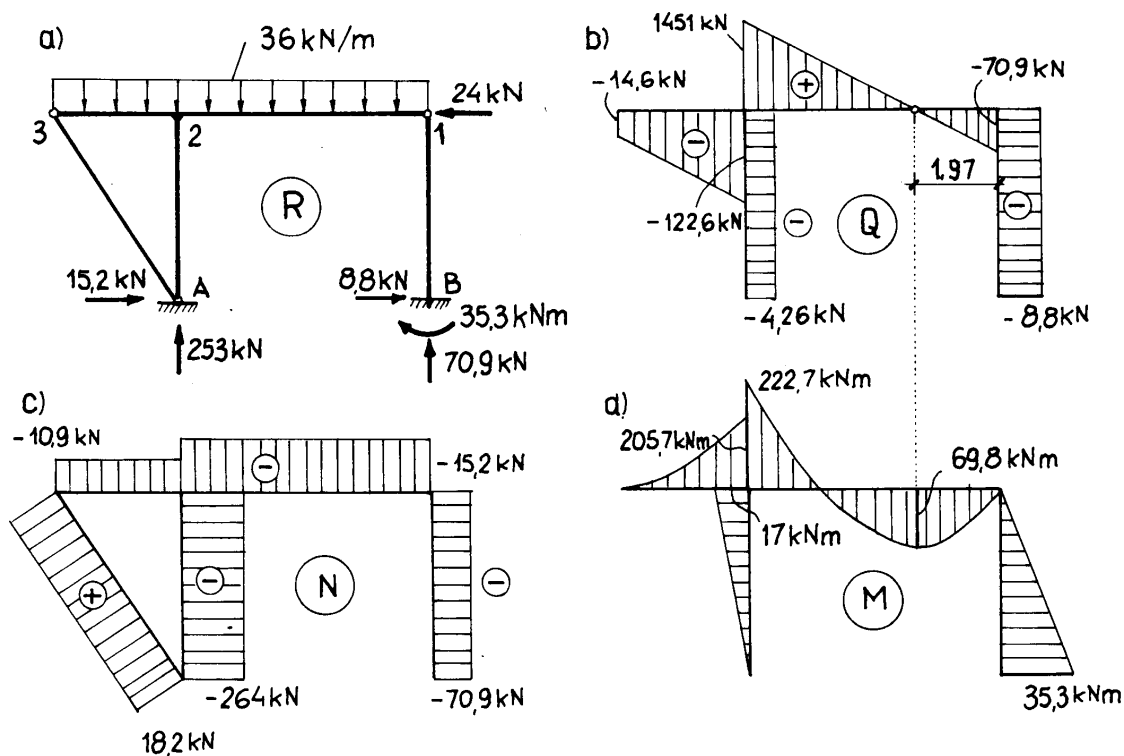
a jego rozwiązanie można wyrazić, jak następuje:

$$\begin{aligned} 10^{-4} \cdot X_1 &= \frac{28,4 \cdot (-\Delta_{10}) - 29,69 \cdot \Delta_{20}}{67,72 \cdot 28,40 - 29,69^2} = -0,02726 \cdot \Delta_{10} - 0,0285 \cdot \Delta_{20}, \\ 10^{-4} \cdot X_2 &= \frac{67,72 \cdot (-\Delta_{20}) - 29,69 \cdot \Delta_{10}}{67,72 \cdot 28,40 - 29,69^2} = -0,0285 \cdot \Delta_{10} - 0,065 \cdot \Delta_{20}. \end{aligned}$$

Po podstawieniu wartości  $\Delta_{10}$  i  $\Delta_{20}$  otrzymujemy siły nadliczbowe:

$$\begin{aligned} X_1 &= -0,02726 \cdot (-2282,53) - 0,0285 \cdot 1544,24 = 18,2 \text{ kN}, \\ X_2 &= -0,02850 \cdot (-2282,53) - 0,0650 \cdot 1544,24 = -35,3 \text{ kNm}. \end{aligned}$$

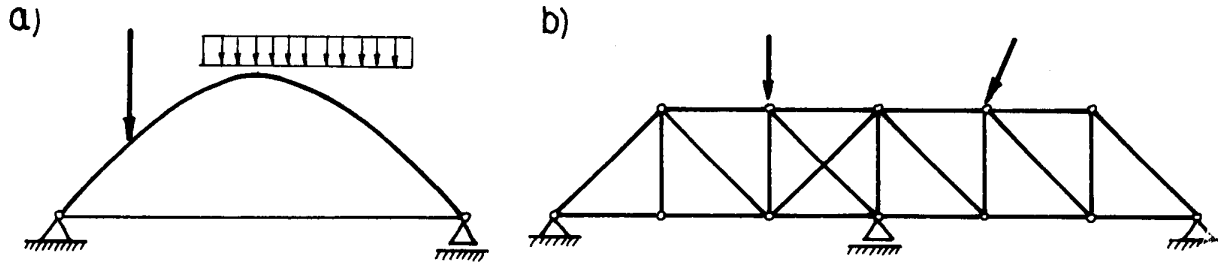
Ostateczne wartości reakcji i sił wewnętrznych można wyznaczyć za pomocą równań (a). Innym sposobem jest ponowne obliczenie układu podstawowego poddanego działaniu obciążeń zewnętrznych oraz znanych już sił nadliczbowych  $X_1$  i  $X_2$ . Reakcje i siły wewnętrzne w układzie niewyznaczalnym podano na rys. 16.3.



Rys. 16.3

Z przytoczonych rachunków widać, że zginanie ma dominujący wpływ na wartości współczynników układu równań kanonicznych. Wniosek ten trzeba stosować z dużą ostrożnością, bo są konstrukcje, w których równie istotny jest wpływ wydłużeń. Do takich konstrukcji należą np. łuki ze ściągiem (rys. 16.4a). Ponieważ ściąga ma na ogół stosunkowo mały przekrój, wpływ jego wydłużenia jest bardzo

istotny i nie można go pominąć. Podobnie jest w kratownicach (rys. 16.4b), w których wydłużenia prętów są jedyną przyczyną pojawienia się przemieszczeń. Wpływ sił poprzecznych jest z reguły bardzo mały i nieomal zawsze można go pominąć. Wyjątek stanowią belki lub ramy wykonane z bardzo krępych prętów (np. fundamenty ramowe pod turbogeneratory), w których stosunek wysokości przekrojów do rozpiętości jest rzędu 1/10.



Rys. 16.4

### 16.1.2. Ogólne sformułowanie metody sił dla konstrukcji prętowych

W poprzednim podrozdziale sformułowano metodę sił dla konstrukcji płaskich obciążonych w swej płaszczyźnie. W ogólnym przypadku  $n$ -krotnie statycznie niewyznaczalnej konstrukcji przestrzennej występuje sześć uogólnionych naprężeń  $Y_j$  i sześć uogólnionych odkształceń  $e_j$  ( $j = 1, 2, \dots, 6$ ):

$$\left. \begin{aligned} \{Y_j\} &= \{N, Q_y, Q_z, \mathfrak{M}, M_y, M_z\}, \\ \{e_j\} &= \{\lambda, \beta_y, \beta_z, \theta, k_y, k_z\}. \end{aligned} \right\} \quad (16.1)$$

Zasadę superpozycji dla reakcji  $R_f$  i sił wewnętrznych  $Y_j$  można zapisać następująco (por. wzory (a) z p. 16.1.1):

$$R_f = R_{f0} + \sum_{i=1}^n R_{fi} X_i, \quad Y_j = Y_{j0} + \sum_{i=1}^n Y_{ji} X_i, \quad (16.2)$$

gdzie  $R_{fi}$  oznacza  $f$ -tą reakcję, a  $Y_{ji}$   $j$ -tą siłę wewnętrzną w przyjętym układzie podstawowym, wywołane stanem  $X_i = 1$ .

Uogólnieniem zależności (c) z p. 16.1.1 są równania zgodności zapisane następująco:

$$\int_s \left( \sum_{j=1}^6 Y_{ji} \cdot e_j \right) ds - \sum_f R_{fi} \cdot \Delta_f^* = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (16.3)$$

Zależności (16.2) i (16.3) są słuszne dla konstrukcji wykonanych z dowolnego materiału, wykazujących małe przemieszczenia. Wartości sił nadliczbowych można jednak obliczyć dopiero z chwilą określenia własności fizycznych materiału.

Dla konstrukcji wykonanych z materiału liniowo-sprężystego związki fizyczne można zapisać następująco (por. wzór (15.6a)):

$$e_j = \frac{Y_j}{D_j} + e_j^0, \quad j = 1, 2, \dots, 6, \quad (16.4)$$

gdzie  $D_j$  oznacza wektor sztywności przekrojów prętów:

$$\{D_j\} = \{EA, GA / k_y, GA / k_z, GJ_s, EJ_y, EJ_z\}, \quad (16.5)$$

a  $e_j^0$  są uogólnionymi odkształceniami wywołanymi przez wpływy niemechaniczne.

Po podstawieniu równania (16.1) do związków fizycznych (16.4) otrzymujemy:

$$e_j = [(Y_{j0} + Y_{ji}X_i) / D_j] + e_j^0, \quad j = 1, 2, \dots, 6. \quad (16.6)$$

Uwzględnienie tych równań w warunkach zgodności przemieszczeń (16.3) prowadzi do układu równań kanonicznych metody sił:

$$\sum_{i=1}^n \Delta_{ik} \cdot X_k + \Delta_{i0} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (16.7)$$

gdzie

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{ik} = \Delta_{ki} &= \int_s \left( \sum_{j=1}^6 \frac{Y_{ji}Y_{jk}}{D_j} \right) ds, \\ \Delta_{i0} &= \int_s \left[ \sum_{j=1}^6 Y_{ji} \left( \frac{Y_{j0}}{D_j} + e_j^0 \right) \right] ds - \sum_f R_{fi} \cdot \Delta_f^*. \end{aligned} \right\} \quad (16.8)$$

### 16.1.3. Obliczanie przemieszczeń konstrukcji liniowo-sprężystych. Kontrola kinematyczna

Założmy, że w statycznie niewyznaczalnym i liniowo-sprężystym układzie prętowym są obliczone siły wewnętrzne  $Y_j$ , wywołane przez obciążenia zewnętrzne oraz odkształcenia niemechaniczne  $e_j^0$  i przemieszczenia podpór  $\Delta_f^*$ . Należy obliczyć uogólnione przemieszczenie  $\Delta_k$  (przesunięcie lub kąt obrotu) przekroju usytuowanego w punkcie  $k$ .

Do rozwiązania tak sformułowanego problemu wykorzystujemy bezpośrednio równanie pracy wirtualnej (14.6). Warunki zadania pozwalają określić uogólnione odkształcenia układu statycznie niewyznaczalnego:  $e_j = e_j^0 + Y_j / D_j$ . Odkształcenia te oraz stowarzyszone z nimi przemieszczenia konstrukcji (w tym przemieszczenia podpór  $\Delta_f^*$  i poszukiwane przemieszczenia  $\Delta_k$ ) są kinematycznie dopuszczalne, gdyż spełniają warunki ciągłości. Trzeba skonstruować odpowiednie statycznie dopuszczalne wirtualne pole sił. Możliwości jest tu nieskończenie wiele. Najwygodniej jest jednak przyjąć pole odpowiadające układowi statycznie wyznaczalnemu. Układ ten obciążymy uogólnioną siłą wirtualną  $\bar{P}_k = \bar{1}$ , wykonującą pracę na poszukiwanym przemieszczeniu  $\Delta_k$ . Stan  $\bar{P}_k = \bar{1}$  wywołuje w układzie statycznie wyznaczalnym siły wewnętrzne  $\bar{Y}_{jk}$  i reakcje podpór  $\bar{R}_{fk}$ . Równanie pracy wirtualnej (14.6) ma zatem postać:

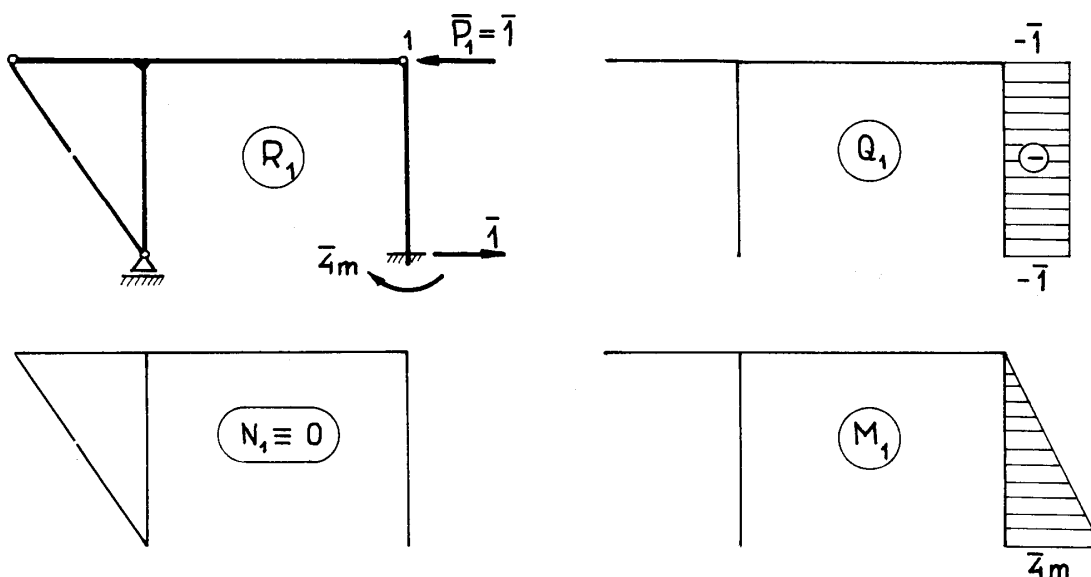
$$\bar{1} \cdot \Delta_k + \sum_f \bar{R}_{fk} \cdot \Delta_f^* = \int_s \left( \sum_{j=1}^6 \bar{Y}_{jk} e_j \right) ds,$$

lub po wykorzystaniu wyrażenia na  $e_j$ :

$$\bar{1} \cdot \Delta_k = \int_s \left[ \sum_{j=1}^6 \bar{Y}_{jk} \left( \frac{Y_j}{D_j} + e_j^0 \right) \right] ds - \sum_f \bar{R}_{fk} \cdot \Delta_f^*. \quad (16.9)$$

Wzór (16.9) stanowi rozwiązanie postawionego zadania. Zwróćmy uwagę na to, że przyjęty układ statycznie wyznaczalny jest zupełnie dowolny i może różnić się od układu podstawowego.

Dla ilustracji powyższych wywodów obliczymy przemieszczenia poziome punktu 1 w obliczonej już konstrukcji statycznie niewyznaczalnej z rys. 16.1a. Pole sił wewnętrznych  $\{Y_j\} = \{N, 0, Q, 0, M, 0\}$  w układzie statycznie niewyznaczalnym przedstawiono na rys. 16.3. Odształcenia  $e_j^0 = 0$  oraz przemieszczenia podpór  $\Delta_f^* = 0$ .



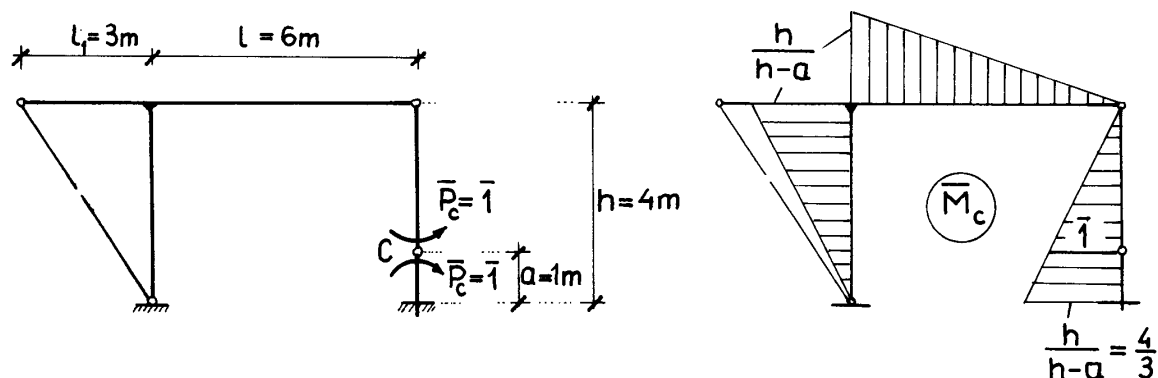
Rys. 16.5

Układ statycznie wyznaczalny przyjęty do obliczania przemieszczenia  $\Delta_1$ , jego obciążenie wirtualne  $\bar{P}_1$ , reakcje  $\bar{R}_{f1}$  i siły wewnętrzne  $\bar{Y}_{j1} = \{0, 0, \bar{Q}, 0, \bar{M}, 0\}$  ilustruje rys. 16.5. Siła wirtualna  $\bar{P}_1 = 1$  jest zaczepiona w punkcie 1 i ma kierunek poszukiwanego przemieszczenia. Dzięki stosownie przyjętemu schematowi wyznaczalnemu całkowanie obejmuje tylko jeden pręt. Na podstawie wzoru (16.9) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \bar{1} \cdot \Delta_1 &= \int_s \left[ \bar{Q} \cdot \left( \frac{Qk}{GA} \right) + \bar{M} \cdot \left( \frac{M}{EJ} \right) \right] ds = \\ &= \frac{(-8,8 \cdot 4) \cdot (-1)}{4,45 \cdot 10^4} + \frac{4 \cdot 4 \cdot 0,5 \cdot 0,67 \cdot 35,3}{0,1082 \cdot 10^4} = 7,9 \cdot 10^{-4} + 1740 \cdot 10^{-4} = 0,17479 \text{ m.} \end{aligned}$$

Przemieszczenie to jest bardzo duże i stawia pod znakiem zapytania zarówno stosowność zasady zeszywnienia, jak i techniczną przydatność konstrukcji. Konstrukcja jest zbyt wiotka. Należałoby więc powtórzyć obliczenia przyjmując większe przekroje prętów.

Umiejętność obliczenia przemieszczeń konstrukcji statycznie niewyznaczalnej pozwala sprawdzić te obliczenia. Można bowiem skontrolować, czy rzeczywiście są spełnione warunki ciągłości w wybranych punktach konstrukcji. Sprawdzimy przykładowo, czy wzajemny kąt obrotu przekrojów prawego słupa ramy jest równy zeru. W tym celu obierzemy taki schemat wyznaczalny, w którym może wystąpić wzajemny kąt obrotu wybranego przekroju słupa. Przyjmijmy, że przekrój ten jest usytuowany w punkcie C (rys. 16.6). Zatem w punkcie tym należy wprowadzić przegub, a jako obciążenie wirtualne przyjąć dwa momenty skupione  $\bar{P}_C = \bar{1}$  działające na obie części konstrukcji, rozdzielone przegubem.



Rys. 16.6

Poszukiwany wzajemny kąt obrotu  $\Delta_C$  obliczymy z równania (16.9), w którym dla uproszczenia uwzględnimy tylko wpływ momentów zginających. Wykres momentów rzeczywistych przedstawia rys. 16.3d, a wirtualnych – rys. 16.6. Mamy więc:

$$\begin{aligned} \bar{1} \cdot \Delta_C &= \frac{17 \cdot 4 \cdot 0,5 \cdot 0,67 \cdot 1,33}{0,1082 \cdot 10^4} + \\ &+ \frac{222,7 \cdot 6 \cdot 0,5 \cdot 0,67 \cdot 1,33 - 36 \cdot 6 \cdot 0,125 \cdot 0,67 \cdot 6 \cdot 133 \cdot 0,5}{0,554 \cdot 10^4} - \\ &- \frac{35,3 \cdot 4 \cdot 0,5 \cdot 0,67 \cdot 133}{0,1082 \cdot 10^4} = 0,02786 + 0,02950 - 0,05785 = -0,00049 \text{ rad} \approx 0. \end{aligned}$$

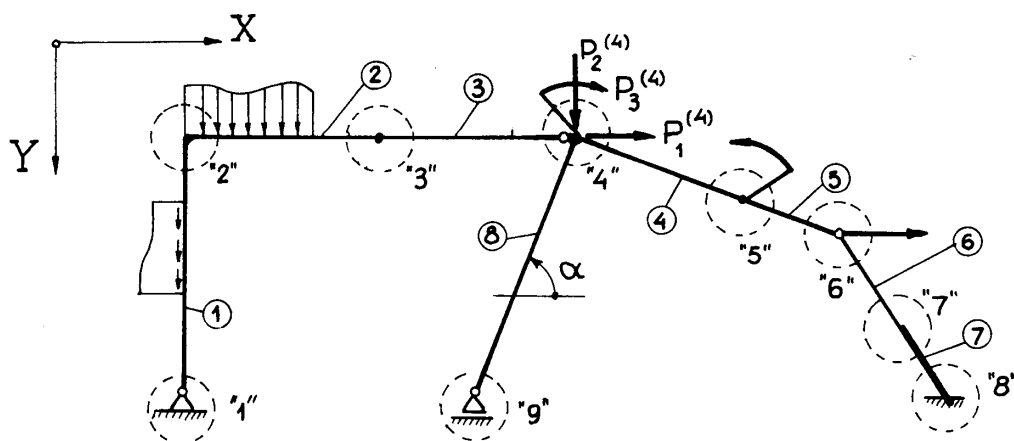
Kontrola wykazała zatem, że obliczenia są poprawne. Zwróćmy uwagę, że w przypadku badania innych przemieszczeń, np. kąta obrotu na podporze  $B$ , poziomego przesunięcia podpory  $A$  lub kąta wzajemnego obrotu dowolnego przekroju prawego słupa, wykresy momentów wirtualnych są geometrycznie podobne do wykresu z rys. 16.6. Przemieszczenia te będą więc także równe zero. Trzeba jednak dodać, że powyższe sprawdzenie nie gwarantuje, że całość obliczeń jest poprawna, gdyż nie obejmuje ono wszystkich fragmentów konstrukcji i wszystkich możliwych przemieszczeń.

Opisana wyżej metoda sprawdzania nosi nazwę **kontroli kinematycznej**.

## 16.2. METODA PRZEMIESZCZEŃ

### 16.2.1. Ogólny opis metody

W metodzie przemieszczeń konstrukcję prętową traktujemy jako pewien skończony **zbiór węzłów**, z których każdy ma określoną liczbę stopni swobody. Za węzły (por. rys. 16.7) uważamy niewielkie fragmenty konstrukcji zawierające zazwyczaj wszystkie punkty załamania osi (np. punkty 2 i 6), punkty w których zbiega się większa liczba prętów (punkt 4) i punkty podporowe (punkty 1, 8 i 9). Niejednokrotnie dogodne jest wyodrębnienie węzłów zawierających punkty nagłej zmiany przekroju (punkt 7) i punkty przyłożenia obciążeń skupionych (punkt 5). Węzłem może być również fragment zawierający dowolnie obrany punkt leżący na osi pręta (np. punkt 3).



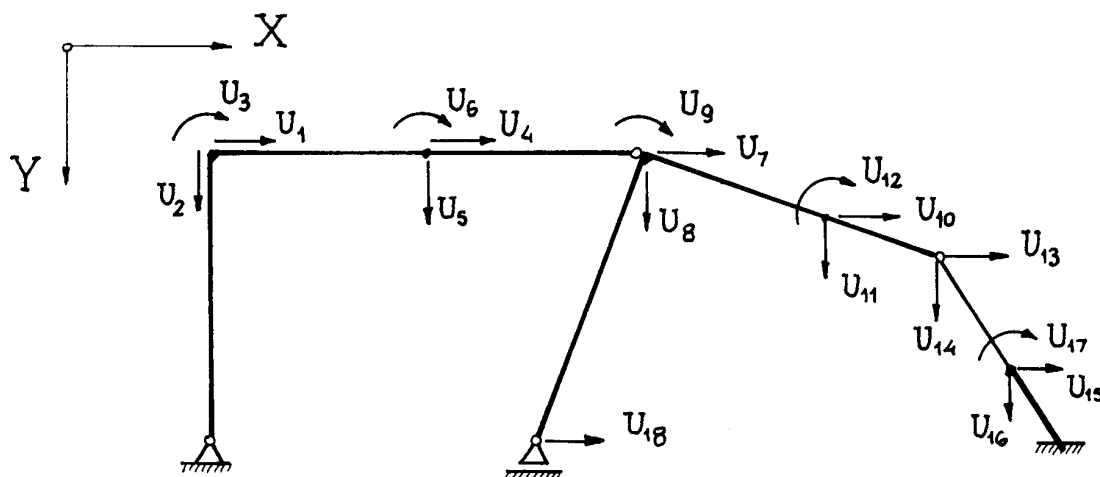
Rys. 16.7

Elementy międzywęzłowe nazywamy prętami. Numery prętów ramy z rys. 16.7 zapisano w kółkach.

Z uwagi na bardzo małe wymiary węzły można traktować jako bryły (tarcze) sztywne lub punkty materialne. W przypadku konstrukcji płaskiej węzły, w których choćby dwa pręty są połączone w sposób sztywny, są tarczami sztywnymi (węzły 2, 3, 4, 5, 7, 8). Węzły zawierające przeguby są punktami materialnymi (węzły 1, 6, 9). **Węzły sztywne** na płaszczyźnie mają zatem co najwyżej trzy stopnie swobody (dwa przesunięcia i obrót), a **węzły przegubowe** – co najwyżej dwa stopnie swobody (dwa przesunięcia).

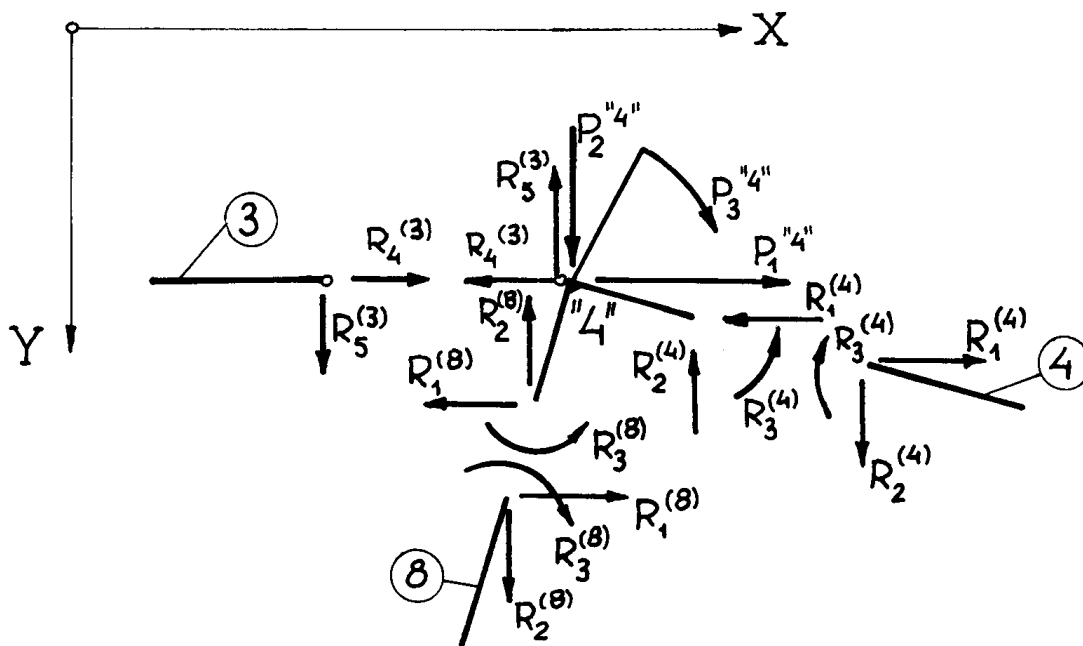
Podpory konstrukcji odbierają węzłom pewną liczbę stopni swobody. Przegubowy węzeł podporowy 1 oraz sztywny węzeł podporowy 8 są więc węzłami nieruchomymi. Przegubowy węzeł podporowy 9 ma z kolei tylko jeden stopień swobody. Pozostałe węzły mają pełną liczbę stopni swobody. Układ więzów przyjęty na rys. 16.7 odpowiada w sumie osiemnastu stopniom swobody ( $5 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 1 = 18$ ).

Po obciążeniu konstrukcji każdy z węzłów się przemieści. Położenie węzłów w konfiguracji po odkształceniu opisują uogólnione przemieszczenia  $U_1, U_2, \dots, U_{18}$ , odniesione do globalnego układu współrzędnych  $X, Y$  i odpowiadające całkowitej liczbie stopni swobody (rys. 16.8). Przemieszczenia te są wielkościami niewiadomymi w omawianej metodzie.



Rys. 16.8

Do wyznaczenia wartości przemieszczeń węzłów wykorzystuje się równania równowagi węzłów. Równania te odpowiadają sumie rzutów sił na kierunki wyznaczone przez wektory przesunięć oraz sumie momentów względem osi kątów obrotu danego węzła. Całkowita liczba równań równowagi pokrywa się zatem z liczbą niewiadomych przemieszczeń. Dla przykładu napiszemy równania równowagi węzła 4 (rys. 16.9):

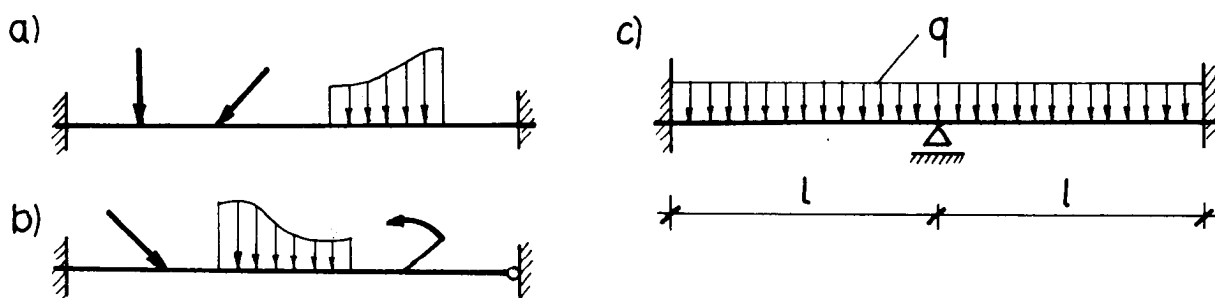


Rys. 16.9

$$\left. \begin{aligned} \sum P_X = 0: \quad R_1^{(4)} + R_1^{(8)} + R_4^{(3)} &= P_1''' \\ \sum P_Y = 0: \quad R_2^{(4)} + R_2^{(8)} + R_5^{(3)} &= P_2''' \\ \sum M_z = 0: \quad R_3^{(4)} + R_3^{(8)} &= P_3''' \end{aligned} \right\} \quad (16.10)$$

W równaniach (16.10)  $P_1'''$ ,  $P_2'''$  i  $P_3'''$  są bezpośrednimi obciążeniami węzła 4, a wielkości  $R_j^{(m)}$  oznaczają reakcje działające na końce pręta  $m$ , łączącego się z węzłem 4. Wartość indeksu  $j$  ustala się według zasad podanych w następnym punkcie.

Opisana metoda ma sens dopiero wówczas, gdy reakcje prętów zapiszemy jako funkcje przemieszczeń sąsiednich węzłów. Postać tych funkcji zależy od usytuowania pręta, wymiarów geometrycznych, własności fizycznych materiału oraz warunków brzegowych danego pręta (por. p. 16.2.3).



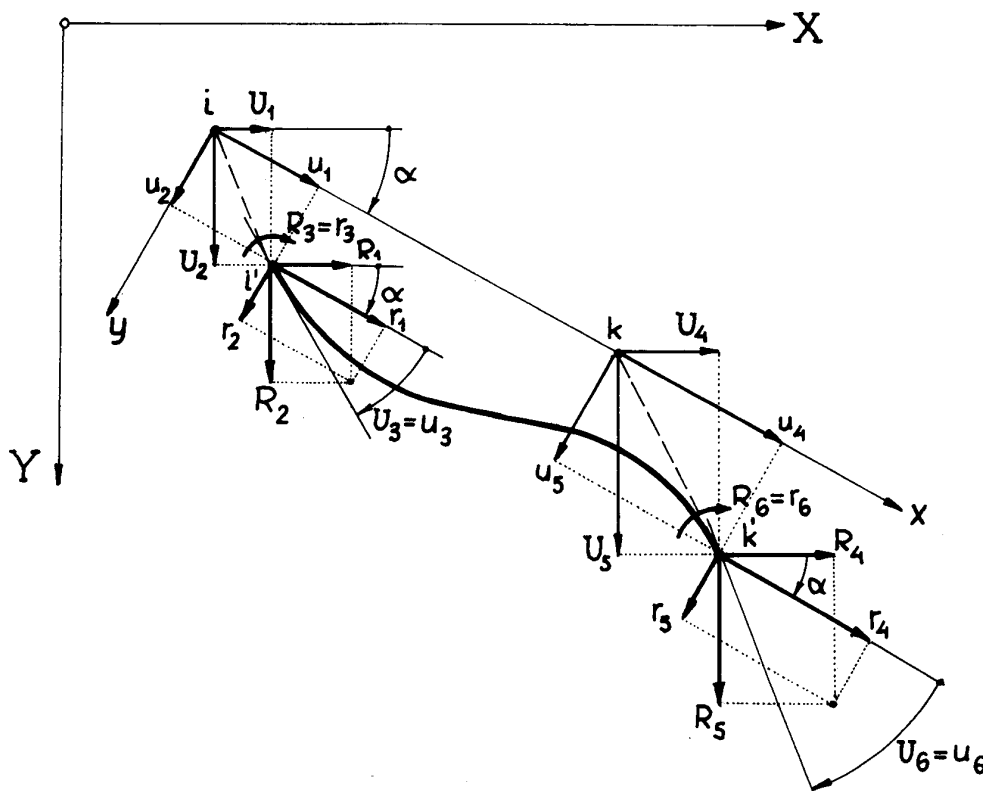
Rys. 16.10

Całkowita liczba niewiadomych stopni swobody węzłów nazywa się **stopniem kinematycznej niewyznaczalności** konstrukcji. Układem kinematycznie wyznaczalnym jest zatem konstrukcja o zerowej liczbie stopni swobody, czyli konstrukcja, w której wszystkie węzły są nieruchome (tzn.  $U_1 = U_2 = \dots = U_j = \dots = 0$ ). Przykłady konstrukcji kinematycznie wyznaczalnych zamieszczono na rys. 16.10. Kinematyczna wyznaczalność układu z rys. 16.10c wynika z symetrii konstrukcji i obciążenia.

W podsumowaniu dodamy, że metody przemieszczeń i sił stanowią dwie podstawowe metody obliczeń konstrukcji. Metoda sił służy do obliczania konstrukcji statycznie niewyznaczalnych, przy czym jako niewiadome występują wielkości statyczne, a równania tej metody wyrażają zgodność przemieszczeń. Metoda przemieszczeń służy do obliczania układów kinematycznie niewyznaczalnych, przy czym niewiadomymi są tutaj uogólnione przemieszczenia węzłów, a równania kanoniczne tej metody mają sens równań równowagi. Warto zwrócić uwagę, że metodą przemieszczeń można obliczyć również układy statycznie wyznaczalne, podobnie zresztą jak i metodą sił oblicza się układy kinematycznie wyznaczalne.

### 16.2.2. Globalne i lokalne układy współrzędnych

Rozważmy pręt prostoliniowy wyodrębniony myślowo z konstrukcji. W konfiguracji pierwotnej końce tego pręta są wyznaczone punktami  $i, k$ . Po obciążeniu pręt ulega deformacji, a jego końce przyjmują położenie  $i', k'$  (por. rys. 16.11).



Rys. 16.11

Aktualne położenie przywęzłowych przekrojów pręta opisują uogólnione przemieszczenia  $U_1, U_2, U_3, U_4, U_5$  i  $U_6$ , odniesione do globalnego układu współrzędnych  $X, Y$ . Na końcu pręta w konfiguracji aktualnej działają reakcje  $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5$  i  $R_6$ , również odniesione do układu globalnego.

Odształcenia i reakcje pręta można analizować także w lokalnym układzie współrzędnych  $x, y$ . Początek tego układu przyjmujemy w punkcie  $i$ , przy czym oś  $x$  pokrywa się z osią pręta w konfiguracji pierwotnej. Przeszacowania przekrojów przywęzłowych w układzie lokalnym opisują składowe  $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5$  i  $u_6$ , a reakcje opisują składowe  $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5$  i  $r_6$ .

Z rysunku 16.11 wynikają następujące zależności między składowymi przemieszczeń w obu układach:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= U_1 \cdot \cos\alpha + U_2 \cdot \sin\alpha, \\ u_2 &= -U_1 \cdot \sin\alpha + U_2 \cdot \cos\alpha, \\ u_3 &= U_3, \\ u_4 &= U_4 \cdot \cos\alpha + U_5 \cdot \sin\alpha, \\ u_5 &= -U_4 \cdot \sin\alpha + U_5 \cdot \cos\alpha, \\ u_6 &= U_6. \end{aligned} \right\} \quad (16.11)$$

Zależność tę można zapisać krócej:

$$u_j = \sum_{m=1}^6 C_{jm} \cdot U_m, \quad j = 1, 2, \dots, 6, \quad (16.11a)$$

gdzie  $C_{jm}$  oznacza elementy macierzy kosinusów kierunkowych. Macierz ta ma postać:

$$[C_{jm}] = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (16.12)$$

Po wyrażeniu wartości  $U_j$  z układu globalnego przez wartości  $u_m$  z układu lokalnego ( $j, m = 1, 2, \dots, 6$ ) otrzymujemy:

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= u_1 \cdot \cos\alpha - u_2 \cdot \sin\alpha, \\ U_2 &= u_1 \cdot \sin\alpha + u_2 \cdot \cos\alpha, \\ U_3 &= u_3, \\ U_4 &= u_4 \cdot \cos\alpha - u_5 \cdot \sin\alpha, \\ U_5 &= u_4 \cdot \sin\alpha + u_5 \cdot \cos\alpha, \\ U_6 &= u_6 \end{aligned} \right\} \quad (16.13)$$

lub krócej:

$$U_j = \sum_{m=1}^6 \bar{C}_{jm} \cdot u_m, \quad j = 1, 2, \dots, 6, \quad (16.13a)$$

gdzie macierz  $[\bar{C}_{jm}]$  jest macierzą odwrotną do macierzy  $[C_{jm}]$ :

$$[\bar{C}_{jm}] = [C_{jm}]^{-1}. \quad (16.14)$$

Podobne zależności zachodzą dla reakcji  $R_j$  i  $r_m$ :

$$r_j = \sum_{m=1}^6 C_{jm} \cdot R_m, \quad (16.15)$$

$$R_j = \sum_{m=1}^6 \bar{C}_{jm} \cdot r_m, \quad j = 1, 2, \dots, 6. \quad (16.16)$$

### 16.2.3. Wzory transformacyjne. Macierz sztywności pręta w układzie lokalnym

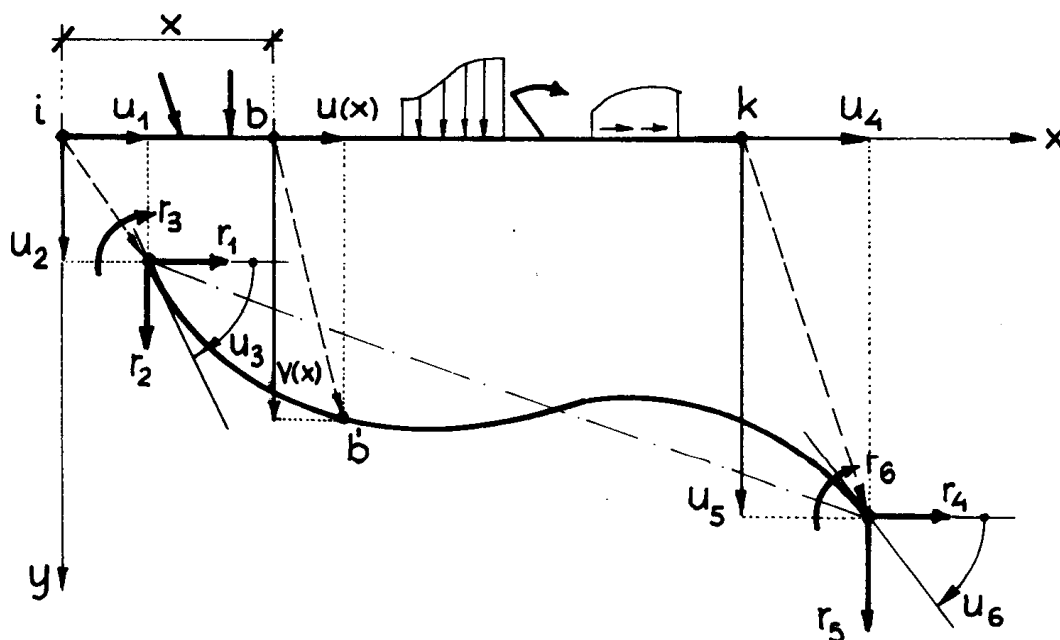
W punkcie 16.2.1 stwierdziliśmy, że budowa związków  $R_j(U_m)$  zależy od usytuowania pręta, wymiarów geometrycznych, własności fizycznych materiału oraz warunków brzegowych danego pręta.

Skoncentrujemy się na analizie zależności  $r_j(u_m)$  w układzie lokalnym, co pozwoli zaniedbać chwilowo wpływ usytuowania pręta względem układu współrzędnych globalnych. Jakościowe cechy relacji  $r_j(u_m)$  zależą od modelu fizycznego pręta oraz rzędu wartości przemieszczeń. Jeśli materiał pręta jest liniowo-sprężysty, a przemieszczenia węzłów są bardzo małe, to zależności  $r_j(u_m)$  są liniowe. Dla dużych przemieszczeń konieczne jest rozróżnienie konfiguracji początkowej i aktualnej oraz sprecyzowanie charakteru obciążeń (konserwatywne lub niekonserwatywne). Funkcje  $r_j(u_m)$  są wówczas nieliniowe. Ten sam efekt występuje dla materiałów fizycznie nieliniowych. Największe trudności napotykamy w materiałach, w którym zależności  $\sigma(\epsilon)$  są nieodwracalne (np. w materiałach sprężysto-plastycznych). Konieczne są wtedy dodatkowe informacje o obciążeniach konstrukcji (charakter wzrostu obciążenia, kolejność przykładania obciążeń itp.).

W dalszym ciągu ograniczymy się do analizy najprostszych przypadków liniowych, odpowiadających następującym założeniom:

- pręt jest pryzmatyczny ( $A, J = \text{const}$ ),
- materiał pręta jest liniowo-sprężysty i jednorodny ( $E = \text{const}$ ),
- przemieszczenia końców pręta (tj. przemieszczenia sąsiednich węzłów) są bardzo małe,
- obowiązuje hipoteza *Bernoulliego* (pręty są dostatecznie smukłe).

Rozważmy pręt  $i-k$  przedstawiony na rysunku 16.12. Po obciążeniu całej konstrukcji pręt przyjmuje położenie  $i'-k'$ , a dowolny punkt  $b$  leżący w odległości  $x$  od początku lokalnego układu współrzędnych  $x, y$  przyjmuje położenie  $b'$ . Położenie to określają współrzędne wektora przemieszczenia  $u(x)$  i  $v(x)$ . Analizowany problem rozwiążemy za pomocą równań różniczkowych na funkcje  $u(x)$  i  $v(x)$ .



Rys. 16.12

W myśl równania (14.26)<sub>1</sub> mamy:

$$(a) \quad \frac{dN}{dx} = -q_x(x).$$

Ponieważ

$$(b) \quad N = EA\lambda = EA \frac{du}{dx},$$

więc

$$(c) \quad \frac{d}{dx} \left( EA \frac{du}{dx} \right) = -q_x(x).$$

Dla funkcji  $v(x)$  obowiązuje równanie różniczkowe linii ugięcia:

$$(d) \quad \frac{d^2}{dx^2} \left( EJ \frac{d^2 v}{dx^2} \right) = q_y(x).$$

Dla pręta pryzmatycznego i jednorodnego  $EA = \text{const}$  i  $EJ = \text{const}$ . Wówczas równania (c) i (d) upraszczają się do postaci:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = -\frac{q_x(x)}{EA}, \quad (16.17)$$

$$\frac{d^4 v}{dx^4} = \frac{q_y(x)}{EJ}. \quad (16.18)$$

Równania te uzupełnimy warunkami brzegowymi:

$$u(0) = u_1, \quad u(l) = u_4, \quad (16.19)$$

$$v(0) = u_2, \quad v(l) = u_5, \quad v'(0) = u_3, \quad v'(l) = u_6. \quad (16.20)$$

Rozwiązaniem ogólnym równania (16.17) jest funkcja:

$$u(x) = u^0(x) + B_0 + B_1 x, \quad (16.21)$$

gdzie  $u^0(x)$  jest całką równania niejednorodnego, spełniającą jednorodne warunki brzegowe:

$$u^0(0) = u^0(l) = 0.$$

Wobec tego stałe całkowania  $B_0$  i  $B_1$  obliczamy z warunków brzegowych (16.19):

$$\begin{aligned} B_1 \cdot 0 + B_0 &= u_1, \\ B_1 \cdot l + B_0 &= u_4, \end{aligned} \quad \text{stąd} \quad B_1 = (u_4 - u_1)/l, \quad B_0 = u_1.$$

Zatem

$$u(x) = u^0(x) + u_1 + \frac{u_4 - u_1}{1} \cdot x. \quad (16.22)$$

Rozwiązaniem ogólnym równania (16.18) jest funkcja:

$$v(x) = v^0(x) + C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3, \quad (16.23)$$

gdzie  $v^0(x)$  jest całką równania niejednorodnego spełniającą jednorodne warunki brzegowe:

$$v^0(0) = v^0(l) = v^{0'}(0) = v^{0'}(l) = 0.$$

Stałe  $C_0$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  i  $C_3$  obliczymy z warunków brzegowych (16.20):

$$\begin{aligned} u_2 &= v(0) - v^0(0) = C_0, \\ u_2 &= v'(0) - v^{0'}(0) = C_1, \\ u_5 &= v(l) - v^0(l) = u_2 + lu_3 + l^2C_2 + l^3C_3, \\ u_6 &= v'(l) - v^{0'}(l) = u_3 + 2lC_2 + 3l^2C_3, \end{aligned}$$

skąd

$$C_0 = u_2, C_1 = u_3, C_2 = -\frac{1}{l} \left( 2u_3 + u_6 - 3 \frac{u_5 - u_2}{1} \right), C_3 = \frac{1}{l^2} \left( u_3 + u_6 - 2 \frac{u_5 - u_2}{l} \right). \quad (16.24)$$

Wykorzystamy teraz znane zależności fizyczne.

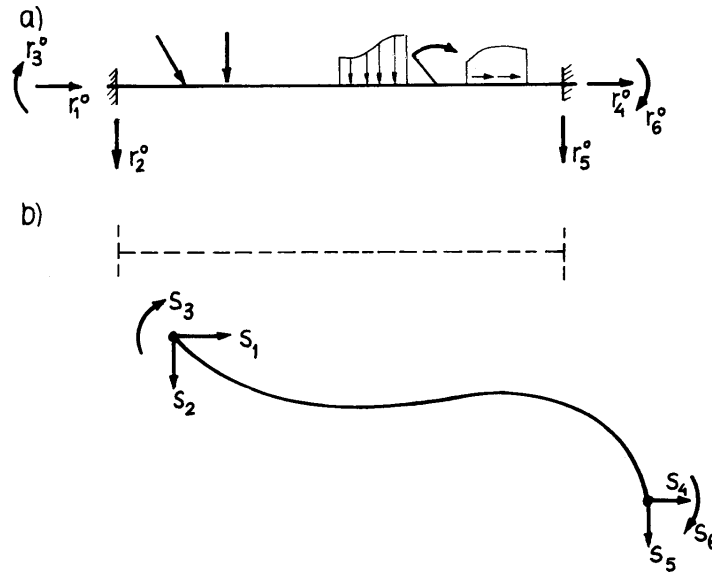
$$\left. \begin{aligned} N &= EA \cdot u'(x), \\ M &= -EJ \cdot v''(x), \\ Q &= M'(x) = -EJ \cdot v'''(x), \end{aligned} \right\} \quad (16.25)$$

z których obliczymy wartości  $N$ ,  $Q$  i  $M$  występujące na końcach pręta. Uwzględnimy przy tym wzory (16.22), (16.23) i (16.24):

$$\left. \begin{aligned} N(0) &= EA \cdot \left[ u^{0'}(0) + \frac{u_4 - u_1}{l} \right] = N^0(0) + EA \cdot \frac{u_4 - u_1}{l}, \\ Q(0) &= -EJ \cdot \left[ v^{0'''(0)} + 6C_3 \right] = Q^0(0) - \frac{6EJ}{l^2} \cdot \left( u_3 + u_6 - 2 \cdot \frac{u_5 - u_2}{l} \right), \\ M(0) &= -EJ \cdot \left[ v^{0''(0)} + 2C_2 \right] = M^0(0) + \frac{2EJ}{l} \cdot \left( 2u_3 + u_6 - 3 \cdot \frac{u_5 - u_2}{l} \right), \\ N(l) &= EA \cdot \left[ u^{0'}(l) + \frac{u_4 - u_1}{l} \right] = N^0(l) + EA \cdot \frac{u_4 - u_1}{l}, \\ Q(l) &= -EJ \cdot \left[ v^{0'''(l)} + 6C_3 \right] = Q^0(l) - \frac{3EJ}{l^2} \cdot \left( u_3 + u_6 - 2 \cdot \frac{u_5 - u_2}{l} \right), \\ M(l) &= -EJ \cdot \left[ v^{0''(l)} + 2C_2 + 6C_3l \right] = M^0(l) - \frac{2EJ}{l} \cdot \left( u_3 + 2u_6 - 3 \cdot \frac{u_5 - u_2}{l} \right). \end{aligned} \right\} \quad (16.26)$$

Wielkości statyczne opatrzone indeksem 0 mają sens reakcji brzegowych  $r_1^0, \dots, r_6^0$ , wywołanych w układzie kinematycznie wyznaczalnym przez obciążenie przesłowe (por. rys. 16.13a). Reakcje te można obli-

czyć kilkoma sposobami: metodą całkowania równań (16.17) i (16.18), metodą sił lub za pomocą twierdzeń energetycznych. Zwróćmy uwagę, że znakowanie reakcji  $r_j^0$  nawiązuje do przyjętego lokalnego układu współrzędnych  $x, y$ .



Rys. 16.13

W związku z tym

$$\{r_j^0\} = \{-N^0(0), -Q^0(0), M^0(0), N^0(l), Q^0(l), -M^0(l)\}. \quad (16.27)$$

Pozostałe składniki wzorów (16.26) są tzw.  $s_1 \div s_6$ , które pojawiają się wyłącznie na skutek występowania przemieszczeń  $u_1 \div u_6$  (por. rys. 16.13b). Na końce pręta działają zatem reakcje brzegowe  $r_j$  będące sumą reakcji wyjściowych  $r_j^0$  w układzie kinematycznie wyznaczalnym oraz sił brzegowych  $s_j$ :

$$r_j = r_j^0 + s_j(u_m), \quad j, m = 1, 2, \dots, 6, \quad (16.28)$$

przy czym

$$\{r_j\} = \{-N(0), -Q(0), M(0), N(l), Q(l), -M(l)\}. \quad (16.29)$$

Wzory (16.28) noszą nazwę **wzorów transformacyjnych**. Wartości sił brzegowych  $s_j$ , których dodatnie zwroty nawiązują również do lokalnego układu współrzędnych  $x, y$ , ustalamy na podstawie wzorów (16.26):

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= -[N(0) - N^0(0)] = \frac{EA}{1} \cdot u_1 - \frac{EA}{1} \cdot u_4, \\ s_2 &= -[Q(0) - Q^0(0)] = \frac{12EJ}{l^3} \cdot u_2 + \frac{66EJ}{l^2} \cdot u_3 - \frac{12EJ}{l^3} \cdot u_5 + \frac{6EJ}{l^2} \cdot u_6, \\ s_3 &= M(0) - M^0(0) = \frac{6EJ}{l^2} \cdot u_2 + \frac{4EJ}{l} \cdot u_3 - \frac{6EJ}{l^2} \cdot u_5 + \frac{2EJ}{l} \cdot u_6, \\ s_4 &= N(l) - N^0(l) = -\frac{EA}{l} \cdot u_1 + \frac{EA}{l} \cdot u_4, \\ s_5 &= Q(l) - Q^0(l) = -\frac{12EJ}{l^3} \cdot u_2 - \frac{6EJ}{l^2} \cdot u_3 + \frac{12EJ}{l^3} \cdot u_5 - \frac{6EJ}{l^2} \cdot u_6, \\ s_6 &= -[M(l) - M^0(l)] = \frac{6EJ}{l^2} \cdot u_2 + \frac{2EJ}{l} \cdot u_3 - \frac{6EJ}{l^2} \cdot u_5 + \frac{4EJ}{l} \cdot u_6. \end{aligned} \right\} \quad (16.30)$$

Zależności te można zapisać krócej:

$$s_j = \sum_{m=1}^6 k_{jm} \cdot u_m, \quad j = 1, 2, \dots, 6, \quad (16.30a)$$

gdzie  $[k_{jm}] = [k_{mj}] = [k] = \mathbf{k}$  nazywa się **macierzą sztywności** pręta w układzie lokalnym. Budowa tej macierzy wynika z równań (16.30):

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} EA/l & 0 & 0 & -EA/l & 0 & 0 \\ 0 & 12EJ/l^3 & 6EJ/l^2 & 0 & -12EJ/l^3 & 6EJ/l^2 \\ 0 & 6EJ/l^2 & 4EJ/l & 0 & -6EJ/l^2 & 2EJ/l \\ -EA/l & 0 & 0 & EA/l & 0 & 0 \\ 0 & -12EJ/l^3 & -6EJ/l^2 & 0 & 12EJ/l^3 & -6EJ/l^2 \\ 0 & 6EJ/l^2 & 2EJ/l & 0 & -6EJ/l^2 & 4EJ/l \end{bmatrix} \quad (16.31)$$

Macierz sztywności  $\mathbf{k}$  składa się zatem z czterech podmacierzy:

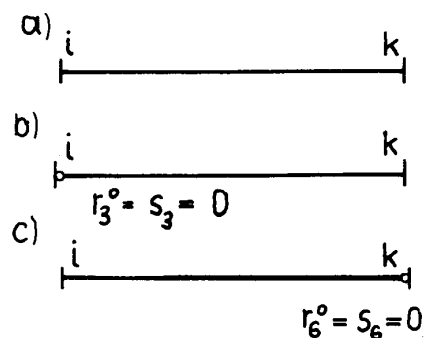
$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} [\mathbf{k}^{(ii)}] & [\mathbf{k}^{(ik)}] \\ [\mathbf{k}^{(ki)}] & [\mathbf{k}^{(kk)}] \end{bmatrix}. \quad (16.31a)$$

Warto zwrócić uwagę, że macierz sztywności pręta (16.31) można również zapisać w innej postaci, dogodnej w obliczeniach „ręcznych”:

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & b & d & 0 & -b & d \\ 0 & d & c & 0 & -d & e \\ -a & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & -b & -d & 0 & b & -d \\ 0 & d & e & 0 & -d & c \end{bmatrix} \quad (16.32)$$

gdzie  $a = EA/l$ ,  $b = 12EJ/l^3$ ,  $c = 4EJ/l$ ,  $d = 6EJ/l^2$ ,  $e = 2EJ/l$ .

Wzory transformacyjne (16.30) wykorzystuje się do prętów, które w punktach  $i$  oraz  $k$  są połączone z węzłami w sposób sztywny (rys. 16.14a). Jeżeli na przykład w punkcie  $i$  pręt jest połączony w sposób przegubowy, to należy uwzględnić fakt, że moment zginający w tym punkcie jest równy zero, czyli  $r_3 = r_3^0 + s_3 = 0$  (rys. 16.14b). Warunek  $r_3 = 0$  można traktować bądź jako dodatkowe równanie,



Rys. 16.14

bądź jako równanie służące do wyeliminowania kąta  $u_3$ . W pierwszym wypadku reakcje  $r_3^0$  i macierz sztywności odpowiadają prętowi obustronnie utwierdzonemu, a dla dodatkowego niewiadomego kąta obrotu  $u_3$  dochodzi jedno równanie  $r_3(u_m) = 0$  (por. przykład liczbowy w p. 16.2.9). W drugim wypadku liczba niewiadomych pozostaje taka sama, natomiast reakcje  $r_j^0$  ( $j = 1, 2, \dots, 6$ ) i macierz sztywności modyfikują się stosownie do warunków brzegowych. Omówimy tę drugą ewentualność dla przypadku z rys. 16.14b. Ponieważ na podporze przegubowej  $r_3^0 = 0$ , więc  $s_3(u_m) = 0$ , czyli

$$3u_2 + 2l \cdot u_3 - 3u_5 + l \cdot u_6 = 0,$$

skąd

$$(e) \quad u_3 = \frac{1}{2l} \cdot (-3u_2 + 3u_5 - l \cdot u_6).$$

Uwzględnienie równania (e) w zależnościach (16.30) prowadzi do wyniku:

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= \frac{EA}{l} \cdot u_1 - \frac{EA}{l} \cdot u_4, \\ s_2 &= \frac{3EJ}{l^3} \cdot u_2 - \frac{3EJ}{l^3} \cdot u_5 + \frac{3EJ}{l^2} \cdot u_6, \\ s_3 &= 0, \\ s_4 &= -\frac{EA}{l} \cdot u_1 + \frac{EA}{l} \cdot u_4, \\ s_5 &= -\frac{3EJ}{l^3} \cdot u_2 + \frac{3EJ}{l^3} \cdot u_5 - \frac{3EJ}{l^2} \cdot u_6, \\ s_6 &= \frac{3EJ}{l} \cdot u_2 - \frac{3EJ}{l} \cdot u_5 + \frac{3EJ}{l} \cdot u_6. \end{aligned} \right\} \quad (16.33)$$

Jeżeli przegub występuje w punkcie  $k$  (rys. 16.14c), to  $s_6(u_m) = 0$ , czyli

$$3u_2 + l \cdot u_3 - 3u_5 + 2l \cdot u_6 = 0,$$

skąd

$$(f) \quad u_6 = \frac{1}{2l} \cdot (-3u_2 + 3u_5 - l \cdot u_3).$$

Zależność (f) służy do wyeliminowania kąta  $u_6$  z równań (16.30), które modyfikują się do postaci:

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= \frac{EA}{l} \cdot u_1 - \frac{EA}{l} \cdot u_4, \\ s_2 &= \frac{3EJ}{l^3} \cdot u_2 + \frac{3EJ}{l^2} \cdot u_3 - \frac{3EJ}{l^3} \cdot u_5, \\ s_3 &= \frac{3EJ}{l^2} \cdot u_2 + \frac{3EJ}{l} \cdot u_3 - \frac{3EJ}{l^2} \cdot u_5, \\ s_4 &= -\frac{EA}{l} \cdot u_1 + \frac{EA}{l} \cdot u_4, \\ s_5 &= -\frac{3EJ}{l^2} \cdot u_2 - \frac{3EJ}{l^2} \cdot u_3 + \frac{3EJ}{l^3} \cdot u_5, \\ s_6 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (16.34)$$

W podobny sposób można otrzymywać zależności  $s_f(u_m)$  i macierze sztywności dla innych warunków podparcia pręta.

### 16.2.4. Macierz sztywności pręta w układzie globalnym

Wyrazimy obecnie reakcje brzegowe  $R_j$  przez przemieszczenia  $U_m$ , odniesione do globalnego układu współrzędnych. Punktem wyjścia są tu równania (16.16) oraz zależności (16.29):

$$R_j = \sum_{m=1}^6 \bar{C}_{jm} \cdot r_m = \sum_{m=1}^6 \bar{C}_{jm} (r_m^0 + s_m)$$

lub po rozpisaniu

$$(a) \quad \begin{cases} R_1 = (r_1^0 + s_1) \cos \alpha - (r_2^0 + s_2) \sin \alpha, \\ R_2 = (r_1^0 + s_1) \sin \alpha - (r_2^0 + s_2) \cos \alpha, \\ R_3 = r_3^0 + s_3, \\ R_4 = (r_4^0 + s_4) \cos \alpha - (r_5^0 + s_5) \sin \alpha, \\ R_5 = (r_4^0 + s_4) \sin \alpha + (r_5^0 + s_5) \cos \alpha, \\ R_6 = r_6^0 + s_6. \end{cases}$$

Siły brzegowe  $s_m$  można wyrazić przez przemieszczenia brzegowe  $u_j$  według zależności (16.30), w której uwzględnimy tylko niezerowe elementy macierzy sztywności w układzie lokalnym:

$$(b) \quad \begin{cases} s_1 = k_{11}u_1 + k_{14}u_4, \\ s_2 = k_{22}u_2 + k_{23}u_3 + k_{25}u_5 + k_{26}u_6, \\ s_3 = k_{32}u_2 + k_{33}u_3 + k_{35}u_5 + k_{36}u_6, \\ s_4 = k_{41}u_1 + k_{44}u_4, \\ s_5 = k_{52}u_2 + k_{53}u_3 + k_{55}u_5 + k_{56}u_6, \\ s_6 = k_{62}u_2 + k_{63}u_3 + k_{65}u_5 + k_{66}u_6. \end{cases}$$

Przemieszczenia  $u_j$  odniesione do układu lokalnego można z kolei za pomocą wzorów (16.11) wyrazić przez przemieszczenia  $U_m$  w układzie globalnym. Po podstawieniu wzorów (16.29) do zależności (b), a tych dalej do zależności (a) otrzymujemy poszukiwane zależności  $R_j(U_m)$ :

$$R_j(U_m) = R_j^0 + S_j(U_m), \quad j, m = 1, 2, \dots, 6, \quad (16.35)$$

gdzie:

$$R_j^0 = \sum_{p=1}^6 \bar{C}_{jp} \cdot r_p^0, \quad (16.36)$$

$$S_j(U_m) = \sum_{m=1}^6 K_{jm} U_m, \quad (16.37)$$

a  $K_{jm}$  oznacza elementy macierzy sztywności pręta w globalnym układzie współrzędnych. Macierz sztywności jest symetryczna (tzn.  $K_{jm} = K_{mj}$ ) i przybiera postać:

$$\{K_{jm}\} = \begin{bmatrix} k_{11}\bar{c}^2 + k_{22}\bar{s}^2 & (k_{11} - k_{22})\bar{c}\bar{s} & -k_{23}\bar{s} & k_{14}\bar{c}^2 & (k_{14} - k_{25})\bar{c}\bar{s} & -k_{26}\bar{s} \\ (k_{11} - k_{22})\bar{c}\bar{s} & k_{11}\bar{s}^2 + k_{22}\bar{c}^2 & k_{23}\bar{c} & (k_{14} - k_{25})\bar{c}\bar{s} & k_{14}\bar{s}^2 + k_{25}\bar{c}^2 & k_{26}\bar{c} \\ -k_{32}\bar{s} & k_{32}\bar{c} & k_{33} & -k_{35}\bar{s} & k_{35}\bar{c} & k_{36} \\ k_{41}\bar{c}^2 + k_{52}\bar{s}^2 & (k_{41} - k_{52})\bar{c}\bar{s} & -k_{53}\bar{s} & k_{44}\bar{c}^2 + k_{55}\bar{s}^2 & (k_{44} - k_{55})\bar{c}\bar{s} & -k_{56}\bar{s} \\ (k_{41} - k_{52})\bar{c}\bar{s} & k_{41}\bar{s}^2 + k_{52}\bar{c}^2 & k_{53}\bar{c} & (k_{44} - k_{55})\bar{c}\bar{s} & k_{44}\bar{s}^2 + k_{55}\bar{c}^2 & k_{56}\bar{c} \\ -k_{62}\bar{s} & k_{62}\bar{c} & k_{63} & -k_{65}\bar{s} & k_{65}\bar{c} & k_{66} \end{bmatrix} \quad (16.38)$$

przy czym  $\bar{s} = \sin \alpha$ ,  $\bar{c} = \cos \alpha$ .

Wzory (16.35) są wzorami transformacyjnymi zapisanymi w globalnym układzie współrzędnych  $X, Y$ . Macierz (16.38) można zapisać jeszcze inaczej:

$$\{K_{jm}\} = \begin{bmatrix} a^* & d^* & -e^* & -a^* & -d^* & -e^* \\ d^* & b^* & f^* & -d^* & -b^* & f^* \\ -e^* & f^* & c^* & e^* & -f^* & g^* \\ -a^* & -d^* & e^* & a^* & d^* & e^* \\ -d^* & -b^* & -f^* & d^* & b^* & -f^* \\ -e^* & f^* & g^* & e^* & -f^* & e^* \end{bmatrix}, \quad (16.38a)$$

gdzie

$$\left. \begin{aligned} a^* &= a \cos^2 \alpha + b \sin^2 \alpha = \frac{EA}{l} \cdot \cos^2 \alpha + \frac{12EJ}{l^3} \cdot \sin^2 \alpha, \\ b^* &= a \sin^2 \alpha + b \cos^2 \alpha = \frac{EA}{l} \cdot \sin^2 \alpha + \frac{12EJ}{l^3} \cdot \cos^2 \alpha, \\ c^* &= c = \frac{4EJ}{l}, \quad d = (a - b) \sin \alpha \cos \alpha = \left( \frac{EA}{l} - \frac{12EJ}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha, \\ e^* &= d \sin \alpha = \frac{6EJ}{l^2} \sin \alpha, \quad f^* = d \cos \alpha, \quad g^* = e = \frac{2EJ}{l}. \end{aligned} \right\} \quad (16.39)$$

### 16.2.5. Uwagi o obliczaniu kratownic

W układach kratowych wszystkie węzły są węzłami przegubowymi. Jeżeli obciążenia są przyłożone tylko w węzłach, to pręty przejmują tylko siły normalne. Okoliczności te pozwalają na znaczne uproszczenie obliczeń. Jako niewiadome odpadają kąty obrotu węzłów, a w macierzy sztywności pręta jedynymi niezerowymi elementami są składowe  $k_{11}$ ,  $k_{44}$ ,  $k_{14}$  i  $k_{41}$ :

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} EA/l & 0 & 0 & -EA/l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -EA/l & 0 & 0 & EA/l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (16.40)$$

Praktycznie biorąc, macierz sztywności dla elementu kratownicy ma wymiar  $4 \times 4$ , gdyż trzecią kolumnę i trzeci wiersz oraz szóstą kolumnę i szósty wiersz można wykreślić. Uwaga ta dotyczy również zależności (16.38), opisującej macierz sztywności w układzie globalnym.

### 16.2.6. Macierz sztywności konstrukcji

Wykorzystanie wzorów transformacyjnych w równaniach równowagi wszystkich węzłów prowadzi do równań metody przemieszczeń. W celu uzyskania ostatecznej postaci równań tej metody konieczne jest wprowadzenie globalnej numeracji wszystkich składowych wektora przemieszczeń, dokonanie agregacji

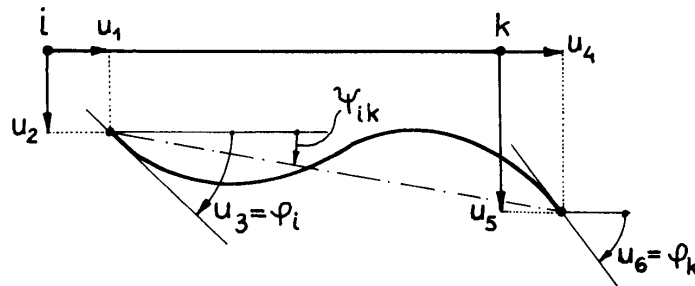
macierzy sztywności poszczególnych prętów, prowadzącej do globalnej macierzy sztywności całej konstrukcji, oraz uwzględnienie warunków brzegowych. Warunki brzegowe można uwzględnić na różne sposoby. Zazwyczaj kolumny i wiersze macierzy odpowiadające zerowym przemieszczeniom usuwa się, a w przypadku statycznych warunków brzegowych uwzględnia się dodatkowe równania, redukujące liczbę niewiadomych. Uzyskana w ten sposób globalna macierz sztywności konstrukcji  $\mathbf{K}$  jest macierzą liniowego układu równań na poszukiwane przemieszczenia  $U_j$ . Macierzową postać równań metody przemieszczeń zapisuje się, jak następuje:

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{P}, \quad (16.41)$$

gdzie  $\mathbf{P}$  jest wektorem wyrazów wolnych, wynikającym z reakcji w układzie nieruchomym oraz obciążeń działających bezpośrednio na węzły. Macierz sztywności  $\mathbf{K}$  jest kwadratowa, symetryczna i ściśle dodatnio określona.

### 16.2.7. Przybliżona metoda obliczania ram

W większości konstrukcji ramowych można pominąć wpływ wydłużeń prętów na wartości sił brzegowych. Odpowiada to przyjęciu, że  $u_1 = u_4$ . W konsekwencji następuje wyraźne uproszczenie obliczeń, gdyż siły poprzeczne i momenty zginające zależą wówczas tylko od kątów obrotu przekrojów przywęzłowych  $\varphi_i = u_3$ ,  $\varphi_k = u_6$  oraz kątów obrotu cięciwy pręta  $\psi_{ik}$  (por. rys. 16.15).



Rys. 16.15

Dalsza, bardzo istotna korzyść polega na tym, że kąty  $\varphi_i$ ,  $\varphi_k$  oraz  $\psi_{ik}$  nie zależą od układu współrzędnych. Przyjmują zatem takie same wartości w układach lokalnym i globalnym:

$$\Phi_i = \varphi_i, \quad \Phi_k = \varphi_k, \quad \Psi_{ik} = \psi_{ik}, \quad (16.42)$$

przy czym

$$\psi_{ik} = \frac{u_5 - u_2}{l}.$$

W omawianej przybliżonej metodzie przemieszczeń wykorzystuje się wzory transformacyjne tylko do wyznaczenia momentów zginających. Wzory te – stosownie do zależności (16.28) i (16.30) – przyjmują postać:

$$\left. \begin{aligned} M_{ik} &= M_{ik}^0 + \frac{2EJ}{l} \cdot (2\varphi_i + \varphi_k - 3\psi_{ik}), \\ M_{ki} &= M_{ki}^0 + \frac{2EJ}{l} \cdot (\varphi_i + 2\varphi_k - 3\psi_{ik}). \end{aligned} \right\} \quad (16.43)$$

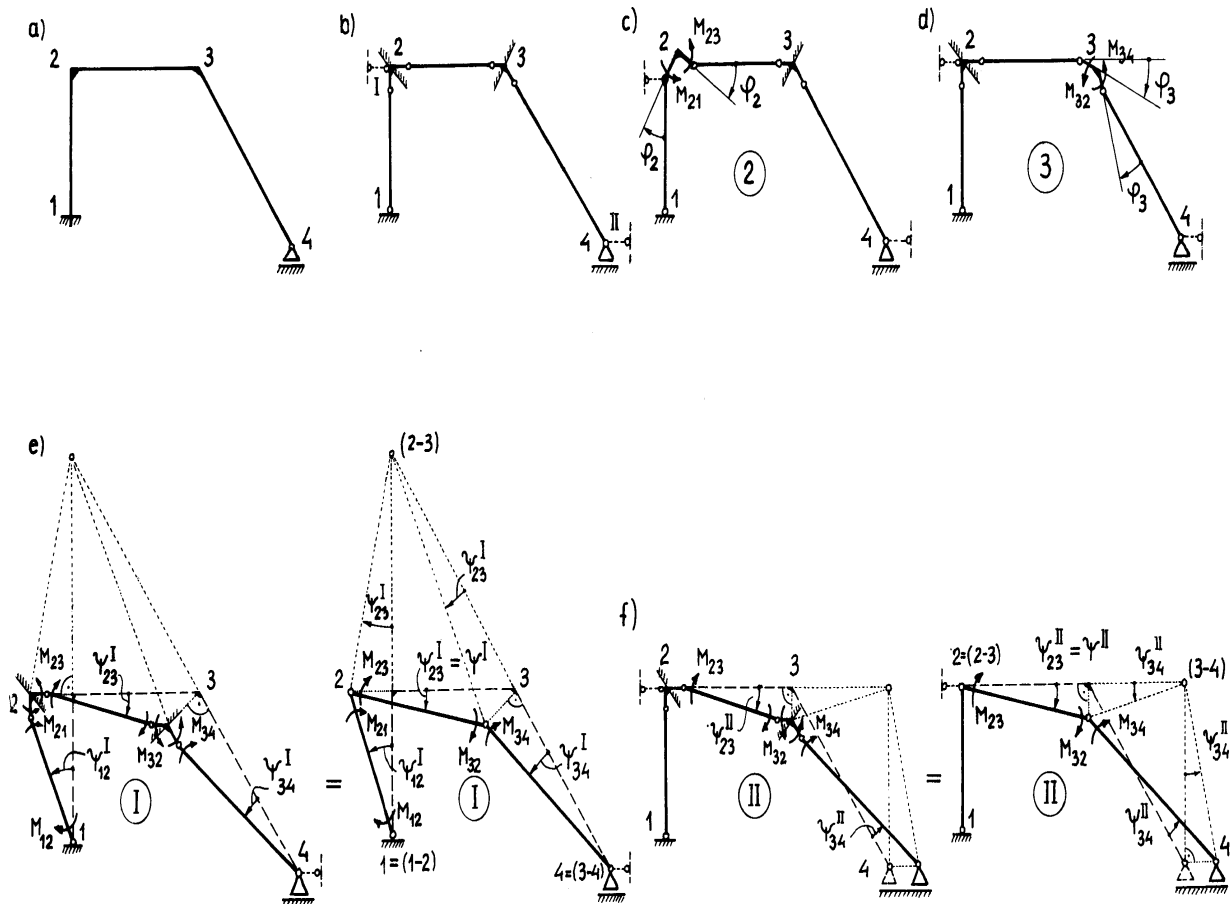
Dla pręta, w którym podpora  $i$  jest przegubowa, a podpora  $k$  utwierdzona (rys. 16.14b), według zależności (16.28) i (16.39) otrzymujemy:

$$\left. \begin{aligned} M_{ik} &= 0, \\ M_{ki} &= M_{ki}^0 + \frac{3EJ}{l} \cdot (\varphi_k - \psi_{ik}). \end{aligned} \right\} \quad (16.44)$$

a dla pręta z rys. 16.14c mamy:

$$\left. \begin{aligned} M_{ik} &= M_{ik}^0 + \frac{3EJ}{l} \cdot (\varphi_i - \psi_{ik}), \\ M_{ki} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (16.45)$$

Wartości  $M_{ik}^0$  oraz  $M_{ki}^0$  odnoszą się tutaj do pręta kinematycznie wyznaczalnego, przy czym uwzględnia się tutaj obecność przegubów brzegowych (p.  $i$  lub  $k$ ).



Rys. 16.16

Modelem kinematycznym konstrukcji w rozważanej metodzie przybliżonej jest układ tarcz sztywnych połączonych przegubami. Tarczami sztywnymi są tutaj pręty i węzły sztywne. Na przykład przedstawiony na rys 16.16b model kinematyczny ramy ma  $(3t - p = 3 \cdot 5 - 11 = 4)$  cztery stopnie swobody. Do unieruchomienia modelu konstrukcji konieczne jest uniemożliwienie obrotów węzłów 2 i 3 oraz wprowadzenie dodatkowych prętów podporowych I i II. Wymienione pręty podporowe zaznaczono na rys. 16.16b liniami przerywanymi. Poszczególne mechanizmy niezależne otrzymujemy przez kolejne usuwanie każdego z węzłów. Na rysunkach 16.16c, d przedstawiono mechanizmy odpowiadające obrotom węzłów 2 i 3. Odnotujmy, że obroty węzłów nie wywołują obrotu prętów. Wynika to stąd, że wymiary węzłów z założenia są bardzo małe. Usunięciu podpory I towarzyszy mechanizm I (lub tzw. przesuw I – rys. 16.16e), określony przez kąt obrotu  $\psi^I = \psi_{23}^I$ . Kąty obrotu pozostałych prętów można wyrazić przez kąt  $\psi^I$  z zależności geometrycznych. Mechanizm II (przesuw II), odpowiadający usunięciu podpory II (rys. 16.16f), określa kąt  $\psi^II = \psi_{23}^II$ . Ogólnie biorąc, kąty obrotu prętów są superpozycją kątów obrotu w poszczególnych przesuwach, czyli

$$\psi_{ik} = \psi_{ik}^I + \psi_{ik}^{II} + \dots + \psi_{ik}^L + \dots + \psi_{ik}^N, \quad (16.46)$$

gdzie  $N$  jest liczbą przesuwów.

Równania kanoniczne przybliżonej metody przemieszczeń odpowiadają równaniom pracy wirtualnej rzeczywistych sił na wirtualnych przemieszczeniach pokrywających się z niezależnymi mechanizmami modelu konstrukcji. Na przykład obrót węzła  $i$  o kąt  $\bar{\varphi}_i$  prowadzi po prostu do równania równowagi momentów w tym węźle (por. rys. 16.17a):

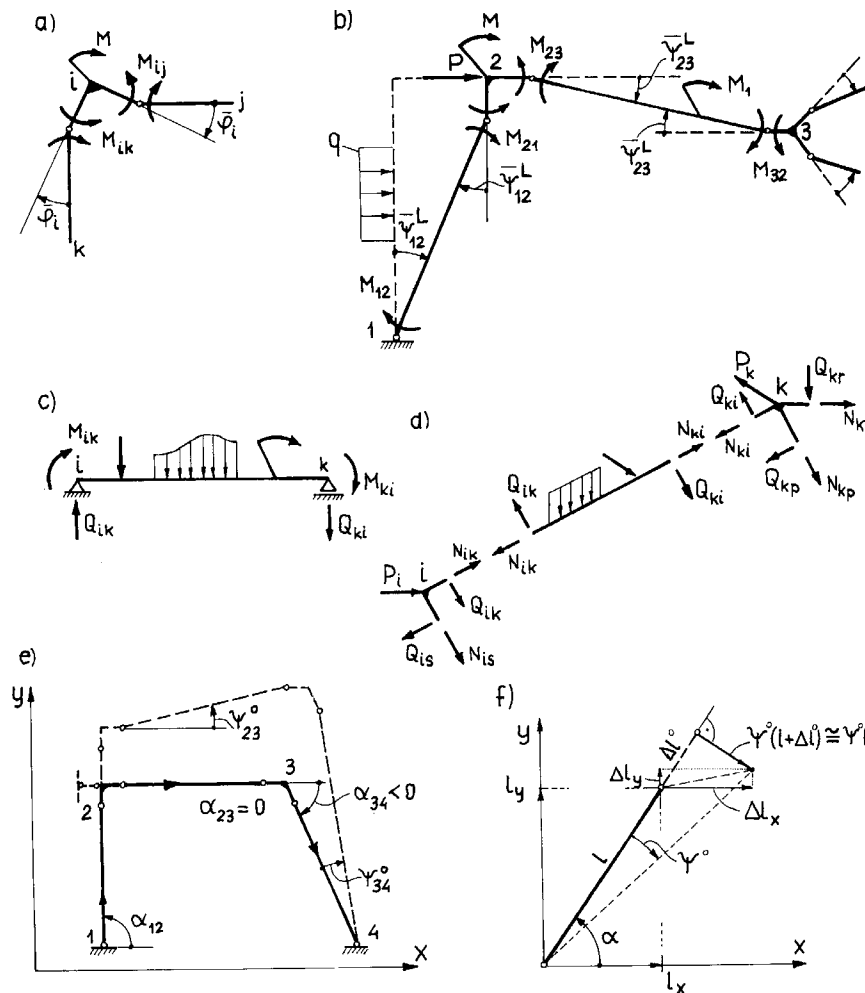
$$\left(\sum M_i\right) \cdot \bar{\varphi}_i = 0. \quad (16.47)$$

Mechanizm przesuwu  $L$  (rys. 16.17b) pozwala zapisać równanie pracy wirtualnej w następującej postaci:

$$\sum M_{ik} \cdot \bar{\psi}_{ik}^L + \sum P_i \cdot \bar{\Delta}_i^L = 0, \quad (16.48)$$

gdzie znak sumy rozciąga się na wszystkie pręty, a drugi składnik wzoru (16.48) symbolizuje pracę obciążenia zewnętrznego na wirtualnych przemieszczeniach.

Liczba równań (16.47) i (16.48) jest równa liczbie niewiadomych kątów obrotu węzłów oraz przesuów. Warto przypomnieć, że do ułożenia tych równań wystarczają tylko wzory transformacyjne dla momentów zginających.



Rys. 16.17

Siły poprzeczne i normalne obliczamy z równań równowagi dopiero po rozwiązaniu układu równań kanonicznych i wyznaczeniu wartości momentów przywęzłowych. Aby wyznaczyć siły poprzeczne, każdy z prętów obliczamy jak belkę swobodnie podpartą, poddaną działaniu momentów podporowych i obciążenia poprzecznego w obrębie przęsła (rys. 16.17c). Siły normalne obliczamy w ostatniej kolejności na podstawie równań równowagi sił działających na pręty i węzły (rys. 16.17d).

Warto dodać, że w ramach metody przybliżonej można jednak uwzględnić wpływ wydłużeń tych prętów, których sztywność podłużna jest niewielka (np. ściąg). W tym celu należy zbudować odpowiednie mechanizmy i wykorzystać równania pracy wirtualnej w postaci (16.48).

Pewnego komentarza wymaga sposób uwzględnienia wpływu wydłużeń prętów wywołanych czynnikami niemechanicznymi (przyrost temperatury  $\Delta T_c$ , błędy wykonania). To, że pręty konstrukcji mogą się wydłużać, narusza podstawowe założenie metody przybliżonej. Jeżeli jednak wydłużenia są niewielkie, to można przyjąć, że zależności między kątami obrotu prętów  $\psi_{ik}$  pozostają takie same. Przyjmuje się zatem, że wydłużenia prętów wpływają jedynie na wartości momentów wyjściowych  $M_{ik}^0, M_{ki}^0$ .

Na rysunku 16.17e przedstawiono kinematykę wynikającą ze zmiany długości ramy  $\Delta l_{ik}^0$  w układzie kinematycznie wyznaczalnym. Występują tu tylko wstępne wartości kątów obrotu prętów  $\psi_{ik}^0$ , gdyż węzły konstrukcji nie ulegają obrotom ( $\varphi_i^0 = \varphi_k^0 = 0$ ). Problem sprowadza się zatem do obliczenia kątów  $\psi_{ik}^0$ , wyznaczających wyjściowe wartości momentów przywęzłowych. Momenty te wynoszą:

– dla prętów obustronnie utwierdzonych (wzory (16.43))

$$M_{ik}^{0''} = M_{ki}^{0''} = -\frac{6EJ}{l} \cdot \psi_{ik}^0, \quad (16.49)$$

– dla pręta utwierdzonego w punkcie  $k$ , a przegubowo połączonego w punkcie  $i$  (wzory (16.44))

$$M_{ik}^{0'} = 0, \quad M_{ki}^{0'} = -\frac{3EJ}{l} \cdot \psi_{ik}^0, \quad (16.50)$$

– dla pręta utwierdzonego w punkcie  $i$ , a przegubowo połączonego w punkcie  $k$  (wzory (16.45))

$$M_{ik}^{0'} = -\frac{3EJ}{l} \cdot \psi_{ik}^0, \quad M_{ki}^{0'} = 0. \quad (16.51)$$

Całkowite wartości kątów obrotu prętów  $\psi_{ik}^c$  są więc sumą kątów  $\psi_{ik}^0$  i  $\psi_{ik}$ :

$$\psi_{ik}^c = \psi_{ki}^c = \psi_{ik}^0 + \psi_{ik}. \quad (16.52)$$

Najogólniejszym sposobem wyznaczania kątów  $\psi_{ik}^0$  jest metoda analityczna, przedstawiona w p. 14.10.2. Rozważmy pręt  $i-k$ , który jednocześnie zmienia swą długość o  $\Delta l^0$  i obraca się o kąt  $\psi^0$  (rys. 16.17f). Składowe przemieszczenia punktu  $k$  wynoszą:

$$\begin{aligned}\Delta_x &= \Delta l_x^0 + (l_y + \Delta l_x^0) \cdot \psi^0, \\ \Delta_y &= \Delta l_y^0 - (l_x + \Delta l_y^0) \cdot \psi^0 \approx \Delta l_y^0 - l_x \cdot \psi^0,\end{aligned}\quad (16.52a)$$

gdzie  $\Delta l_x^0 = \Delta l^0 \cos \alpha$ ,  $\Delta l_y^0 = \Delta l^0 \sin \alpha$ ,  $l_x = l \cos \alpha$ ,  $l_y = l \sin \alpha$ , przy czym dodatnie wartości  $\Delta l^0$  odpowiadają wydłużeniu, a ujemne – skróceniu osi pręta.

Stosując wzory (16.52a) w równaniach sumy (ciągłości) przemieszczeń w układzie kinematycznie wyznaczalnym, można obliczyć wszystkie poszukiwane kąty  $\psi_{ik}^0$ . Dla ilustracji ułożymy równania do obliczenia wartości  $\psi_{ik}^0$  w układzie z rys. 16.17e:

$$\begin{aligned}\Delta_{4x} &= \sum \Delta_x = \Delta l_{12}^0 \cos \alpha_{12} + l_{12} \sin \alpha_{12} \cdot \psi_{12}^0 + \Delta l_{23}^0 \cos \alpha_{23} + \\ &\quad + l_{23} \sin \alpha_{23} \cdot \psi_{23}^0 + \Delta l_{34}^0 \cos \alpha_{34} + l_{34} \sin \alpha_{34} \cdot \psi_{34}^0 = 0, \\ \Delta_{4y} &= \sum \Delta_y = \Delta l_{12}^0 \sin \alpha_{12} - l_{12} \cos \alpha_{12} \cdot \psi_{12}^0 + \Delta l_{23}^0 \sin \alpha_{23} - \\ &\quad - l_{23} \cos \alpha_{23} \cdot \psi_{23}^0 + \Delta l_{34}^0 \sin \alpha_{34} - l_{34} \cos \alpha_{34} \cdot \psi_{34}^0 = 0.\end{aligned}$$

Ponieważ pręt 1–2 na skutek zmiany długości nie obraca się (rys. 16.17e), bo jest podparty w punkcie 2, więc  $\psi_{12}^0 = 0$ . Po uwzględnieniu ponadto, że  $\alpha_{12} = 90^\circ$  i  $\alpha_{23} = 0$ , otrzymujemy następujący układ dwóch równań:

$$\begin{cases} \Delta l_{23}^0 + \Delta l_{34}^0 \cos \alpha_{34} + l_{34} \sin \alpha_{34} \cdot \psi_{34}^0 = 0, \\ \Delta l_{12}^0 - l_{23} \cdot \psi_{23}^0 + \Delta l_{34}^0 \sin \alpha_{34} - l_{34} \cos \alpha_{34} \cdot \psi_{34}^0 = 0. \end{cases}$$

Z tego układu można obliczyć poszukiwane kąty obrotu  $\psi_{23}^0$  i  $\psi_{34}^0$ .

Gdy liczba niewiadomych kątów obrotu prętów jest większa, zawsze udaje się ułożyć dostateczną liczbę równań ciągłości przemieszczeń w układzie kinematycznie wyznaczalnym. Trzeba jednak dodać, że w pewnych przypadkach ram nieprzesuwnych w celu obliczenia momentów wyjściowych wynikających ze zmian długości prętów należy dodatkowo rozwiązać odpowiedni schemat statycznie niewyznaczalny.

### 16.2.8. Kanoniczna postać równań metody przemieszczeń

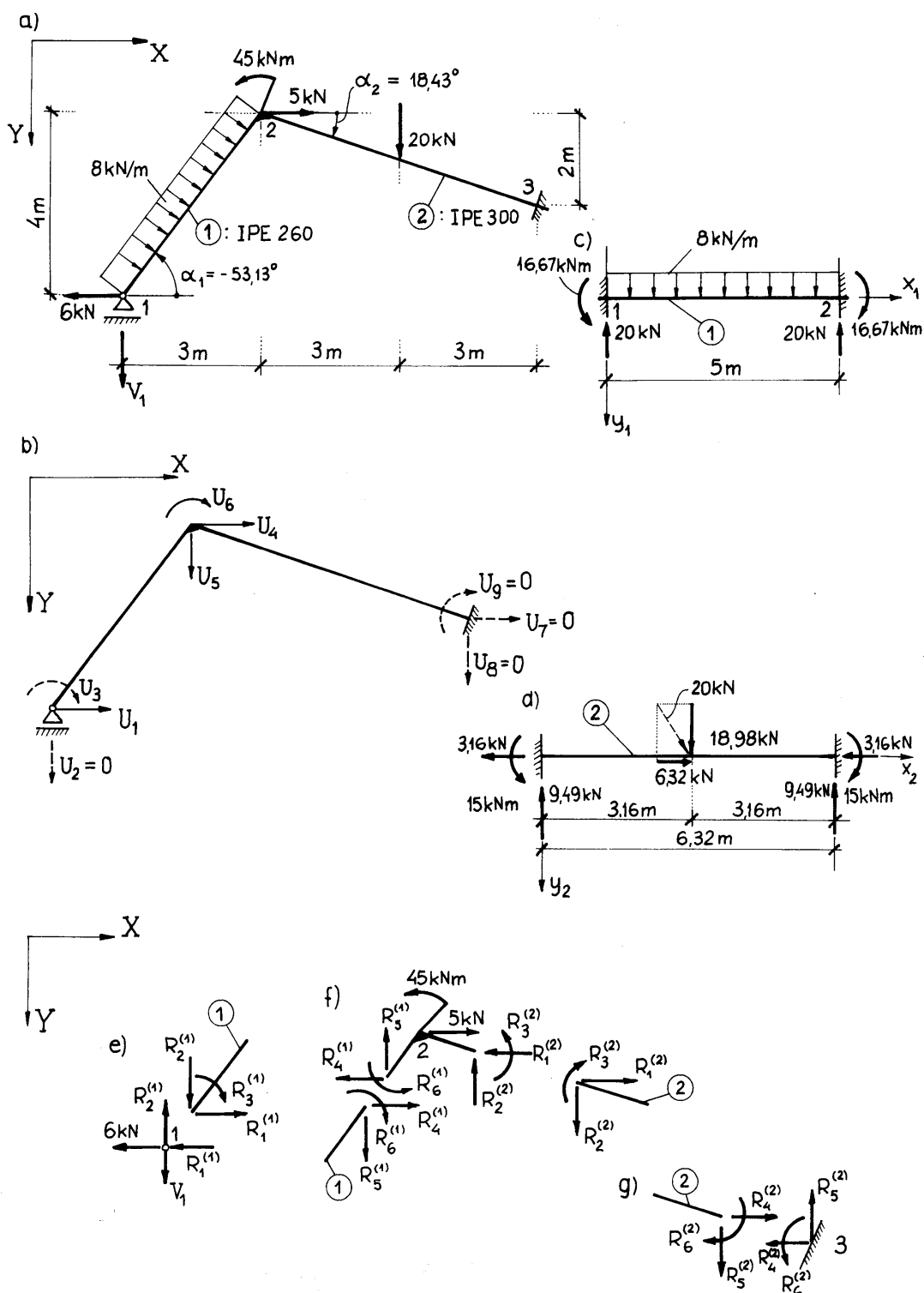
W przypadku liniowości kinematycznej i fizycznej (liniowa sprężystość, małe odkształcenia i przemieszczenia) równaniom metody przemieszczeń można nadać nieco inną postać, wynikającą z zasady superpozycji. Aby całkowicie unieruchomić poszczególne węzły konstrukcji, musimy wprowadzić pewną liczbę więzów, odpowiadającą liczbie niewiadomych uogólnionych przemieszczeń  $U_k$ . ( $k = 1, 2, 3, \dots, n$ ). Wprowadzimy pojęcie uogólnionej reakcji więzu  $i$ , powstającej wskutek wymuszenia jednostkowego uogólnionego przemieszczenia w kierunku więzu  $k$ . Reakcję taką oznaczmy symbolem  $r_{ik}$ . Korzystając z zasady superpozycji, wnosimy zatem, że całkowita reakcja więzu  $i$  od prawdziwej wartości przemieszczenia  $U_k$  wynosi  $r_{ik} \cdot U_k$ . W układzie podstawowym kinematycznie wyznaczalnym (tzn. w układzie nieruchomym, gdzie  $U_k \equiv 0$ ) występują reakcje więzów  $i$  pochodzące od obciążeń zewnętrznych. Reakcje te oznaczmy symbolem  $R_{ip}$ . Równowaga poszczególnych węzłów wymaga, by suma wszystkich reakcji więzu  $i$  w układzie była równa zeru. Odpowiada to zależności:

$$\sum_{k=1}^{k=n} r_{ik} U_k + R_{ip} = 0; \quad i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (16.53)$$

Równania (16.53) tworzą tzw. **układ równań kanonicznych** metody przemieszczeń o postaci analogicznej do równań metody sił. Równania te są po prostu równaniami równowagi poszczególnych węzłów, stanowiącymi esencję idei metody przemieszczeń. Bliższe szczegóły tego sposobu budowy równań są zawarte w podręcznikach z mechaniki budowli (por. np. [10]).

### 16.2.9. Przykład liczbowy

Obliczymy ramę przedstawioną na rysunku 16.18a. Przyjmujemy, że materiał ramy jest liniowo-sprężysty ( $E = 2 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$ ), a konstrukcja wykazuje małe przemieszczenia. Zaprezentujemy tu zarówno metodę ścisłą, jak i przybliżoną.



Rys. 16.18

**Metoda ścisła**

Rama jest w zasadzie układem czterokrotnie kinematycznie niewyznaczalnym, a niewiadomymi są przemieszczenia  $U_1$ ,  $U_4$ ,  $U_5$  i  $U_6$  (rys. 16.18b). Dodatkową niewiadomą jest kąt obrotu  $U_3$  na podporze przegubowej. Równania służące do wyznaczenia wszystkich wyżej wymienionych niewiadomych są równaniami równowagi węzłów 1 i 2. Dotyczy to także dodatkowego równania, wyrażającego fakt, że moment zginający na podporze 1 jest równy zero. Mamy zatem układ pięciu równań o pięciu niewiadomych (por. rys. 16.18e,f,g):

$$(a) \quad \begin{cases} R_1^{(1)} = -6, \\ R_3^{(1)} = 0, \\ R_4^{(1)} + R_1^{(2)} = 5, \\ R_5^{(1)} + R_2^{(2)} = 0, \\ R_6^{(1)} + R_3^{(2)} = -45. \end{cases}$$

W celu ułożenia równań kanonicznych metody przemieszczeń należy wyznaczyć kolejno współczynniki macierzy sztywności oraz reakcje wyjściowe w układach lokalnych i układzie globalnym. Efekt tych wstępnych obliczeń zestawiamy niżej.

Pret 1 (IPE 260)

$$A = 53,4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2, \quad J = 5740 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4 \quad EA = 106,8 \cdot 10^4 \text{ kN}, \\ EJ = 1,148 \cdot 10^{-4} \text{ kN} \cdot \text{m}^2, \quad l = 5,00 \text{ m}, \quad \alpha = -53,130^\circ;$$

– współczynniki lokalnej macierzy sztywności (wzory (16.32)):

$$a = 21,3600 \cdot 10^{-4} \text{ kN / m}, \quad b = 0,1102 \cdot 10^{-4} \text{ kN / m}, \quad c = 0,9184 \cdot 10^{-4} \text{ kN} \cdot \text{m}, \\ d = 0,2755 \cdot 10^{-4} \text{ kN}, \quad e = 0,4592 \cdot 10^{-4} \text{ kN} \cdot \text{m};$$

– współczynniki globalnej macierzy sztywności (wzory (16.38a)):

$$a^* = 7,76 \cdot 10^{-4} \text{ kN / m}, \quad b^* = 13,710 \cdot 10^{-4} \text{ kN / m}, \quad c^* = 0,918 \cdot 10^{-4} \text{ kN} \cdot \text{m}, \\ d^* = -10,200 \cdot 10^{-4} \text{ kN / m}, \quad e^* = -0,220 \cdot 10^{-4} \text{ kN}, \quad f^* = 0,165 \cdot 10^{-4} \text{ kN}, \\ g^* = 0,459 \cdot 10^{-4} \text{ kN} \cdot \text{m};$$

– reakcje wyjściowe w układzie lokalnym:

$$r_1^0 = 0, \quad r_2^0 = -20 \text{ kN}, \quad r_3^0 = -16,67 \text{ kN} \cdot \text{m}, \quad r_4^0 = 0, \quad r_5^0 = -20 \text{ kN}, \quad r_6^0 = 16,67 \text{ kN} \cdot \text{m};$$

– reakcje wyjściowe w układzie globalnym (wzory (16.36)):

$$R_1^0 = -16 \text{ kN}, \quad R_2^0 = -12 \text{ kN}, \quad R_3^0 = -16,67 \text{ kN} \cdot \text{m}, \\ R_4^0 = -16 \text{ kN}, \quad R_5^0 = -12 \text{ kN}, \quad R_6^0 = 16,67 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

## Pręt 2 (IPE 300)

$$\begin{aligned}
 A &= 69,1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2, \quad J = 9800 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4, \quad EA = 138,2 \cdot 10^4 \text{ kN}; \\
 EJ &= 1,960 \cdot 10^{-4} \text{ kN} \cdot \text{m}^2, \quad l = 6,325 \text{ m}, \quad \alpha_1 = 18,435^\circ; \\
 a &= 21,8511 \cdot 10^{-4} \text{ kN/m}, \quad b = 0,09297 \cdot 10^{-4} \text{ kN/m}, \quad c = 1,2396 \cdot 10^{-4} \text{ kN} \cdot \text{m}; \\
 d &= 0,2940 \cdot 10^{-4} \text{ kN}, \quad e = 0,6198 \cdot 10^{-4} \text{ kN} \cdot \text{m}; \\
 a^* &= 19,675 \cdot 10^{-4} \text{ kN/m}, \quad b^* = 2,269 \cdot 10^{-4} \text{ kN/m}, \quad c^* = 1,240 \cdot 10^{-4} \text{ kN} \cdot \text{m}; \\
 d^* &= 6,527 \cdot 10^{-4} \text{ kN}, \quad e^* = 0,093 \cdot 10^{-4} \text{ kN}, \quad f^* = 0,279 \cdot 10^{-4} \text{ kN}, \\
 g^* &= 0,620 \cdot 10^{-4} \text{ kN} \cdot \text{m}; \\
 r_1^0 &= -3,16 \text{ kN}, \quad r_2^0 = -9,49 \text{ kN}, \quad r_3^0 = -15 \text{ kN} \cdot \text{m}, \quad r_4^0 = -3,16 \text{ kN}, \\
 r_5^0 &= -9,45 \text{ kN}, \quad r_6^0 = 15 \text{ kN}; \\
 R_1^0 &= 0, \quad R_2^0 = -10 \text{ kN}, \quad R_3^0 = -15 \text{ kN} \cdot \text{m}, \quad R_4^0 = -10 \text{ kN}, \quad R_6^0 = 15 \text{ kN}.
 \end{aligned}$$

Zwracamy uwagę, że reakcje  $r_j^{0(1)}$  i  $r_j^{0(2)}$  ( $j=1, 2, \dots, 6$ ) obliczono jak dla prętów obustronnie utwierdzonych (por. rys. 16.18c, d). Po uwzględnieniu obliczonych wyżej wartości oraz związków (16.38a) wzory transformacyjne (16.35) w układzie globalnym dla obu prętów przyjmują postać:

$$\begin{aligned}
 (b) \quad \begin{bmatrix} R_1^{(1)} \\ R_2^{(1)} \\ R_3^{(1)} \\ R_4^{(1)} \\ R_5^{(1)} \\ R_6^{(1)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -16 \\ -12 \\ -16,67 \\ -16 \\ -12 \\ 16,67 \end{bmatrix} + 10^4 \cdot \begin{bmatrix} 7,760 & -10,200 & 0,220 & -7,760 & 10,200 & 0,220 \\ -10,200 & 13,710 & 0,165 & 10,200 & -13,710 & 0,165 \\ 0,220 & 0,165 & 0,918 & -0,220 & -0,165 & 0,459 \\ -7,760 & 10,200 & -0,220 & 7,760 & -10,200 & -0,220 \\ 10,200 & -13,710 & -0,165 & -10,200 & 13,710 & -0,165 \\ 0,220 & 0,165 & 0,459 & -0,220 & -0,165 & 0,918 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} \\
 (c) \quad \begin{bmatrix} R_1^{(2)} \\ R_2^{(2)} \\ R_3^{(2)} \\ R_4^{(2)} \\ R_5^{(2)} \\ R_6^{(2)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ -10,00 \\ -15,00 \\ 0 \\ -10,00 \\ 15,00 \end{bmatrix} + 10^4 \cdot \begin{bmatrix} 19,675 & 6,527 & -0,093 & -19,675 & -6,527 & -0,093 \\ 6,527 & 2,269 & 0,279 & -6,527 & -2,269 & 0,279 \\ -0,093 & 0,279 & 1,240 & 0,093 & -0,279 & 0,620 \\ -19,675 & 10,200 & 0,093 & 19,675 & -10,200 & 0,093 \\ -6,527 & -2,269 & -0,279 & 6,527 & 2,269 & -0,279 \\ -0,093 & 0,279 & 0,620 & 0,093 & -0,279 & 1,240 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \\ U_9 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

W zależnościach (b) i (c) macierze kwadratowe oznaczają odpowiednio macierze prętów 1 i 2 w układzie globalnym.

Przy podstawianiu wzorów (b) i (c) do równań równowagi (a), należy uwzględnić kinematyczne warunki brzegowe:  $U_2 = U_7 = U_8 = U_9 = 0$  (por. rys. 16.18b). Ostatecznie równania (a) przybierają postać równań kanonicznych metody przemieszczeń (16.41):

$$(d) \quad 10^4 \cdot \begin{bmatrix} 7,760 & 0,220 & -7,760 & 10,200 & 0,220 \\ 0,220 & 0,918 & -0,220 & -0,165 & 0,459 \\ -7,760 & -0,220 & 27,435 & -3,673 & -0,313 \\ 10,200 & -0,165 & -3,673 & 15,979 & 0,114 \\ 0,220 & 0,459 & -0,313 & 0,114 & 2,158 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10,00 \\ 16,67 \\ 21,00 \\ 22,00 \\ -46,67 \end{Bmatrix},$$

gdzie macierz kwadratowa jest macierzą sztywności konstrukcji w przyjętym układzie globalnym. Łatwo zauważyć, że macierz ta powstała przez dodanie odpowiednich elementów macierzy sztywności poszczególnych prętów oraz usunięcie kolumn i wierszy odpowiadających zerowym wartościom przemieszczeń brzegowych. We wzorach (b) i (c) zaznaczono te segmenty macierzy  $\mathbf{K}^{(1)}$  i  $\mathbf{K}^{(2)}$ , które podlegają dodawaniu. Symetria macierzy konstrukcji wynika z symetrii macierzy sztywności poszczególnych prętów.

Rozwiązaniem układu równań kanonicznych (d) są następujące wartości przemieszczeń:

$$(e) \quad \begin{aligned} U_1 &= -82,30 \cdot 10^{-4} \text{ m}, & U_3 &= 58,68 \cdot 10^{-4} \text{ rad}, \\ U_4 &= -15,54 \cdot 10^{-4} \text{ m}, & U_5 &= 51,16 \cdot 10^{-4} \text{ rad}, & U_6 &= -30,67 \cdot 10^{-4} \text{ rad}. \end{aligned}$$

Największa bezwzględna wartość przesunięcia odpowiada przemieszczeniu  $U_1$ :

$$U_1 = -82,30 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0,823 \text{ mm},$$

a największy kąt obrotu  $U_3 = 58,68 \cdot 10^{-4} \cdot 180 / \pi = 0,3362^\circ$ . Jak widać, wartości te, zgodnie z założeniem, można uznać za bardzo małe.

Do wyznaczenia pola statycznego wykorzystuje się wzory transformacyjne (b) i (c). Na przykład:

$$\begin{aligned} R_1^{(1)} &= -16 + 7,76 \cdot (-82,3) - 10,2 \cdot 0 + 0,22 \cdot 58,68 - 7,76 \cdot (-15,54) + \\ &+ 10,2 \cdot 51,16 + 0,22 \cdot (-30,67) = -6,06 \text{ kN}. \end{aligned}$$

Ostateczne rezultaty obliczeń reakcji brzegowych podano w zestawieniu:

$$(f) \quad \begin{aligned} R_1^{(1)} &= -6,06 \text{ kN}, & R_2^{(1)} &= -27,83 \text{ kN}, & R_3^{(1)} &= 0, \\ R_4^{(1)} &= -25,94 \text{ kN}, & R_5^{(1)} &= 3,83 \text{ kN}, & R_6^{(1)} &= -7,68 \text{ kN} \cdot \text{m}, \\ R_1^{(2)} &= 31,02 \text{ kN}, & R_2^{(2)} &= -3,90 \text{ kN}, & R_3^{(2)} &= -37,31 \text{ kN} \cdot \text{m}, \\ R_4^{(2)} &= -31,02 \text{ kN}, & R_5^{(2)} &= -16,10 \text{ kN}, & R_6^{(2)} &= 11,70 \text{ kN} \cdot \text{m}. \end{aligned}$$

Do sił brzegowych w układach lokalnych dla każdego pręta dochodzimy na podstawie równań (16.15).

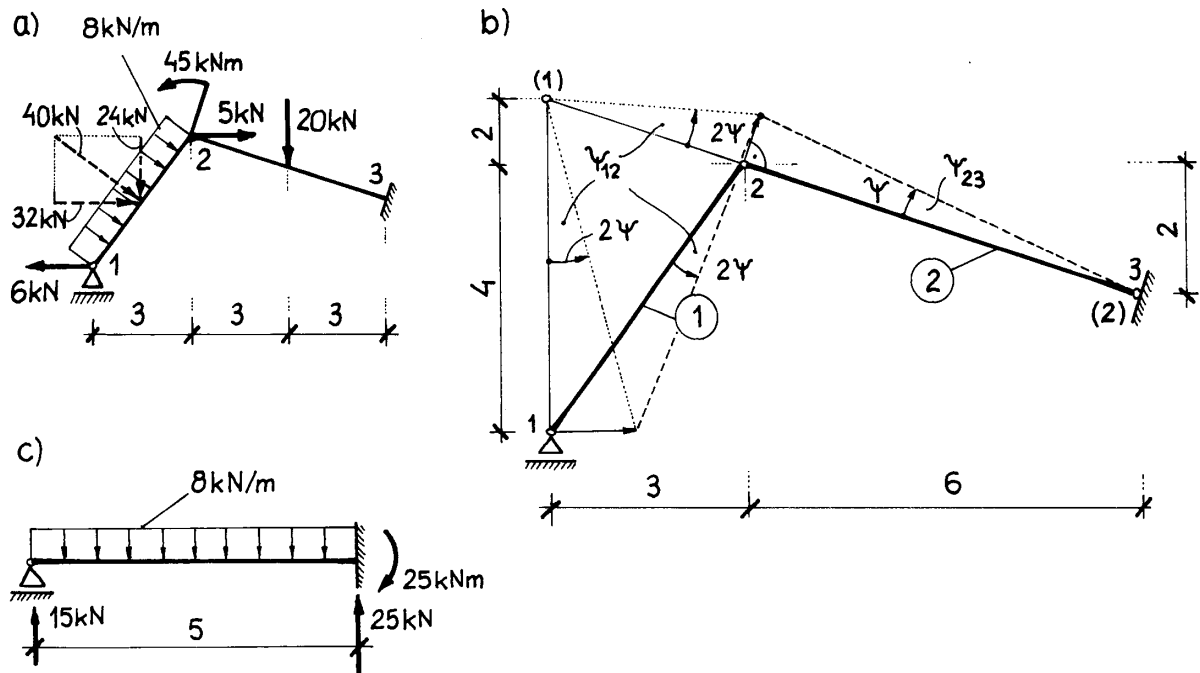
Dla przykładu obliczymy tylko wartości  $r_1^{(1)}$  i  $r_2^{(1)}$ :

$$\begin{aligned} r_1^{(1)} &= R_1^{(1)} \cos \alpha_1 + R_2^{(1)} \sin \alpha_1 = -6,06 \cdot 0,6 - 27,83 \cdot (-0,8) = 18,63 \text{ kN}, \\ r_2^{(1)} &= -R_1^{(1)} \sin \alpha_1 + R_2^{(1)} \cos \alpha_1 = 6,06 \cdot (-0,8) - 27,83 \cdot 0,6 = -21,53 \text{ kN}. \end{aligned}$$

Kompletne wyznaczenie sił wewnętrznych w ramie przedstawimy niżej. Zastosujemy nieco inny sposób obliczeń, charakterystyczny dla metody przybliżonej.

**Metoda przybliżona**

Założenie o nieściśliwości prętów ramy prowadzi do wniosku, że układ jest dwukrotnie kinematycznie niewyznaczalny ( $3t - p = 3 \cdot 3 - (3 \cdot 2 + 1) = 2$ , rys. 16.19b).



Rys. 16.19

Jako niewiadome występują tu kąt  $\varphi_2$  obrotu węzła „2” i kąt  $\psi_{23} = \psi$  obrotu pręta 2–3. Kąt obrotu węzła 3  $\varphi_3 = 0$ , a kąt obrotu pręta 1–2 można wyznaczyć z kinematyki przesuwu przedstawionej na rysunku 16.19b:  $\psi_{12} = -2\psi$ . Równania transformacyjne dla momentów zginających są następujące:

$$(g) \quad \begin{cases} M_{12} = 0; & M_{21} = M_{21}^0 + \frac{3E_1 J_1}{l_1} \cdot (\varphi_2 - \psi_{21}), \\ M_{23} = M_{23}^0 + \frac{3E_2 J_2}{l_2} \cdot (2\varphi_2 + \varphi_3 - 3\psi_{23}), \\ M_{32} = M_{32}^0 + \frac{2E_2 J_2}{l_2} \cdot (\varphi_2 + 2\varphi_3 - 3\psi_{23}). \end{cases}$$

Po podstawieniu wartości liczbowych otrzymujemy:

$$\begin{aligned} M_{21} &= 25 + 0,6888 \cdot (\hat{\varphi}_2 + 2\hat{\psi}), \\ M_{23} &= -15 + 0,62025 \cdot (2\hat{\varphi}_2 - 3\hat{\psi}), \\ M_{32} &= 15 + 0,62025 \cdot (\hat{\varphi}_2 - 3\hat{\psi}), \end{aligned}$$

gdzie  $\hat{\varphi}_2 = \varphi_2 \cdot 10^4$  oraz  $\hat{\psi} = \psi \cdot 10^4$ .

Na uwagę zasługuje fakt, że momenty  $M_{ik}^0$  oblicza się z uwzględnieniem warunków brzegowych. Na przykład  $M_{12}^0 = ql_1^2 / 8 = 8 \cdot 5^2 / 8 = 25 \text{ kN} \cdot \text{m}$  (rys. 16.19c – podpora 1 jest przegubowa). Pręt 2 jest obustronnie utwierdzony, zatem

$$M_{23}^0 = -M_{32}^0 = Pl_2 / 8 = -18,98 \cdot 6,324 / 8 = -20 \cdot 6 / 8 = -15 = 25 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

Równanie równowagi momentów działających na węzeł 2 jest następujące:

$$(h) \quad M_{21} + M_{23} + 45 = 0.$$

Równanie pracy wirtualnej przy przesuwie określonym wirtualnym kątem obrotu pręta  $\bar{\psi} = \bar{\psi}_{23} = -\bar{\psi}_{12} / 2$  (por. wzór (16.48)):

$$M_{21}(-2\bar{\psi}) + (M_{23} + M_{32})\bar{\psi} + 6 \cdot 5 \cdot (-2\bar{\psi}) - 32 \cdot 3 \cdot (-2\bar{\psi}) + 24 \cdot 1,5 \cdot (-2\bar{\psi}) + 5 \cdot 2\bar{\psi} - 20 \cdot 3\bar{\psi} = 0,$$

prowadzi do zależności:

$$(i) \quad -2M_{21} + M_{23} + M_{32} + 10 = 0.$$

Uwzględnivszy równania transformacyjne (g) w równaniach równowagi (h) oraz (i) otrzymujemy układ równań kanonicznych o postaci:

$$(j) \quad \begin{cases} 1,9293\hat{\phi}_2 - 0,48315\hat{\psi} = -55, \\ -0,48315\hat{\phi}_2 + 6,4767\hat{\psi} = -40. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu są wartości:

$$\hat{\phi}_2 = -30,63 \text{ rad}, \quad \hat{\psi} = -8,46 \text{ rad}.$$

W celu porównania tych wyników z wynikami otrzymanymi metodą ścisłą wyznaczmy jeszcze wartości  $\hat{U}_1, \hat{U}_3, \hat{U}_4, \hat{U}_5$  i  $\hat{U}_6$  ( $\hat{U}_j = 10^4 \cdot U_j$ ):

$$\hat{U}_1 = -5\hat{\psi}_{12} = -5 \cdot (2 \cdot \hat{\psi}) = -64,6 \text{ m},$$

$$\hat{U}_4 = 2\hat{\psi}_{23} = 2\hat{\psi} = 2 \cdot (-8,46) = -16,92 \text{ m},$$

$$\hat{U}_5 = -6\hat{\psi}_{23} = -6\hat{\psi} = -6 \cdot (-8,46) = 50,76 \text{ m},$$

$$\hat{U}_6 = \hat{\phi}_2 = -30,63 \text{ rad}.$$

Przemieszczenie  $\hat{U}_3 = \hat{\phi}_1$  obliczymy z warunku, że  $M_{12} = 0$ :

$$M_{12} = -\frac{8 \cdot 5^2}{12} + \frac{2 \cdot 1,148}{5} (2\hat{\phi}_1 + \hat{\phi}_2 + 3 \cdot 2\hat{\psi}) = 0,$$

skąd

$$\hat{U}_3 = \hat{\phi}_1 = \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{8 \cdot 5^2}{12} \cdot \frac{5}{2 \cdot 1,148} - (-30,63) - 6 \cdot (-8,46) \right] = 58,84 \text{ rad}.$$

Zestawimy wartości ścisłe i przybliżone:

– wartości ścisłe

$$\hat{U}_1 = -82,3 \text{ m}, \quad \hat{U}_3 = 58,68 \text{ rad}, \quad \hat{U}_4 = -15,54 \text{ m}, \quad \hat{U}_5 = 51,16 \text{ m}, \quad \hat{U}_6 = -30,67 \text{ rad},$$

– wartości przybliżone

$$\hat{U}_1 = -84,6 \text{ m}, \quad \hat{U}_3 = 58,84 \text{ rad}, \quad \hat{U}_4 = -16,92 \text{ m}, \quad \hat{U}_5 = 50,76 \text{ m}, \quad \hat{U}_6 = -30,63 \text{ rad},$$

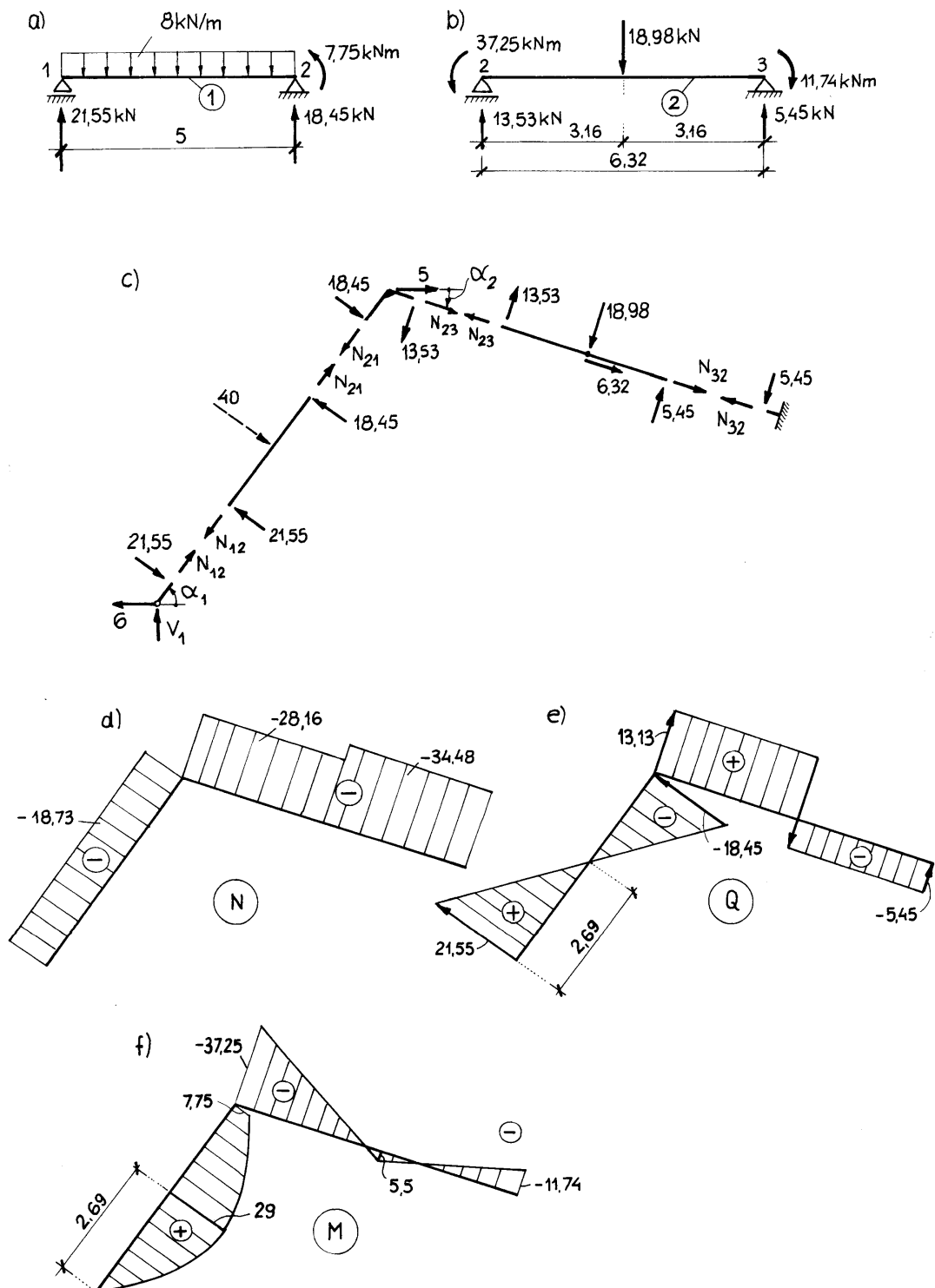
Obliczymy teraz siły wewnętrzne. Wartościom  $\hat{\phi}_2$  i  $\hat{\psi}$ , zgodnie ze wzorami transformacyjnymi, odpowiadają momenty zginające:

$$M_{21} = 25 + 0,68880 \cdot (-30,63 - 2 \cdot 8,46) = 7,75 \text{ kN} \cdot \text{m},$$

$$M_{23} = -15 + 0,62025 \cdot (-2 \cdot 30,63 + 3 \cdot 8,46) = -37,25 \text{ kN} \cdot \text{m},$$

$$M_{32} = 15 + 0,62025 \cdot (-30,63 + 3 \cdot 8,46) = 11,74 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

W każdym przęcie obliczymy wartości reakcji jak dla belki obciążonej poprzecznie (rys. 16.20a, b), a do wyznaczenia sił normalnych i reakcji posłużymy się równaniami równowagi sił działających na węzły i przęty (rys. 16.20c).



Rys. 16.20

Z równania równowagi węzła 1 mamy:

$$-6 + N_{12} \cdot \cos \alpha_1 + 21,55 \cdot \sin \alpha_1 = 0, \quad V_1 - N_{12} \cdot \sin \alpha_1 + 21,55 \cdot \cos \alpha_1 = 0,$$

skąd

$$N_{12} = \frac{-12,55 \cdot 0,8 + 6}{0,6} = -18,73 \text{ kN}, \quad V_1 = 18,73 \cdot 0,8 + 21,55 \cdot 0,6 = 27,91 \text{ kN}.$$

Z równowagi pręta 1 wynika, że  $N_{21} = N_{12} = -18,73 \text{ kN}$ . Natomiast równowaga węzła 2 prowadzi do zależności:

$$\sum P_x = 0: -N_{21} \cos \alpha_1 + 18,45 \cdot \sin \alpha_1 + 5 + N_{23} \cos \alpha_2 - 13,53 \cdot \sin \alpha_2 = 0,$$

skąd

$$N_{23} = (-18,73 \cdot 0,6 - 18,45 \cdot 0,8 + 13,53 \cdot 0,316 - 5) / 0,949 = -28,16 \text{ kN}.$$

Warunek  $\sum P_y = 0$  wykorzystamy do sprawdzenia poprawności obliczeń:

$$-18,73 \cdot 0,8 + 18,45 \cdot 0,6 + 13,53 \cdot 0,949 - 28,16 \cdot 0,316 = 0,027 \approx 0.$$

Siła normalna  $N_{32}$  wynika z równowagi pręta 2:

$$N_{32} = N_{23} - 6,32 = -28,16 - 6,32 = -34,48 \text{ kN}.$$

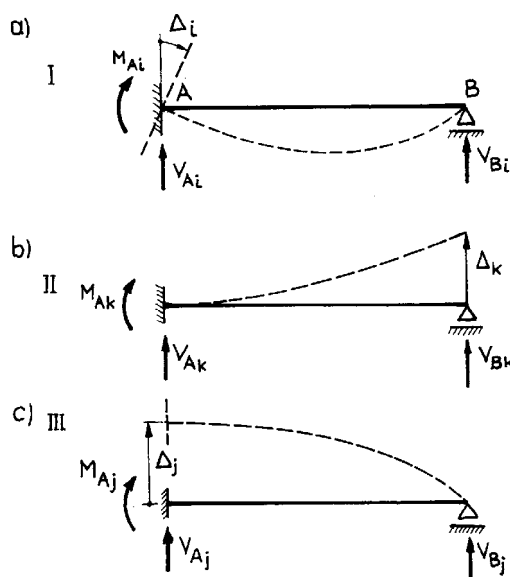
Wykresy sił wewnętrznych w ramie przedstawiają rys. 16.20d, e, f.

### 16.3. O ZASTOSOWANIACH TWIERDZENIA BETTIEGO W TEORII UKŁADÓW STATYCZNIE NIEWYZNACZALNYCH

#### 16.3.1. Twierdzenie o wzajemności reakcji

Jak wiadomo, twierdzenie *Betti* obowiązuje tylko dla układów liniowo-sprężystych. Omówimy dwa przykłady bardzo użytecznych zastosowań tego twierdzenia.

Sens twierdzenia o wzajemności reakcji objaśnimy na przykładzie belki statycznie niewyznaczalnej, przedstawionej na rys. 16.21. Rozważymy dwa stany tego układu. Rysunek 16.21a ilustruje pierwszy stan układu, w którym wymuszono obrót podpory  $A$  o kąt  $\Delta_i$ . Na skutek tego obrotu pojawiają się reakcje podpór  $M_{Ai}$ ,  $V_{Ai}$  oraz  $V_{Bi}$ . Drugi stan ilustruje rys. 16.21b. W stanie tym wymuszono pionowe przemieszczenie podpory  $B$ ,  $\Delta_k$ . Przemieszczenie to wywołuje reakcje podporowe  $M_{Ak}$ ,  $V_{Ak}$  oraz  $V_{Bk}$ .



Rys. 16.21

Zastosujemy obecnie twierdzenie *Bettiego* mówiące, że praca pierwszego układu sił na przemieszczeniach drugiego układu jest równa pracy drugiego układu na przemieszczeniach pierwszego układu. Zachodzi zatem równanie:

$$M_{Ai} \cdot 0 + V_{Ai} \cdot 0 + V_{Bi} \cdot \Delta_k = M_{Ak} \cdot \Delta_i + V_{Ak} \cdot 0 + V_{Bk} \cdot 0,$$

czyli

$$(a) \quad V_{Bi} \cdot \Delta_k = M_{Ak} \cdot \Delta_i.$$

Wprowadzimy teraz nieco inne oznaczenia, porządkujące dotychczasowe rozważania. Przyjmiemy mianowicie, że  $V_{Bi} = R_{ki}$  oraz  $M_{Ak} = R_{ik}$ . Równanie (a) przybiera więc postać:

$$(b) \quad R_{ki} \cdot \Delta_k = R_{ik} \cdot \Delta_i.$$

Równania (a) i (b) stają się bardzo użyteczne, gdy oba uogólnione przemieszczenia są jednostkowe, tj. gdy  $\Delta_i = \Delta_k = 1$ . Wówczas  $V_{Bi} = M_{Ak}$  lub

$$R_{ki} = R_{ik}. \quad (16.54)$$

Równanie (16.54) jest treścią **twierdzenia o wzajemności reakcji**:

*Reakcja  $R_{ki}$  odpowiadająca  $k$ -temu przemieszczeniu i wywołana stanem  $\Delta_i = 1$  jest równa reakcji  $R_{ik}$  odpowiadającej  $i$ -temu przemieszczeniu i wywołanej stanem  $\Delta_k = 1$ .*

Z twierdzenia o wzajemności reakcji wynikają przykładowo dalsze interesujące zależności, które użyjemy, rozszerzając analizę na trzeci stan układu, w którym wymuszono przemieszczenie pionowe podpory A wynoszące  $\Delta_j$  (por. rys. 16.21c). Z porównania stanów I i III otrzymujemy, że

$$(d) \quad V_{Ai} \cdot \Delta_j = M_{Aj} \cdot \Delta_i,$$

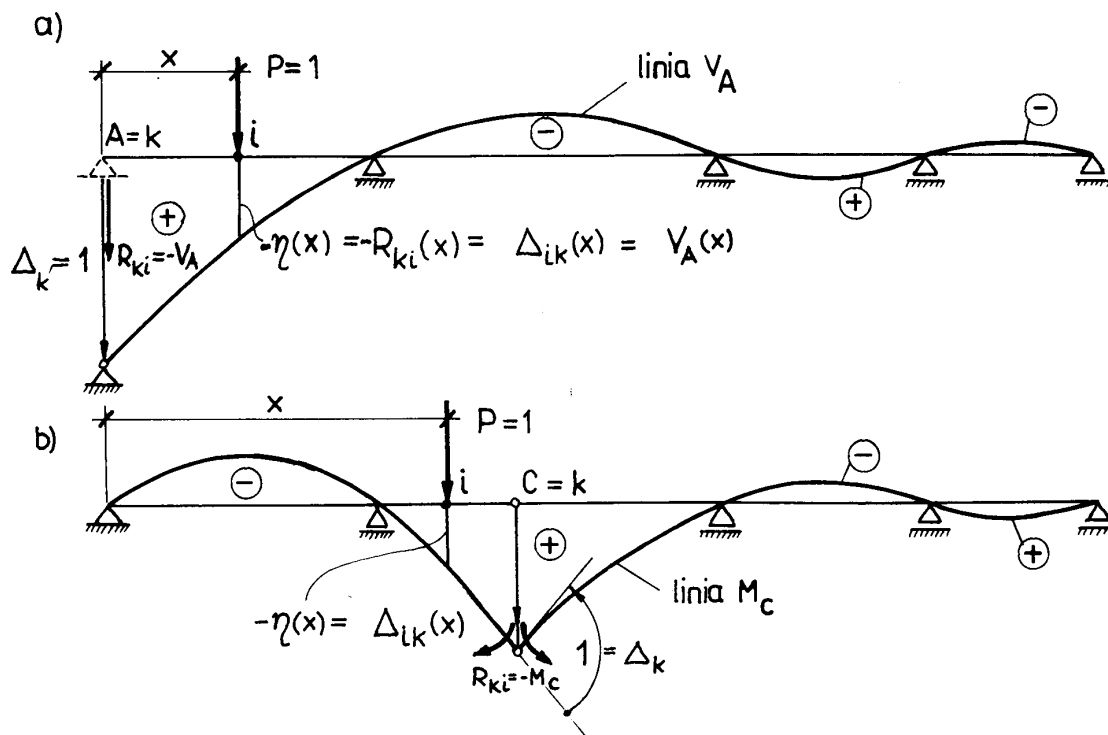
a dla stanów II i III zachodzi zależność

$$(e) \quad V_{Ak} \cdot \Delta_j = V_{Bj} \cdot \Delta_k.$$

Dodamy jeszcze, że z twierdzenia o wzajemności reakcji wynika bezpośrednio symetria współczynników macierzy konstrukcji w metodzie przemieszczeń.

### 16.3.2. Linie wpływu wielkości statycznych w układach statycznie niewyznaczalnych

Rozważymy belkę ciągłą przedstawioną na rys. 16.22a. Przeanalizujemy dwa stanu układu. Pierwszy stan odpowiada działaniu pionowej siły  $P_i = 1$ , usytuowanej w punkcie  $i$  leżącym w odległości  $x$  od lewego skrajnego końca belki. Podpory w tym stanie ulegają przemieszczeniom. Obciążenie siłą  $P_i = 1$  wywołuje reakcje  $R_{1i}, R_{2i}, \dots, R_{ki}, \dots, R_{ni}$ .



Rys. 16.22

W drugim stanie nie ma żadnego obciążenia zewnętrznego, natomiast podpora  $k$  ulega jednostkowemu przemieszczeniu  $\Delta_k = 1$ . Pod wpływem przemieszczenia podpory  $k$  belka odkształci się, a w punkcie  $i$  wystąpi przemieszczenie  $\Delta_{ik}(x)$ . Z twierdzenia *Bettiego* wynika zatem równanie:

$$(f) \quad P_i \cdot \Delta_{ik}(x) + R_{ki}(x) \cdot \Delta_k = 0.$$

Ponieważ  $P_i = \Delta_k = 1$ , więc

$$R_{ki}(x) = -\Delta_{ik}(x). \quad (16.55)$$

Z równania (16.55) wnioskujemy, że reakcja podpory  $k$  wywołana przez obciążenie  $P_i = 1$  działające w punkcie  $i$  odpowiada linii ugięcia belki wywołanej przez jednostkowe przemieszczenie podpory  $k$ . Funkcja  $\eta(x) = -\Delta_{ik}(x)$  jest zatem linią wpływu reakcji podpory  $k$ :  $R_{ki} = -V_A$ .

Podobnie można interpretować inne linie wpływu układów statycznie niewyznaczalnych. Chcąc na przykład określić linię wpływu momentu zginającego w przekroju wypadającym w punkcie  $C$ , należy w tym punkcie wprowadzić przegub oraz wymusić jednostkowy kąt wzajemnego obrotu. Linia ugięcia tego układu odpowiada linii wpływu momentu zginającego w punkcie  $C$ . Sytuację tę ilustruje rys. 16.22b.

Opisany sposób wyznaczenia linii wpływu jest analogiczny do metody kinematycznej stosowanej w układach statycznie wyznaczalnych. Zasadnicza różnica polega na tym, że usunięcie odpowiedniego więzu w układzie statycznie wyznaczalnym przekształca konstrukcję w układ tarcz sztywnych o jednym stopniu swobody. Wymuszenie przemieszczenia jednostkowego w takim układzie uzyskuje się bez deformacji prętów składowych. W konstrukcjach statycznie niewyznaczalnych usunięcie jednego więzu prowadzi do układu, którego stopień statycznej niewyznaczalności zmniejsza się o jedno. Jest to zatem w dalszym ciągu układ geometrycznie niezmienny, a wymuszenie przemieszczenia jednostkowego musi pociągać za sobą deformację prętów. Wnioskujemy stąd, że linie wpływu układów statycznie niewyznaczalnych jako linie ugięcia układów sprężystych są funkcjami nieliniowymi.